

Zur Reflexion von Röntgenstrahlen an Kristallen.

Von Walter Wunderlich in Kiel.

Mit 2 Abbildungen. (Eingegangen am 27. Mai 1943.)

Es wird die bei der Reflexion eines monochromatischen Röntgenstrahlbündels an der ebenen Oberfläche eines Einkristalls entstehende Regelfläche untersucht und ihre wichtigsten ebenen Schnitte, die als Diagrammkurven auftreten können, werden gekennzeichnet. Ferner wird die Auswertung besonderer Diagrammkurven besprochen.

1. Einleitung.

Seemann veröffentlicht in einer 1930 erschienenen Arbeit¹⁾ Röntgendiagramme von Steinsalzkristallen, die so entstehen, daß ein großer Kristall mit ebener Oberfläche ε aus einem im Abstand h befindlichen Punkt O mit monochromatischem Röntgenlicht angestrahlt wird und die reflektierten Strahlen von einem ebenen Film π aufgefangen werden. Da es sich um eine Interferenzerscheinung handelt, gelangen für jede Netzebenenstellung des Strukturgitters nur jene Strahlen des Bündels O zur Wirkung, die unter einem Bragg'schen Winkel γ einfallen; γ ergibt sich aus

$$\cos \gamma = \frac{n \lambda}{2d} \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (1)$$

wobei λ die Wellenlänge der Strahlung und d den Abstand benachbarter Netzebenen bedeutet.

Geometrisch liegt demnach folgender Sachverhalt vor: Von O strahlt ein *Drehkegel* Γ mit dem Öffnungswinkel 2γ aus, dessen Achse z auf der betrachteten Netzebenenstellung senkrecht steht. Γ schneidet die Oberfläche ε nach einem Kegelschnitt c , und hier wird jeder Mantelstrahl parallel zu seiner Gegengerzeugenden reflektiert. Die so entstehende *Regelfläche* Φ schneidet den Film π nach der der Netzebenenstellung zugeordneten Diagrammkurve q .

Aus dem System dieser Diagrammkurven für einen Kristall können dann Rückschlüsse auf die vorhandenen Netzebenen und deren Abstände gezogen werden. In der genannten Arbeit wird vor allem die zu ε parallele Bildebene π durch das Bündelzentrum O betrachtet. Seemann spricht dabei die Diagrammkurven q ohne Beweis, aber unmiß-

¹⁾ H. Seemann, Ann. d. Phys. 7, 633, 1930.

verständlich als *Kegelschnitte* an, betont jedoch, daß die Regelfläche Φ kein Kegel ist.

Im Jahre 1941 erfolgt eine sachliche Richtigstellung von Maier¹⁾, wobei nachgewiesen wird, daß es sich bei den fraglichen Diagrammkurven keineswegs um Kegelschnitte, sondern um doppelt-symmetrische *Quartiken* (Kurven 4. Ordnung) handelt, für die der Name „Spiren“ vorgeschlagen wird.

Seemann erklärt in einer Entgegnung²⁾, diese Tatsache sei ihm stets bekannt gewesen und veröffentlicht seinerseits eine ausführlichere Darstellung der obwaltenden geometrischen Verhältnisse³⁾. Er kennzeichnet nunmehr wie Maier jene speziellen Diagrammkurven als affine Boothsche Lemniskaten, weist darüber hinaus auch die zu π parallelen sowie die zu z normalen Schnitte der Regelfläche Φ als Quartiken nach, vermutet aber „vorbehaltlich genauerer Untersuchung“, daß allgemeine Ebenen die Fläche nach Kurven 8., ja 10. Ordnung schneiden.

Da dies nicht zutreffen kann und eine richtige Auswertung der Diagrammkurven im hyperbolischen Fall (s. u.) noch nicht vorliegt, scheint es mir nach allem angebracht, den geometrischen Sachverhalt endgültig klarzustellen, obwohl es sich um kein grundlegendes Problem, sondern bloß um eine reizvolle Anwendung der darstellenden Geometrie der Regelflächen handelt. Die folgende Untersuchung geschieht vorwiegend rein geometrisch, wird jedoch zum leichteren Verständnis von analytischen Entwicklungen begleitet.

