Österreichische Akademie der Wissenschaften

Sitzung der mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse vom 22. Juni 1978

Sonderabdruck aus dem Anzeiger der math.-naturw. Klasse der Österreichischen Akademie der Wissenschaften, Jahrgang 1978, Nr. 6

(Seite 150 bis 152)

Das wirkl. Mitglied Walter Wunderlich übersendet eine von ihm selbst verfaßte kurze Mitteilung:

„Darstellend-geometrischer Beweis eines merkwürdigen Schließungssatzes."

1. Sei $A_1B_1A_2B_2\ldots A_nB_n$ ein geschlossenes Polygon, dessen Ecken abwechselnd auf zwei Kreisen k und l liegen und dessen Seiten durchwegs die gleiche Länge s besitzen. Unter der Voraussetzung, daß keine Ecken zusammenfallen, besteht dann der merkwürdige Sachverhalt, daß es noch unendlich viele weitere $2n$-Ecke dieser Art gibt, die eine stetige Schar bilden. Mit anderen Worten heißt das, daß sich ein solches Polygon stets nach der gleichen Anzahl von Schritten schließt, wenn man an einer beliebigen Stelle A_1 auf dem Kreis k beginnt und mit der vorgeschriebenen Seitenlänge s fortschreitet, immer abwechselnd auf den beiden Kreisen aufsetzend. Oder noch anders ausgedrückt: Werden die Polygonseiten durch starre, gelenkig verbundene Stäbe materialisiert, so gestattet das Vieleck eine stetige, zwangläufige Bewegung, bei welcher die Ecken auf den genannten Kreisen wandern.

Für komplanare Kreise k, l wurde dieser Satz — der bei konzentrischer Anordnung trivial wäre — 1965 von O. Bottema bewiesen [2]. Das Erstaunliche ist aber, daß der Satz auch für Kreise beliebiger Lage im Raum gilt. Dies wurde 1974 im Zusammenhang mit Untersuchungen über Kugellager von W. L. Black zusammen mit H. C. und B. Howland erkannt [1][1]. Von

[1] Bringt man um alle A_i Kugeln vom Radius r und um alle B_i Kugeln vom Radius $s-r$ an, so wird jede Kugel der einen Reihe von zwei Nachbarkugeln der anderen Reihe berührt. Zur Ausbildung eines entsprechenden zweireihigen Kugellagers dürfen einander natürlich die Kugeln einer Reihe nicht gegenseitig behindern.

ihrem Beweis, der eine Eindeutigkeitsaussage über die Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung 1. Ordnung benützt, waren die Autoren selbst nicht befriedigt, weil sie ganz richtig vermuteten, daß es sich bei dem besagten Schließungsphänomen im Grunde um eine algebraische Angelegenheit handelt. Diesem Mangel hat nun F. Hohenberg in einer jüngst erschienenen inhaltsreichen Abhandlung [4] abgeholfen, in welcher er das Chaslessche Korrespondenzprinzip einsetzt und gleichzeitig eine unnötige Einschränkung ausschaltet; sein Beweis hält überdies in Räumen beliebig hoher Dimension.

In der vorliegenden Note soll nun ein einfacher, für den darstellenden Geometer recht durchsichtiger Beweis mitgeteilt werden, der den in Rede stehenden Satz auf das berühmte Schließungstheorem von J. V. Poncelet (1822) zurückführt, welches bekanntlich besagt: „Ist ein ebenes geschlossenes Polygon einem Kegelschnitt eingeschrieben und einem anderen Kegelschnitt umgeschrieben, so gibt es für dasselbe Kegelschnittspaar noch unendlich viele weitere Polygone dieser Art, die eine stetige Schar bilden“ [5]. Für dieses Theorem existieren zahlreiche Beweise, darunter elementare und solche, die sich auch auf das Chaslessche Korrespondenzprinzip stützen [3]. Bottema gründet übrigens seinen Beweis ebenfalls auf den Satz von Poncelet, im Gegensatz dazu kommen aber die nachstehenden Überlegungen ohne Rechnung aus.

