Österreichische Akademie der Wissenschaften

Sitzung der mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse vom 30. November 1978

Sonderabdruck aus dem Anzeiger der math.-naturw. Klasse der Österreichischen Akademie der Wissenschaften, Jahrgang 1978, Nr. 9

(Seite 219 bis 222)

Das wirkl. Mitglied Walter Wunderlich übersendet eine von ihm selbst verfaßte kurze Mitteilung:

„Kurzer Beweis eines Satzes aus der Kinematik ähnlich-veränderlicher Felder."

1. Wandern in der Ebene zwei Punkte A, B eines starren Feldes auf zwei Kreisen mit verschiedenen Mittelpunkten L, M, dann durchläuft jeder weitere Punkt Z eine *Koppelkurve*. Diese trizirkulare Kurve 6. Ordnung ist auf Grund ihres Formenreichtums von hoher Bedeutung für die Getriebetechnik, weil sie durch den einfachsten Mechanismus erzeugbar ist, nämlich durch ein *Gelenkviereck* $LABM$, das in L und M gelagert ist und den mit der Koppel AB fest verbundenen Punkt Z zwangläufig an der genannten Bahnkurve entlangführt. Ein berühmter Satz von S. Roberts besagt überdies, daß ein und dieselbe Koppelkurve noch durch zwei weitere Gelenkvierecke erzeugt werden kann, was dem Konstrukteur eine willkommene Auswahlmöglichkeit zwischen drei Getrieben bietet [5]; der dritte dabei auftretende Lagerpunkt N ist durch $LMN \sim ABZ$ bestimmt.

Macht man die Ebene zu einer Gaußschen Bildebene für die komplexe Koordinatenkombination $z = x + iy$, so läßt sich die Koppelkurve einfach durch

$$z = u + \alpha v \tag{1}$$

beschreiben, wobei L im Nullpunkt liegt, z die komplexe Koordinate von Z bedeutet und die komplexen Variablen u, v die Vektoren LA bzw. AB kennzeichnen. Die komplexe Konstante α legt die Gestalt des Koppeldreiecks ABZ fest, indem sie die

Drehstreckung $AB \longrightarrow AZ$ durch den Streckfaktor $|\alpha| = \overline{AZ}/\overline{AB}$ und den Drehwinkel $\arg\alpha = \sphericalangle BAZ$ bestimmt.

Unter Heranziehung der komplexen Größen w und m, welche die Vektoren BM bzw. LM kennzeichnen, folgt der durch das bewegliche Gelenkviereck bedingte

Hilfssatz: *Sind u, v, w drei komplexe Veränderliche mit festen Beträgen und konstanter Summe $u+v+w=m\neq 0$, dann beschreibt jede Linearkombination $z=u+\alpha v$ mit $\alpha\neq 0,1$ eine Koppelkurve.*

Gestützt auf diesen Hilfssatz läßt sich nicht nur die dreifache Erzeugung der Koppelkurve in knappster Form beweisen, sondern etwa auch zeigen, daß der Gesamtschwerpunkt eines Gelenkvierecks ebenfalls eine Koppelkurve durchläuft [4].

2. R. Müller hat seinerzeit ein bemerkenswertes Seitenstück zum einleitenden Satz dieser Note mitgeteilt [2]:

Satz von R. Müller: *Wandern in der Ebene drei Punkte A, B, C eines ähnlich-veränderlichen Feldes auf drei Kreisen mit verschiedenen Mittelpunkten L, M, N, dann durchläuft jeder weitere Punkt Z des Feldes eine Koppelkurve.*

Für diesen Satz, mit welchem sich auch noch R. Skutsch [3] und R. Mehmke [1] befaßt haben, läßt sich nun über den obigen Hilfssatz ein äußerst kurzer Beweis führen.

L sei wieder der Nullpunkt der Gaußschen Zahlenebene, während M und N durch die komplexen Konstanten $m\neq 0$ bzw. $n\neq 0$, m gegeben seien; den Radiusvektoren LA, MB, NC seien die komplexen Veränderlichen u, v, w (mit festen Beträgen) zugeordnet. Bedeutet ferner α den zur Drehstreckung $AB \longrightarrow AC$ gehörigen komplexen Faktor, dann gelten also die Bedingungen

$$(2)\qquad |u|=a,\ |v|=b,\ |w|=c;\ n+w-u=\alpha(m+v-u).$$

Der Ortsvektor LZ wird dargestellt durch

$$(3)\qquad z=u+\beta(m+v-u)=\beta m+(1-\beta)\,u+\beta v,$$

wobei β die Drehstreckung $AB \longrightarrow AZ$ kennzeichnet. Um diese Darstellung der Bahn von Z auf die Gestalt (1) zu bringen, genügt es offenbar

$$(4)\qquad \beta v=u',\ \ \frac{\beta}{\alpha}(1-\alpha)u=v',\ \ -\frac{\beta}{\alpha}w=w'$$

zu setzen. So erhält man

$$(5)\qquad z=\beta m+u'+\alpha' v' \ \text{ mit } \ \alpha'=\frac{1-\beta}{1-\alpha}\cdot\frac{\alpha}{\beta}.$$

Wegen (2), $\alpha\neq 0,1$ und $\beta\neq 0,1,\alpha$ sind für die gestrichenen Größen die Voraussetzungen des Hilfssatzes erfüllt, denn u', v', w' haben zufolge (4) feste Beträge und die konstante Summe

$$(6)\qquad u'+v'+w'=m'=\frac{\beta}{\alpha}(n-\alpha m).$$

Die Bahn von Z ist demnach auf Grund ihrer Darstellung (5) in der Tat eine *Koppelkurve*, vorausgesetzt daß $n\neq\alpha m$.