2. Ordnung und Eigenschaften der Regelfläche Φ .

Es liegt also ein *Drehkegel* Γ mit der Spitze O , der Achse z und dem Öffnungswinkel 2γ vor. Ferner ein Kristall mit der *ebenen Oberfläche* ε , aus der die zu z senkrechten Strukturebenen unter dem Winkel δ austreten (in Fig. 1 durch waagerechte Schraffen angedeutet). Machen wir O zum Ursprung und z zur Achse eines Systems von Zylinderkoordinaten r, φ, z , so lautet bei vorläufiger Beschränkung auf positive r die Gleichung des unteren Kegelmantels

$$\Gamma \dots z = -r \operatorname{ctg} \gamma, \quad (2)$$

während ε angesetzt werden kann mit

$$\varepsilon \dots z = -r \cos \varphi \cdot \operatorname{tg} \delta - l \quad (l > 0). \quad (3)$$

¹⁾ W. Maier, Ann. d. Phys. 40, 85, 1941. — ²⁾ H. Seemann, ebenda 41, 313, 1942. — ³⁾ H. Seemann, ZS. f. Phys. 119, 374, 1942.

ε schneidet Γ längs eines Kegelschnittes c , der im folgenden als „Grundkurve“ bezeichnet sei, weil von hier die Regelfläche praktisch ausgeht. Für den Grundriß c' (Normalriß in Richtung z auf eine Netz-

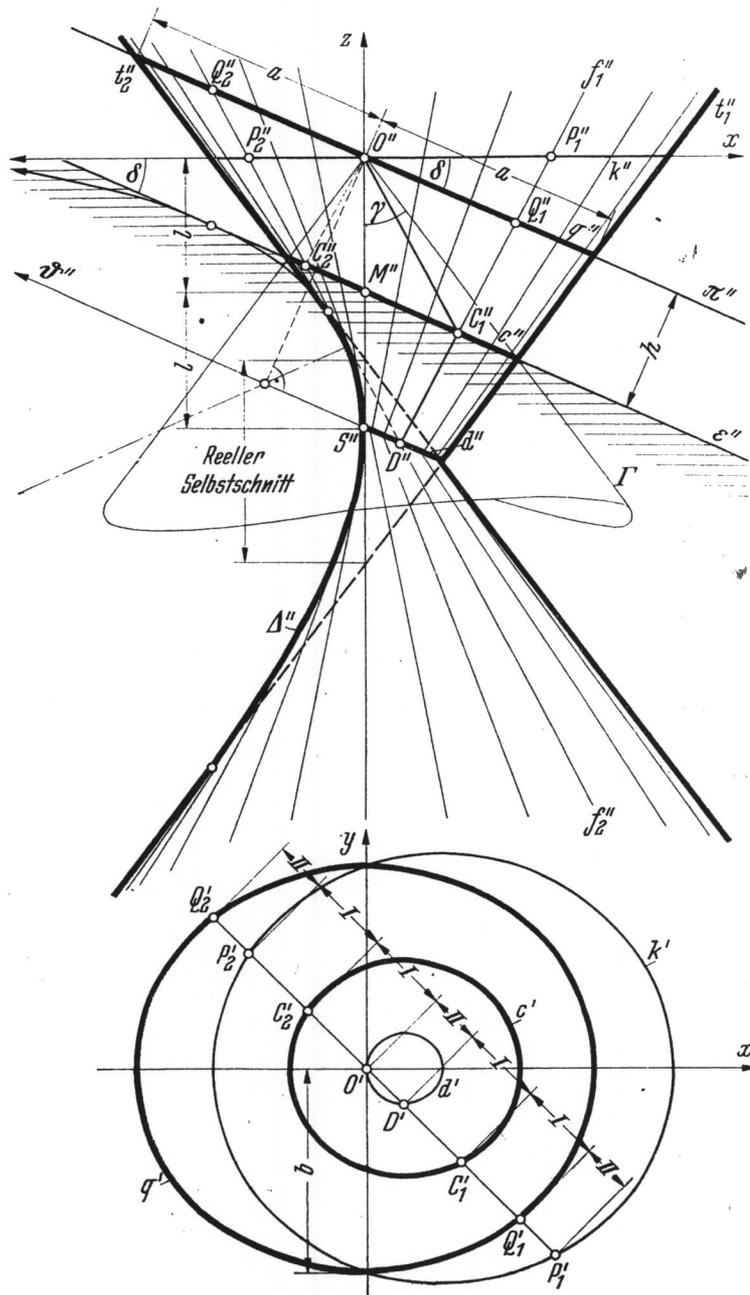


Fig. 1. Die von reflektierten Röntgenstrahlen gebildete Regelfläche φ in Grund- und Aufriß.

ebene, etwa $z = 0$) ergibt sich durch Entfernung von z aus (2) und (3) die Gleichung

$$c' \dots r = \frac{l}{\operatorname{ctg} \gamma - \operatorname{tg} \delta \cos \varphi}; \quad (4)$$

O ist bekanntlich ein Brennpunkt von c' .