2. Seien also k und l zwei Kreise beliebiger Größe und Raumlage. Schlägt man um einen veränderlichen Punkt B von l die Kugel σ mit dem Radius s, so schneidet sie den Kreis k in zwei Punkten A und $\overline{A}$. Durch diese Punkte geht auch der Schnittkreis c von σ mit einer beliebigen festen Kugel Σ, welche k enthält. Wählt man insbesondere jene Kugel Σ, die ihre Mitte in der Ebene β von l hat, dann ist der Hilfskreis c orthogonal zu β.[2] Bezeichnet ferner Γ den Hülltorus aller Kugeln σ, dann kann man sagen, daß der Kreis c die zu β symmetrische Durchdringungskurve q von Γ und Σ in zwei zu β spiegelbildlichen Punkten berührt. Im Normalriß auf β wird daher die Bildstrecke c' von c die Bildkurve q' von q berühren. Nun ist aber q eine Raumkurve 4. Ordnung I. Art, weil sich vom Gesamtschnitt 8. Ordnung $\Gamma \cap \Sigma$ der absolute Kegelschnitt (als Doppellinie von Γ) zweifach zählend abspaltet; q' ist also im allgemeinen ein doppelt

[2] Der Fall rechtwinkeliger Trägerebenen α und β von k und l bedarf einer geringfügigen Modifikation.

überdeckter Kegelschnitt (der in ein Geradenpaar zerfällt, wenn Σ die eigentlichen Knotenpunkte von Γ enthält)[3]. Die Ebene γ von c ist also Tangentialebene des zu β normalen Projektionszylinders 2. Ordnung Θ mit der Basis q'. In der Ebene α von k wird daher die Spur $A\overline{A}$ von γ den Spurkegelschnitt h des Zylinders Θ berühren.

Mit der Annahme des veränderlichen Punktes B in einer Ecke B_i des gleichseitigen Polygons $A_1B_1 \ldots A_nB_n$ ergibt sich $A\overline{A} = A_iA_{i+1}$ und man erkennt: Das Sehnenpolygon $A_1A_2 \ldots A_n$ des $2n$-Ecks $A_1B_1 \ldots A_nB_n$ ist ein Ponceletsches Vieleck, weil es dem Kreis k eingeschrieben und dem Kegelschnitt h umgeschrieben ist. Damit ist der angekündigte Zusammenhang hergestellt. Die Schließungseigenschaft des einen Polygons überträgt sich naturgemäß auf jene des anderen.

Aus bekannten Eigenschaften Ponceletscher Vielecke folgt u. a.: Auch die Sehnen A_iA_j mit $j - i = \text{const}$ berühren einen Kegelschnitt, der beim stetigen Durchlaufen der Schar von ihnen eingehüllt wird; er gehört übrigens dem von k und h aufgespannten Büschel an [3]. Bei geradem n gilt speziell für $f - i = n/2$: Alle „Hauptsehnen“ $A_iA_{i+n/2}$ gehen durch einen jesten Punkt. Gleichartige Aussagen bestehen natürlich auch ür das Polygon $B_1B_2 \ldots B_n$.

[3] q' besitzt im übrigen den Mittelpunkt von l als Brennpunkt, weil das von ihm ausgehende Minimalgeradenpaar als Umriß dse Torus Γ bei der benützten Normalprojektion auftritt.

Literatur

[1] Black, W. L., Howland, H. C., Howland, B.: A theorem about zig-zags between two circles. Amer. Math. Monthly *81* (1974), 754—757.

[2] Bottema, O.: Ein Schließungssatz für zwei Kreise. Elem. Math. *20* (1965), 1—7.

[3] Dingeldey, F.: Kegelschnitte und Kegelschnittsysteme. Enzykl. Math. Wiss. III C 1, 46 ff.

[4] Hohenberg, F.: Ein Schließungssatz über gleichseitige Polygone, deren Ecken abwechselnd auf zwei Kreisen liegen. Sitzungsber. d. Österr. Akad. d. Wiss., Wien *186* (1977), 281—300.

[5] Poncelet, J. V.: Traité des propriétés projectives des figures, 1 (Paris, 2. Aufl. 1865).

Österreichische Staatsdruckerei. L61 42508