Über die Wattsche Geradführung

Ausarbeitung eines Vortrages, der im Rahmen des Festkolloquiums aus Anlaß des 7o. Geburtstages von Herrn
em.o.Univ.-Prof. Dr. Fritz Hohenberg
am 18.1.1977 an der Technischen Universität Graz gehalten wurde

von Walter Wunderlich

Der letzte Teil des weltbekannten Lehrbuches "Konstruktive Geometrie in der Technik" unseres verehrten Jubilars ist der *Kinematik* gewidmet. Das ist jener Zweig der angewandten Geometrie, welcher als Grundlage der Getriebelehre für den Maschinenbauer von besonderer Bedeutung ist. Es erschien mir daher angezeigt, bei dem heutigen Festkolloquium auch dieses Sachgebiet, das der große österreichische Mathematiker W. BLASCHKE einmal das "Paradies der Geometer" genannt hat, durch einen Beitrag zu berücksichtigen.

Eines der ältesten, aber immer noch höchst aktuellen Probleme der Kinematik betrifft die sogenannten "*angenäherten Geradführungen*", das sind Gelenkmechanismen, welche einen Punkt möglichst genau auf einem bestimmten Abschnitt längs einer Geraden zu wandern zwingen. Das klassische Beispiel hierzu stammt von keinem Geringeren als James WATT, der um 1784 einen solchen Mechanismus erdachte, um das Ende der Kolbenstange seiner stehenden Dampfmaschine auf und ab zu führen. Wie aus einem erhalten gebliebenen Brief hervorgeht, war seine Überlegung etwa die folgende: Betrachtet man einen lotrechten Stab AB (Fig. 1), dessen Anfang A durch einen in L fest gelagerten Arm LA auf einem in der Ausgangslage berührenden Kreisbogen geführt wird, während sein Ende B durch einen zweiten Arm MB auf der anderen Seite ebenfalls auf einem Kreisbogen geführt wird, dann werden sich bei gleichen Armlängen die seitlichen Abweichungen für den Mittelpunkt C von AB weitgehend kompensieren, sodaß eine angenäherte Geradführung dieses Punktes zu erwarten ist. Der Umstand, daß der gewünschte Zweck durch das denkbar einfachste Getriebe erzielt wird, nämlich durch ein sogenanntes *Gelenkviereck*, läßt diese Lösung besonders bestechend erscheinen.

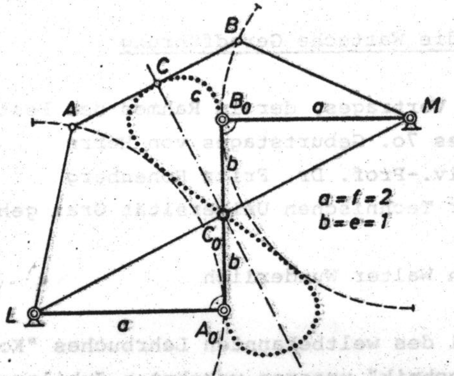

Fig. 1

In der Tat war WATT auf dieses Detail seiner Maschine stolzer, als auf die Dampfmaschine selbst.[3].

Genauere Analyse lehrt nun, daß der Koppelpunkt C keineswegs exakt auf einer Geraden wandert, sondern auf einer sogenannten *Koppelkurve*, nämlich einer algebraischen Kurve 6. Ordnung in Gestalt einer Achterschleife, die an ihrer Kreuzungsstelle einen Wendepunkt höherer Ordnung aufweist, wo sich ein Zweig besonders eng an die ideale Gerade anschmiegt (Fig. 1). Sämtliche sechs Schnittpunkte dieser Geraden mit der Koppelkurve sind an jener Stelle zusammengerückt; fünf rühren von dem berührenden Kurvenzweig her, der sechste vom anderen.