Eine beliebige Erzeugende e_1 von Γ trifft ε in einem Punkt C_1 von c und wird daselbst an der dort austretenden Netzebene parallel zur Gegenerzeugenden e_2 reflektiert¹⁾. Faßt man die so gewonnene Erzeugende f_1 unserer zu untersuchenden Regelfläche Φ als Verbindung von C_1 mit dem Fernpunkt E_2 von e_2 auf, so erkennt man eine eindeutige — d. h. projektive — Zuordnung zwischen den Punkten C_1 von c und den Punkten E_2 des Fernkreises u von Γ ; das Erzeugnis zweier projektiv aufeinander bezogenen Kegelschnitte ist aber eine rationale *Regelfläche 4. Ordnung*²⁾.

Ihre analytische Darstellung erhalten wir folgendermaßen: Die Gleichung der Erzeugenden f_1 lautet

$$f_1 \dots z - z_1 = (r - r_1) \cdot \operatorname{ctg} \gamma, \quad (5)$$

wobei die Koordinaten r_1, φ, z_1 von C_1 den Gleichungen (2), (3) und damit auch (4) genügen. Nun haben wir bloß r_1 und z_1 zu eliminieren und erhalten

$$\Phi \dots r \operatorname{ctg} \gamma - z = \frac{2l}{1 - \operatorname{tg} \gamma \operatorname{tg} \delta \cdot \cos \varphi}. \quad (6)$$

Gehen wir schließlich mittels $r \cos \varphi = x$ und $r \sin \varphi = y$ zu kartesischen Normalkoordinaten über, so ergibt sich nach kurzer Umformung

$$\begin{aligned} \Phi \dots (x^2 + y^2) (x \operatorname{tg} \gamma \operatorname{tg} \delta + z + 2l)^2 \\ = [(x^2 + y^2) \operatorname{ctg} \gamma + xz \operatorname{tg} \gamma \operatorname{tg} \delta]^2, \end{aligned} \quad (7)$$

womit die Ordnung der Regelfläche analytisch bestätigt ist.

Will man Φ mit Hilfe von *Leitlinien* erzeugen, so stehen hierfür die Achse z , der Grundkegelschnitt c und der Fernkreis u zur Verfügung. Zu beachten ist hierbei bloß, daß c und u einander in zwei uneigentlichen Punkten U_1, U_2 schneiden (beide Kurven liegen ja auf Γ), so daß sich von der zu erwartenden Regelfläche $2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 = 8$. Ordnung zwei Strahlbüschel U_1, U_2 abspalten, weiters der Kegel Γ selbst, so daß schließlich für die Restfläche Φ die Ordnung 4 verbleibt.

Φ ist *symmetrisch* zur Aufrißebene $y = 0$. Die Achse z ist *doppelte Leitgerade* der Fläche, da von jedem ihrer Punkte zwei (zu $y = 0$ symmetrische) Erzeugende ausgehen.

¹⁾ Man kann sich diese Reflexion anschaulich machen, wenn man sich vorstellt, daß die Oberfläche ε wie eine Treppe mit feinsten waagrechten spiegelnden Stufen besetzt ist. — ²⁾ E. Müller u. J. Krames, Vorlesungen über darstellende Geometrie, Bd. III: Konstruktive Behandlung der Regelflächen (Wien 1931), S. 251.

In jeder Ebene μ durch z liegen zwei Erzeugende f_1, f_2 von Φ , hervorgerufen durch die zwei Gegenerzeugenden $e_1 \parallel f_2$ und $e_2 \parallel f_1$ von Γ . Drehen wir μ um z , so beschreibt der Schnittpunkt D von f_1 und f_2 eine *Doppelkurve*¹⁾ d der Fläche. Diese kann in unserem Falle nur ein *Kegelschnitt* sein, wovon man sich auch elementar leicht überzeugen kann: Die vier Erzeugenden e_1, f_1, f_2, e_2 bilden ein Parallelogramm OC_1DC_2 (Fig. 1); wegen $C_1D = OC_2$ liegt D sicherlich in der aus ε durch zentrische Verdoppelung von O aus entstehenden Ebene ϑ ; da ϑ aber unabhängig von μ ist, enthält sie die ganze Kurve d . Führt man dann die Addition der Vektoren OC_1 und $C_1D = OC_2$ im Grundriß durch, so ergibt sich als Ort von D' ein zu c' homothetischer (d. h. bezüglich des gemeinsamen Mittelpunktes zentrisch ähnlicher) Kegelschnitt d' , dessen Hauptscheitel mit den Brennpunkten von c' zusammenfallen; in der Tat, zufolge der gemeinsamen axialen Symmetrie homothetischer Kegelschnitte in jeder Richtung gilt auf jedem Strahl durch O' : $C'_1D' = O'C'_2$.