Das diese Koppelkurve erzeugende Gelenkviereck $L'A'B'M'$ hat seine Lagerpunkte in L' (βm) und M' $(\beta m+m'=\beta n/\alpha)$, die Armlängen $|u'|=|\beta|.b$ und $|w'|=|\beta/\alpha|.c$ und die Koppellänge $|v'|=|(1-\alpha)\,\beta/\alpha\,|.a$; die Gestalt des Koppeldreiecks $A'B'Z$ ist durch den aus (5) zu entnehmenden Faktor α' der Drehstreckung $A'B' \longrightarrow A'Z$ bestimmt.

3. In dem bisher anscheinend nicht beachteten *Ausnahmefall* $n=\alpha m$, der für $ABC\sim LMN$ eintritt, vereinigen sich die Lager L' und M'. Das Gelenkviereck $L'A'B'M'$ reduziert sich dadurch auf ein starres *Dreieck* $L'A'B'$, das eine reine Drehung um L' ausführt, wobei der mitgenommene Punkt Z einen *Kreis* beschreibt (falls er nicht in L' fest bleibt).

Unter der Annahme $n=\alpha m$ vereinfacht sich die Bedingung (2, rechts) zu

$$(7)\qquad w-u=\alpha\,(v-u).$$

Geometrisch bedeutet dies, daß das von den im Ursprung L angebrachten Vektoren u, v, w aufgespannte (eventuell ausgeartete) Dreieck stets ähnlich zu LMN ist. Wegen der Konstanz der Beträge von u, v, w (2, links) bewahrt es sogar seine Größe und führt während der Bewegung eine bloße Drehung um L aus. Es wird daher eine Relation

$$(8)\qquad v/u=\gamma=\text{const} \ \text{ mit } \ |\gamma|=b/a$$

bestehen. Zum analytischen Nachweis multipliziere man die zu (7) äquivalente Beziehung $w=(1-\alpha)\,u+\alpha\,v$ mit der konjugierten. Mit Beachtung von (2) erhält man so für $\gamma = v/u$ und $\bar{\gamma}$ die lineare Gleichung

$$(9)\quad c^2 = (1-\alpha)(1-\bar{\alpha})\,a^2 + \alpha\bar{\alpha}\,b^2 + \alpha(1-\bar{\alpha})\,a^2\gamma + (1-\alpha)\,\bar{\alpha}a^2\bar{\gamma},$$

die zusammen mit $\gamma\bar{\gamma} = b^2/a^2$ den Quotienten γ als Konstante zu bestimmen gestattet.

Die Bahngleichung (3) von Z vereinfacht sich nun mit (8) zu

$$(10)\quad z = \beta\, m + (1 - \beta + \beta\gamma)\, u,$$

womit die Bahn als *Kreis* zu erkennen ist, sofern nicht $\beta = 1/(1-\gamma)$. Für diesen ausgezeichneten Systempunkt reduziert sich (10) auf $z = \beta\, m = \text{const}$, was ihn als *Fixpunkt* ausweist. Er existiert nicht für $\gamma = 1$, was wegen $v = u$ nur bei der Koppelbewegung eines Parallelogramms auftritt; diese triviale Annahme, die sich nicht auf ein ähnlich-veränderliches, sondern auf ein starres System bezieht, darf eigentlich ausgeschaltet werden.

Jedenfalls ist aber der Satz von Müller in seiner bisherigen Fassung nicht uneingeschränkt haltbar, sondern bedarf einer Ergänzung durch den

Zusatz: …, *sofern nicht $ABC \sim LMN$. In diesem Fall beschreiben nämlich alle weiteren Punkte — mit Ausnahme eines festbleibenden — Kreise, und zwar mit gleichen Winkelgeschwindigkeiten. Für $ABC \cong LMN$ liegt die Koppelbewegung eines Gelenkparallelogramms vor, und der Fixpunkt fehlt.*

Literatur

[1] Mehmke, R.: *Analytischer Beweis des Satzes von Herrn Reinhold Müller über die Erzeugung der Koppelkurve durch ein ähnlich-veränderliches System.* Z. Math. Phys. *58* (1910), 257—259.

[2] Müller, R.: *Erzeugung der Koppelkurve durch ähnlich-veränderliche Systeme.* Z. Math. Phys. *58* (1910), 247—251.

[3] Skutsch, R.: *Über die von Herrn Reinhold Müller untersuchte besondere Bewegung eines ähnlich veränderlichen Systems.* Z. Math. Phys. *58* (1910), 252—257.

[4] Wunderlich, W.: *Kinematik in der Ebene der komplexen Zahlen.* Publ. Inst. Math. Acad. Serbe Sci. *12* (1958), 11—18.

[5] Wunderlich, W.: *Ebene Kinematik.* Hochschul-Taschenb. *447* (Mannheim 1970).

Österreichische Staatsdruckerei. L61 14349