Damit ist zu erkennen, daß die vorliegende Lösung unter das *lokale Approximationsprinzip* der deutschen, von L. BURMESTER (1840 - 1927) begründeten Kinematikerschule einzuordnen ist, die sich bemüht, eine gewünschte Bahn an einer einzigen Stelle möglichst gut anzunähern . In manchmal schroffem Gegensatz dazu steht die russische, von P. L. TSCHEBYSCHEW (1821 - 1894) inaugurierte Schule, die ein *globales Approximationsprinzip* verficht, indem sie trachtet, die gewünschte Bahn in einem ganzen Abschnitt bestmöglichst anzunähern . Optimale Verhältnisse herrschen

dann, wenn die als noch zulässig erklärte Maximalabweichung in dem betreffenden Abschnitt so oft wie möglich angenommen wird; dies bedingt einen gewissen wellenförmigen Verlauf der Näherungskurve, der jedoch praktisch kaum zu bemerken ist.

Im gegenständlichen Fall würde das verlangen, daß der flache Teil der Koppelkurve innerhalb eines schmalen Streifens bleibt, dessen parallele Ränder er -- mit Hinblick auf die Ordnung 6 -- an je zwei Stellen berührt und an je einer Stelle schneidet. Die Entfernung ℓ dieser Schnittpunkte kennzeichnet dann den Geltungsbereich der Näherung, die Breite $2h$ des Streifens die Güte. Verlangt man etwa, daß auf einer Länge von ℓ = 100 mm nur eine Abweichung von höchstens $\pm h = \pm$ 0,05 mm auftritt, dann wird die Näherung unter Umständen befriedigen können.

Eine derartige angenäherte Geradführung vom WATTschen Typ suchten in jüngerer Zeit die Autoren R. WALTHER und G. WAGENZINK [4] zum Zwecke der Werkzeugführung bei einer modernen Drehbank der keramischen Industrie. Sie fanden in der Tat eine brauchbare Lösung (Fig. 2), aber mangels Beachtung des TSCHEBYSCHEWschen Prinzips keineswegs die beste.

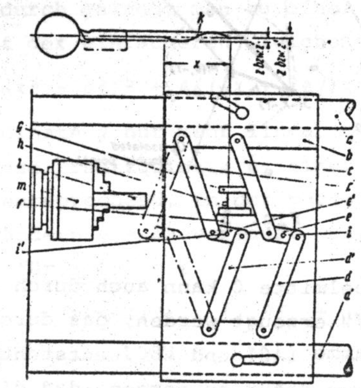

Bild 2. *Schematische Darstellung der Anordnung eines Lemniskatenlenkers als Werkzeugführung an einer Drehmaschine*

Fig. 2

Die Frage der *Optimierung* wurde deshalb vor zwei Jahren von dem Schweden A. FOLKESON [2] aufgegriffen, der unter Einsatz eines Computers die Lösung verbessern konnte. Seine rein numerische Methode erschien mir nun noch nicht ganz befriedigend, weil sie keine Formeln für eine systematische Getriebesynthese bereitstellte. Hier soll nun mein persönlicher Beitrag einsetzen [5].

Betrachten wir also eine beliebige *gleichschenkelige Doppelschwinge* $LABM$ mit der Schwingarmlänge $LA = MB = a$ und der Koppelstrecke $AB = 2b$, wobei an den in Fig. 1 vorgesehenen rechten Winkeln der Nullage nicht mehr festgehalten werden soll. Die Lagerpunkte L und M seien durch die kartesischen Normalkoordinaten $-e, f$ bzw. $e, -f$ festgelegt (Fig. 3).

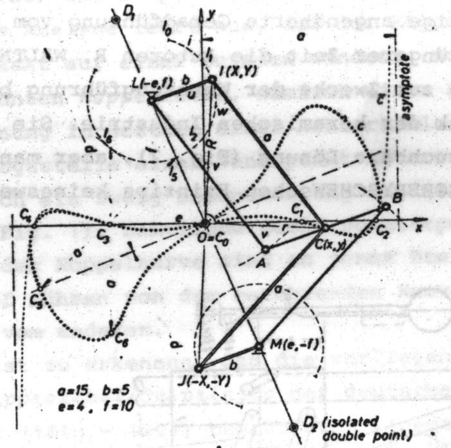

Fig. 3

Die Bahn c der Koppelmitte C kann auch durch ein *fünfgliedriges Ersatzgetriebe* $LICJM$ erzeugt werden, das durch Ergänzung der Gelenksparallelogramme $LACI$ und $MBCJ$ entsteht; eine Zusatzvorrichtung hätte nur dafür zu sorgen, daß die Schwingen LI und MJ dauernd parallel zueinander bleiben.