Da die Regelfläche Φ eine doppelte Leitgerade und einen Doppelkegelschnitt besitzt, ist sie zur V. Art nach Sturm zu rechnen²⁾.

Dual zur Doppelkurve d besitzt Φ auch eine *Doppeltorse* Δ , d. h. eine doppelt berührende abwickelbare Fläche. Sie wird umhüllt von den Ebenen ν , die Paare zu $y = 0$ symmetrischer Flächenerzeugenden aufspannen. Da die Ebenen ν zur Aufrißebene $y = 0$ normal stehen, ist Δ ein zu y paralleler *Zylinder*, und da unter ihnen als Grenzfall die Fernebene enthalten ist (aufgespannt von den beiden Fernerzeugenden u_1, u_2 , die vom Fernpunkt der z -Achse nach den Punkten U_1, U_2 zielen), ist dieser Zylinder *parabolisch*. — Von seinem Vorhandensein kann man sich wieder elementar überzeugen: Sein Normalschnitt muß ja von den Aufrissen der Erzeugenden f_1 (und f_2) eingehüllt werden; nun läuft aber f'_1 durch C'_1 parallel zu $O''C''_2$ und letztere Gerade ist wieder symmetrisch zu $O''C''_1$ bezüglich z . Die Richtung von f'_1 ist also projektiv zur Reihe der Punkte C''_1 , das Hüllgebilde von f'_1 ist demnach eine *Parabel* Δ'' . Der zugehörige Zylinder Δ berührt die Regelfläche aus Symmetriegründen doppelt, und zwar längs einer rationalen Raumkurve 4. Ordnung mit einem Doppelpunkt in S , die, doppelt gezählt, den vollständigen Schnitt 8. Ordnung von Φ und Δ darstellt. Auf Grund besonderer Lagen von C''_1 ergibt sich, daß Δ die Ebenen ε und $z = 0$ berührt,

¹⁾ Nicht Torsal- oder Kehlkurve, wie bei H. Seemann, ZS. f. Phys. 119, 374, bes. 382, 1942. — ²⁾ Müller-Krames, S. 258–260.

ferner die beiden in $y = 0$ gelegenen Umrißerzeugenden t_1, t_2 und schließlich die Achse z in ihrem Treffpunkt S mit d . Es läßt sich endlich zeigen, daß die Hauptebene von Δ unter dem Winkel δ ansteigt, ferner daß die Fokalachse in der Ebene ϑ liegt und den Fußpunkt des aus O auf ϑ gefällten Lotes enthält (Fig. 1).

Um die Gleichung des Doppelzylinders Δ aufzustellen, ersetzen wir in (6) r durch $x/\cos \varphi$, was bei festem φ die Gleichung einer Berührebene ν von Δ liefert; nach bekannter Regel ist nun nach dem Parameter φ (oder $\cos \varphi$) partiell zu differenzieren und dieser hierauf zu eliminieren. Man erhält

$$\Delta \dots (x \operatorname{tg} \delta - z)^2 + 4l(x \operatorname{tg} \delta + z + l) = 0. \quad (8)$$

Man beachte, daß Δ vom Winkel γ unabhängig ist.

Φ ist eine „windschiefe“ Regelfläche, d. h. längs jeder allgemeinen Erzeugenden wechselt die Tangentialebene von Punkt zu Punkt. Längs der vorhin erwähnten Erzeugenden t_1, t_2 jedoch verhält sich Φ insofern wie ein Kegel, als hier die zugehörigen Tangentialebenen zusammenfallen und der ganzen Länge nach berühren. Solche Erzeugende heißen *Torsallinien*, ihre Berührebenen „Torsalebene“ und die als Kegelspitzen geltenden Punkte „Kuspidalpunkte“. Letztere liegen in unserem Falle auf der Achse z und trennen hier jenen Teil der Doppelgeraden, längs dessen eine tatsächliche (reelle) Selbstdurchdringung der Fläche stattfindet, von ihrem isolierten (parasitischen) Teil.

Unsere Fläche besitzt aber noch zwei weitere Torsalerzeugende, die allerdings imaginär sind: Es sind die in der Grundebene $z = 0$ gelegenen Erzeugenden des Kegels Γ . Die zugehörigen Torsalebene sind die Minimalebene $x \pm iy = 0$. Dies ist insofern von Bedeutung, als der Grundriß jeder auf Φ verlaufenden Kurve an die den Umriß abgebenden Minimalgeraden $x \pm iy = 0$ berührend herantritt, mithin den Ursprung O als *Brennpunkt*¹⁾ besitzt (vgl. etwa c').

Es mag noch ausdrücklich erwähnt werden, daß der Drehkegel Γ für die Regelfläche einen *Richtkegel* abgibt, enthält er ja zu jeder Erzeugenden von Φ eine parallele. — Die Fläche Φ aber als „Kegelkonoid“ zu bezeichnen, wie Seemann vorschlägt, ist nicht angängig, da der Name Konoid für jene Regelflächen vorbehalten ist, deren sämtliche Erzeugenden zu einer festen Ebene parallel sind.

¹⁾ Als *Brennpunkte* einer beliebigen Kurve bezeichnet man jene Punkte, in denen sich die zu den Minimalrichtungen $x \pm iy = 0$ parallelen Kurventangenten schneiden.

Was die Einteilung unserer Flächen Φ betrifft, so haben wir drei Fälle zu unterscheiden:

$\gamma + \delta < 90^\circ$: *Elliptischer Fall*. c und d sind Ellipsen. U_1, U_2 sind konjugiert komplex, ebenso u_1, u_2 . Der reelle Selbstschnitt längs z findet zwischen t_1 und t_2 statt.

$\gamma + \delta = 90^\circ$: *Parabolischer Fall*. c und d sind Parabeln. U_1 und U_2 fallen in einem reellen Punkt zusammen. u_1 und u_2 vereinigen sich mit t_1 zu einer reellen Ferngeraden. Der reelle Selbstschnitt längs z findet unterhalb t_2 statt.

$\gamma + \delta > 90^\circ$: *Hyperbolischer Fall*. c und d sind Hyperbeln. U_1, U_2 sind reell getrennt, ebenso u_1, u_2 . Der reelle Selbstschnitt längs z findet außerhalb t_1 und t_2 statt.

Bemerkenswert ist vielleicht noch der Fall $\gamma = 45^\circ$, auf den der allgemeine Fall durch affine Dehnung oder Verkürzung der z -Koordinaten stets zurückgeführt werden kann. Hier ist nämlich $f_1 \perp e_1$ d. h. die Regelfläche Φ ist dann die *Normalenfläche* des Drehkegels längs eines ebenen Schnittes c^1).

3. Ebene Schnitte der Regelfläche Φ .

Wie eingangs erklärt, sind die Kurven auf den Seemannschen Diagrammen die Schnittlinien der den verschiedenen Netzebenen zugeordneten Regelflächen Φ mit der Filmebene. Da wir Φ als rationale Regelfläche 4. Ordnung erkannt haben, ist auch jeder allgemeine ebene Schnitt eine *rationale Kurve 4. Ordnung* und kann niemals 8. oder gar 10. Ordnung sein, wie Seemann [a. a. O. ²], S. 39 vermutet; analytisch geht das unmittelbar aus Gleichung (7) hervor, wenn man x, y, z als lineare Funktionen eines Parameters t ansetzt.

Die drei Doppelpunkte, die eine solche Quartik aufweist, rühren von den Selbstschnitten der Regelfläche her und liegen demnach auf der Doppelgeraden z und dem Doppelkegelschnitt d . — Von den vier Fernpunkten der Quartik befinden sich zwei auf dem Fernkreis U und zwei auf den Fernerzeugenden u_1, u_2 . Die letzteren sind im Grundriß allen Schnittlinien gemeinsam und konjugiert komplex, zusammenfallend oder reell getrennt, je nachdem ob der elliptische, parabolische oder hyperbolische Fall vorliegt.