Der geometrische Übergang zwischen den Punkten $I(X,Y)$ und $C(x,y)$ wird nun durch eine bemerkenswerte *zweizweideutige Punktverwandtschaft* $\mathcal{W}: I \longleftrightarrow C$ vermittelt, die unter Heranziehung des Ursprungs O durch die beiden Forderungen $OI \perp OC$ und $IC = a$ erklärt ist, also analytisch durch

(1) $x = \lambda Y,\ y = -\lambda X$ mit $\lambda^2 = (a^2 - R^2)/R^2$ und $R^2 = X^2 + Y^2$

beschrieben wird. Diese involutorische (biquadratische) Transformation $\mathcal{W}$ liefert nicht nur eine elegante neuartige Konstruktion der Koppelkurve c , sondern gestattet über (1) auch eine bequeme Berechnung ihrer Punkte. Die Anwendung von $\mathcal{W}$ auf den Bahnkreis i von I,

(2) $\qquad i \ldots\ (X + e)^2 + (Y - f)^2 = b^2,$

führt auf die Gleichung der *Koppelsextik* c in der Gestalt

(3) $c \ldots\ (x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - d^2)^2 + 4(fx + ey)^2(x^2 + y^2 - a^2) = 0$

mit $d^2 = a^2 - b^2 + e^2 + f^2$.

Die Durchführung des TSCHEBYSCHEW-Prinzips zwecks otpimaler Approximation der x-Achse ist im Hinblick auf die komplizierte Form der Gleichung (3) hoffnungslos. Mit Rücksicht darauf aber, daß bloß der flache Teil der Koppelkurve c Verwendung findet, bietet sich ein Ausweg in der Weise, daß man die höheren Potenzen von y in (3) vernachlässigt. Hierdurch gelangt man zu einer *Ersatzkurve* $\tilde{c}$ 5. Ordnung mit der einfacheren Gleichung

(4) $\qquad \tilde{c} \ldots\ x(x^2 - d^2)^2 + 4f(fx + 2ey)(x^2 - a^2) = 0,$

welche die Ordinate y nur mehr linear enthält.

Damit diese Ersatzquintik $\tilde{c}$, einer zugelassenen Maximalabweichung h entsprechend, in der verlangten Weise zwischen den Streifenrändern $y = \pm h$ verläuft (Fig. 4), muß die Gleichung (4) für $y = h$ mit

(5) $\qquad (x - t)(x - t_1)^2(x + t_2)^2 = 0$

übereinstimmen, oder mit

(6) $\qquad (x - t)(x^2 + px - q)^2 = 0$, wobei $p = t_2 - t_1,\ q = t_1 t_2$.

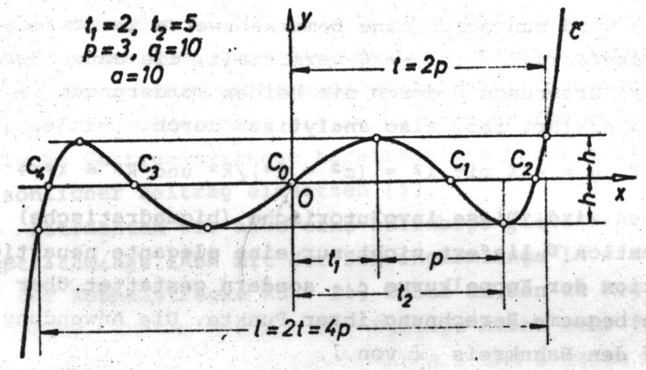

Fig. 4

Koeffizientenvergleich zwischen (4) und (6) liefert hierzu die *Bedingungen*

(7) $t = 2p,\ 2d^2 - 4f^2 = 3p^2 + 2q,\ 4efh = p(q - p^2),$
$d^4 - 4a^2f^2 = q(4p^2 + q),\ 4a^2efh = pq^2.$

Nimmt man also etwa die Werte von p, q und h an (durchwegs positiv), so erhält man die zur Getriebesynthese brauchbaren *Abmessungsformeln:*

$$a^2 = \frac{q^2}{q - p^2},$$

(8) $$d^2 = \frac{q^2 + p(2p^2 - q)\sqrt{q}}{q - p^2},\quad f^2 = \frac{1}{4}(2d^2 - 3p^2 - 2q),$$

$$e = \frac{p(q - p^2)}{4fh},\quad b^2 = a^2 - d^2 + e^2 + f^2.$$

Solcherart gewonnene WATTsche Mechanismen stellen bei kleinem h ausgezeichnete Geradführungen über eine *Länge* $\ell = 2t = 4p$ dar, wie numerische Beispiele bestätigen.