¹) Vgl. Müller-Krames, S. 276. — ²) H. Seemann, ZS. f. Ph. 119, 374, 1942.

a) *Achsennormale Schnitte.* Die Ebenen $z = \text{const}$ liefern *zirkuläre* Quartiken, d. h. solche, die (einfach) durch die absoluten Kreispunkte gehen. Die Tangentialebenen von Φ daselbst sind die oben erwähnten Minimalebenen $x \pm iy = 0$; der außerordentliche Brennpunkt dieser Quartiken liegt mithin auf der Achse z . — Hervorzuheben ist die Ebene $z = 0$, für die der Schnitt in das Minimalgeradenpaar durch O und einen *Kegelschnitt* k zerfällt. Auf Grund der Streckgleichheit $OC_1 = C_1P_1$ (Fig. 1) erkennt man, daß k durch zentrische Verdoppelung aus c' hervorgeht. Wegen der festen Neigung aller Flächenerzeugenden sind deren Abschnitte zwischen $z = 0$ und $z = \text{const}$ untereinander gleich lang und jeder achsennormale Schnitt kann als *Konchoide* des Kegelschnittes k vom Brennpunkt O aus erhalten werden. Diese Kurven sind aber sicherlich keine Pascal-Schnecken oder Kardioiden¹⁾, da sie sonst in den absoluten Punkten Spitzen aufweisen müßten, während ja bei uns alle Singularitäten im Endlichen liegen.

b) *Oberflächenparallele Schnitte.* Die Schnitte parallel zur Kristalloberfläche ε verlaufen auch parallel zur Ebene ϑ der Doppelkurve d und liefern daher Quartiken mit zwei unendlich fernen Doppelpunkten U_1, U_2 (s. o.). Im elliptischen Falle sind diese konjugiert komplex, so daß wir es mit *affinen Fußpunktskurven* (oder *Inversen*) von *Kegelschnitten* zu tun haben. Von besonderem Interesse ist die den Ursprung O enthaltende Ebene π , da in erster Linie diese als Filmträger herangezogen wurde; sie ist aber auch rein geometrisch ausgezeichnet, da für die zugehörige Quartik q der Doppelpunkt O in der Mitte liegt (Fig. 1). Die Quartik q ist demnach zweifach symmetrisch und eine *affine Boothsche Lemniskate*. Maier²⁾ und Seemann³⁾ beweisen dies elementar über die Beziehung $OQ_1 = C_2C_1$, welche q auf einfachste Weise aus dem Grundkegelschnitt c abzuleiten gestattet: Es sind die durch M gehenden Sehnen von c von O aus parallel abzutragen. Auch die weiteren Beziehungen zu d und k gehen aus den in Fig. 1 vermerkten Streckengleichheiten auf dem Fahrstrahl durch O' zur Genüge hervor („Zissoidale Erzeugung“).

Setzt man in (6) $z = -r \cos \varphi \cdot \text{tg } \delta$, so erhält man als Gleichung für die Quartik

$$q \dots r = \frac{2l \cdot \text{tg } \gamma}{1 - \text{tg}^2 \gamma \text{tg}^2 \delta \cdot \cos^2 \varphi}, \quad z + r \text{tg } \delta \cdot \cos \varphi = 0. \quad (9)$$

¹⁾ H. Seemann, a. a. O., S. 374 und Fig. 10. — ²⁾ W. Maier, Ann. d. Phys. 40, 85, 1941. — ³⁾ H. Seemann, ZS. f. Phys. 119, 374, 1942.

vir drei
 U_1, U_2
längs z
und U_2
gen sich
längs z
 U_1, U_2
 z findet
den der
 z -Koor-
 $f_1 \perp e_1$,
kegels Γ
nnschen
zebenen-
da wir Φ
ch jeder
nd kann
, S. 396]
hervor,
ansetzt.
t, rühren
nach auf
Von den
rnkreis u
n Grund-
sammen-
abolische

Im *hyperbolischen Fall* sind die Ferndoppelpunkte U_1, U_2 reell und getrennt. Die Quartik q besteht aus vier hyperbelartigen Ästen, von denen im Röntgendiagramm allerdings nur zwei auftreten. Von den vier Asymptoten sind je zwei parallel, es geht aber keine durch O , was schon aus Symmetriegründen nicht statthaben kann. Wir können die beiden Asymptoten von U_1 konstruieren, indem wir daselbst die Tangentialebenen von Φ bestimmen und mit π schneiden; eine dieser Berührebenen wird aufgespannt von der Tangente an c und der Erzeugenden u_1 ; erstere ist Asymptote von c , letztere geht durch den Fernpunkt der z -Achse (s. o.), so daß die gesuchte Berührebene parallel zu z verläuft: Das Asymptotenpaar der Grundhyperbel c deckt sich im Grundriß mit einem Asymptotenpaar der Quartik q (das andere ergibt sich durch Symmetrie). Dieses Zusammenfallen findet in einem anderen Parallelriß auf π natürlich nicht mehr statt, insbesondere auch nicht im Normalriß, wie Maier (a. a. O. S. 101 und Fig. 11) irrtümlich annimmt.

Im *parabolischen Fall* rücken U_1 und U_2 zusammen, die Quartik weist mithin in ihrem Fernpunkt eine Selbstberührung längs der Ferngeraden auf. Da der Doppelpunkt O wie in allen Fällen für q' einen Brennpunkt darstellt, handelt es sich hier um die *Kampyla* des Eudoxus ¹⁾:

$$q' \dots r = \frac{2l \cdot \operatorname{tg} \gamma}{\sin^2 \varphi}; \quad (9')$$

q selbst ist eine Affine hiervon.

c) *Schnitte 2. Ordnung*. Bemerkenswert sind schließlich noch die Tangentialebenen des *parabolischen Zylinders* Δ , die die Regelfläche Φ nach je zwei Erzeugenden und einem *Kegelschnitt*, also einer zerfallenden Quartik durchsetzen. Wir kennen hiervon bereits die Kegelschnitte c und k (die Doppelkurve d steht außerhalb der Reihe). Alle diese Kegelschnitte haben im Grundriß O' als gemeinsamen Brennpunkt und Ähnlichkeitszentrum; die Ähnlichkeit folgt aus dem Vorhandensein der Fernerzeugenden u_1, u_2 , die im Grundriß das allen Kurven gemeinsame Fernpunktpaar U'_1, U'_2 hervorrufen.

Es ist also durchaus nicht ausgeschlossen, auch bei dieser Anordnung Kegelschnitte als Diagrammkurven zu erhalten, allerdings bloß vereinzelt; die Filmebene müßte den Zylinder Δ berühren.

¹⁾ H. Wieleitner, Spezielle Ebene Kurven (Samml. Schubert, Bd. 56), S. 69.

4. Auswertung der Quartik q .

Es handelt sich nun um die Aufgabe, bei Kenntnis des Abstandes $h = l \cos \delta$ zwischen Filmebene π und Kristalloberfläche ε , aus einer aufgenommenen Diagrammquartik q den Braggschen Winkel γ und die Streichrichtung δ der zugehörigen Strukturebenen zu bestimmen.

a) *Elliptischer Fall*. Die Quartik q ist eine *geschlossene*, doppelt symmetrische Kurve. Es liegt daher nahe, die beiden *Halbachsen* a, b auszumessen. Auf Grund von (9) gilt

$$a = \frac{r(0)}{\cos \delta} = \frac{2h \operatorname{tg} \gamma}{\cos^2 \delta - \operatorname{tg}^2 \gamma \sin^2 \delta}, \quad (10)$$

$$b = r\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2h \operatorname{tg} \gamma}{\cos \delta}. \quad (11)$$

Durch Entfernung von γ ergibt sich für $\cos \delta$ die kubische Gleichung

$$\cos^3 \delta + \left(\frac{4h^2}{b^2} - 1\right) \cos \delta - \frac{4h^2}{ab} = 0; \quad (12)$$

γ ergibt sich anschließend aus (11).

Seemann [a. a. O.¹⁾, S. 638] gibt die entsprechende kubische Gleichung für $\operatorname{tg} \gamma$ an, schlägt aber ein zeichnerisches Lösungsverfahren vor, das folgendermaßen abgeleitet werden kann: Aus Fig. 1 folgt zunächst, daß die Hauptachse der Grundellipse c die Länge a hat, während ihre y -parallele Sehne durch M gleich b ist. Denken wir uns diese Sehne um die z -Achse in die Aufrißebene gedreht, so gelangen ihre Endpunkte auf die Umrißerzeugenden des Drehkegels F und es entsteht nach Weglassung aller unnötigen Linien das nachstehende (um δ gekippte) Schema:

Das Verfahren geht nun so vorsich: Man zeichnet (in genügend großem Maßstab) zwei Parallelen ε und π im Abstande h und dreht hierauf die Strecke $AB = b$ um ihren festgehaltenen Mittelpunkt M so lange, bis ihre Projektion A_0B_0 aus dem Punkt O der Mittelsenkrechten die Länge a hat.

Die gesuchten Winkel γ und δ sind dann wie ersichtlich unmittelbar abzulesen.