Bei der Aufgabe von WALTHER-WAGENZINK [4] etwa war die Länge ℓ = 1oo (mm) vorgeschrieben, was sofort p = 25 gibt. Nimmt man statt q lieber die vorgesehene Armlänge a = 15o an, so erhält man durch Auflösung einer quadratischen Gleichung q = 643,398. Weiterhin folgt -- noch ohne über die zulässige Abweichung h zu verfügen -- d = 2o8,345 und f = 144,615.

Wählt man nun, wie es die Autoren tun, die Koppellänge mit $2b$ = 6o, so ergibt sich e = 29,9o5 und als zugehörige Abweichung h = o,o27; dies ist ein beträchtlich kleinerer Wert als die von den Autoren erreichte Abweichung h = o,o77. Ihrer Lösung lag offenbar die von R. BRICARD [1] empfohlene, eine Mittelstellung zwischen lokalem und globalem Approximationsprinzip einnehmende Vorschrift der "longue inflexion" zu Grunde, welche verlangt, daß die Koppelkurve c im Ursprung die x-Achse zur Wendetangente hat. Die Bedingung hierfür lautet $d^2 = 2af$, wobei die Länge ℓ der Geradführung (unabhängig von den übrigen Daten) durch $\ell^2 = 16f(a - f)$ bestimmt ist.

Einen anschaulichen Vergleich der nicht optimierten Lösung aus [4] nach BRICARD und der "fast optimierten" gemäß (8) erlaubt das 2oo-fach überhöhte *Schaubild* in Fig. 5,

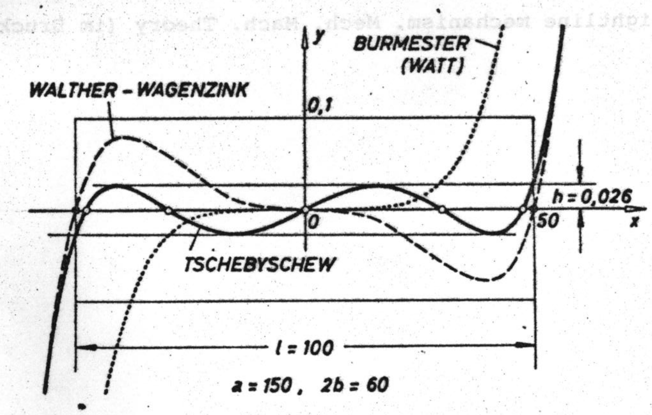

Fig. 5

in welches auch die klassische, für a = 1oo und b = 3o adaptierte Lösung nach BURMESTER eingetragen wurde. Die unterschiedliche Qualität der gleichartigen Mechanismen mit denselben Gliedlängen ist ausschließlich durch die verschiedene Position der Lagerpunkte L und M bedingt, für deren Koordinatenbeträge von vornherein $e \approx f$ ubd $f \approx a$ gilt.

Literatur

[1] R. BRICARD: Leçons de cinématique, II (Paris, 1929); 168ff.

[2] A. FOLKESON: A minicomputer program for optimal design of Watt's four-bar mechanism. Mech. Mach. Theory (im Druck).

[3] F. REULEAUX: Lehrbuch der Kinematik, I (Braunschweig, 1875); 6f.

[4] R. WALTHER - G. WAGENZINK: Anwendung einer Viergelenkkette für eine Werkzeuggeradführung. Maschinenbautechnik 9 (196o), 691 - 693.

[5] W. WUNDERLICH: Approximate optimization of Watt's straightline mechanism. Mech. Mach. Theory (im Druck).