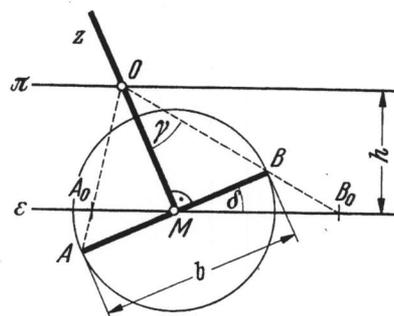


Fig. 2. Zeichnerische Auswertung der Quartik q im elliptischen Fall.

¹⁾ H. Seemann, Ann. d. Phys. 7, 633, 1930.

Maier (a. a. O. S. 97) hält die Strecke $A_0B_0 = a$ fest und verändert den Punkt O auf π ; seine richtige Lage wird dann mit Hilfe einer Fehlerkurve bestimmt. — Eine solche Fehlerkurve wird man zweckmäßig auch für das Seemannsche Verfahren heranziehen; man kann etwa die Abweichung der Strecke A_0B_0 von der geforderten Länge a als Ordinate über B_0 auftragen (mit Berücksichtigung des Vorzeichens!) und erhält so eine Kurve, deren Schnitt mit ε den richtigen Ort von B_0 liefert.

b) *Parabolischer Fall.* Hier ergibt sich aus der gemessenen Halbachse b auf Grund von (9') unmittelbar

$$\cos \gamma = \sin \delta = \frac{2h}{b}. \quad (13)$$

Im übrigen tritt dieser Sonderfall nicht von selbst auf und wäre auch gar nicht als solcher zu erkennen.

c) *Hyperbolischer Fall.* Da von den vier Ästen der Quartik q bei der Aufnahme nur jene beiden auftreten, deren Scheitel auf der y -Achse liegen, fehlt die Halbachsenlänge a . Seemann [a. a. O.¹⁾, S. 641] zieht daher noch einen allgemeinen Punkt von q heran, setzt aber q noch fälschlich mit einer Hyperbelgleichung an. Maier²⁾ benutzt statt dessen die Asymptoten; abgesehen davon, daß deren Festlegung durch gefühlsmäßiges Anlegen nicht als hinreichend genaues Konstruktionsprinzip angesehen werden kann, wird überdies angenommen, daß sie sich im Normalmaß auf ε mit den Asymptoten der Grundhyperbel c decken, was, wie bereits unter 3 b) erwähnt, nicht zutrifft.

Um einen allgemeinen Punkt von q zu verwerthen, benötigt man die Gleichung der Quartik in Normalkoordinaten. Aus (9) folgt zunächst

$$(x^2 + y^2 - x^2 \operatorname{tg}^2 \gamma \operatorname{tg}^2 \delta)^2 - 4l^2 \operatorname{tg}^2 \gamma (x^2 + y^2) = 0 \quad (14)$$

und nach Übergang zu Normalkoordinaten ξ, η in der Filmebene π vermöge $x = \xi \cos \delta, y = \eta$

$$[\xi^2 (\cos^2 \delta - \operatorname{tg}^2 \gamma \sin^2 \delta) + \eta^2]^2 - \frac{4h^2 \operatorname{tg}^2 \gamma}{\cos^2 \delta} (\xi^2 \cos^2 \delta + \eta^2) = 0. \quad (15)$$

¹⁾ H. Seemann, Ann. d. Phys. 7, 633, 1930. — ²⁾ W. Maier, ebenda 40, 85, 1941.

Mißt man nun die Halbachse b und die Koordinaten ξ_0, η_0 eines allgemeinen Punktes von q aus, so erhält man nach Entfernung von γ vermöge (11) die Bestimmungsgleichung 4. Grades für $\cos^2 \delta$:

$$\left[\xi_0^2 \left(\frac{b^2}{4h^2} \cos^4 \delta + \left(1 - \frac{b^2}{4h^2} \right) \cos^2 \delta \right) + \eta_0^2 \right]^2 - b^2 (\xi_0^2 \cos^2 \delta + \eta_0^2) = 0. \quad (16)$$

γ ergibt sich dann wieder aus (11).

Hiermit dürfte die Geometrie der Regelfläche Φ und ihrer ebenen Schnitte hinreichend und endgültig geklärt sein.

Was schließlich die von Maier beobachtete „Knotenbildung“ der Quartiken q betrifft, d. h. die Erscheinung, daß in einem Diagramm mehrere Kurven durch einen Punkt gehen, so ist dies meines Erachtens eine rein zufällige Inzidenz, die bei der Vielzahl der auftretenden Diagrammkurven nicht sonderlich überraschen darf und die gar nicht genau vorhanden ist, da sie sich theoretisch nicht begründen läßt.

Kiel, im April 1943.