

WINDSCHIEFE GELENKSECHSECKE MIT SCHNEIDENDEN DIAGONALEN

ZUSAMMENFASSUNG

Ein geschlossenes räumliches Sechseck, dessen drei Diagonalen einen Punkt gemeinsam haben, ist im allgemeinen durch die Längen seiner Seiten und Diagonalen der Gestalt nach bestimmt, wenn auch nicht unbedingt eindeutig. Ein entsprechendes Stabmodell wird daher für gewöhnlich starr sein, selbst wenn die Knoten gelenkig ausgeführt sind. Die Ermittlung der Gestalt läßt sich nach Einführung geeigneter Parameter auf den Schnitt von drei kubischen Zylindern zurückführen und erweist sich als Problem 25. Grades. Für besondere Abmessungen kann das Stabwerk jedoch beweglich ausfallen, und zwar entweder infinitesimal (wackelig, beispielsweise bei orthogonalem Diagonalentripel), oder sogar in endlichem Ausmaß stetig, z. B. bei paarweise gleichen Gegenseiten und gleichen Diagonalen. Bilden die drei Diagonalen in der Ausgangslage Raumdiagonalen eines Würfels, dann können die Kugelgelenke in den Knoten durch Zylindergelenke ersetzt werden.

1. EINLEITUNG

Sei $A_1B_2A_3B_1A_2B_3$ ein räumliches Sechseck mit der Länge nach bekannten Seiten $A_iB_{i+1} = a_i$, $B_iA_{i+1} = b_i$ und Diagonalen $A_iB_i = c_i$ ($i = 1, 2, 3$, mit allfälliger Reduktion modulo 3). Werden die Seiten und Diagonalen als starre Stäbe ausgebildet und durch sphärische Gelenke in den Knoten verbunden, so entsteht ein Mechanismus vom Freiheitsgrad 3: Bei den $6 \cdot 3 = 18$ Knotenkoordinaten kann nämlich über sechs verfügt werden, indem man etwa A_1 im Ursprung, B_1 auf der x -Achse und A_2 in der xy -Ebene eines kartesischen Normalkoordinatensystems annimmt. Die restlichen 12 Koordinaten unterliegen dann, den gegebenen Abmessungen entsprechend, bloß 9 Bedingungen, sodaß eine dreiparametrische Lösungsmannigfaltigkeit auftritt.

Verlangt man zusätzlich, daß die drei Diagonalen stets einen Punkt O gemeinsam haben sollen, so treten drei weitere Bedingungen hinzu — etwa das Verschwinden der drei Tetraederinhalte $A_iB_iA_{i+1}B_{i+1}$ ausdrückend —, und der Freiheitsgrad reduziert sich auf null: Ein solches Stabwerk wird im allgemeinen *starr* sein. Für spezielle Abmessungen kann aber der besondere Fall eintreten, daß das Stabwerk ausnahmsweise *beweglich* ausfällt, und zwar in endlichem Ausmaß stetig oder wenigstens infinitesimal (»wackelige«). Der Feststellung derartiger Sonder-

fälle ist die vorliegende Untersuchung hauptsächlich gewidmet; eine vollständige Klärung dieser schwierigen Frage konnte allerdings noch nicht erzielt werden.

Die technische Realisierung solcher Mechanismen wäre wegen der Kugel- oder Kardangelenke in den Knoten sowie der Schließe beim Diagonalschnittpunkt O zweifellos sehr schwierig, doch lassen sich primitive Studienmodelle aus Plastik-Trinkhalmen leicht improvisieren, indem man diese mittels durchgezogener Fäden verknüpft und die drei Diagonalen bei O durch eine lockere Schleife oder einen Ring verbindet.

Jede Seite eines Sechsecks der geschilderten Art trifft nicht nur die beiden Nachbarseiten, sondern — bei hinreichender Verlängerung — auch die Gegenseite, weil sie mit dieser in einer von zwei Diagonalen aufgespannten Ebene liegt (Abb. 1). Hieraus folgt, daß das Seitentripel a_1, a_2, a_3 einem *Regulus* angehört, und ebenso das Tripel b_1, b_2, b_3 dem ergänzenden *Regulus*. Das Sechseck verläuft demnach zur Gänze auf einer *Quadrik*.

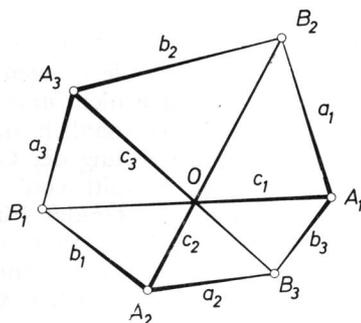


Abb. 1

Sucht man auf jeder Diagonale zum Schnittpunkt O den bezüglich der Enden A_i und B_i harmonischen Punkt C_i auf, und wirft man anschließend die Ebene $C_1C_2C_3$ durch eine Raumkollineation ins Unendliche, so erhält man ein transformiertes Sechseck mit parallelen Gegenseiten, dessen Diagonalen einander halbieren. Es bildet mithin einen geschlossenen, zentrisch-symmetrischen Kantenzug auf einem Parallelepipet. Wird dieses schließlich durch eine Affinität in einen Würfel verwandelt, so gelangt man zu einer *regulären Normalform*, bestehend aus einem gleichseitigen Sechseck mit lauter rechten Winkeln, welches die Endpunkte von drei Würfeldiagonalen verbindet. An diesem Würfel-Prototyp lassen sich sämtliche *projektiven Automorphien* des ursprünglichen Sechsecks bequem erkennen, also jene Kollineationen, welche es in sich überführen. Es sind dies: Eine involutorische Zentralkollineation $A_i \leftrightarrow B_i$ (Zentrum O , Fixebene $C_1C_2C_3$); drei weitere involutorische Zentralkollineationen vom Muster A_1, B_1 fest, $A_2 \leftrightarrow A_3, B_2 \leftrightarrow B_3$; drei involutorische Achsenkollineationen vom Muster $A_1 \leftrightarrow B_1, A_2 \leftrightarrow B_3, A_3 \leftrightarrow B_2$; und schließlich (abgesehen von der Identität) zwei Kollineationen der von $A_i \rightarrow A_{i+1}, B_i \rightarrow B_{i+1}$ erzeugten zyklischen Gruppe 3. Ordnung.

Satz 1. Die windschiefen Sechsecke mit schneidenden Diagonalen sind untereinander kollinear und gestatten je neun automorphe Kollineationen. Jedes solche Sechseck gehört einer *Quadrik* an.

2. GRUNDGLEICHUNGEN

Werden die Knoten A_1, A_2, A_3 durch die von O ausgehenden Ortsvektoren $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ festgelegt, so können die Ortsvektoren für B_1, B_2, B_3 durch $\mathbf{y}_1 = -\lambda\mathbf{x}_1$, $\mathbf{y}_2 = -\mu\mathbf{x}_2$, $\mathbf{y}_3 = -\nu\mathbf{x}_3$ angesetzt werden. Vermöge der gegebenen Abmessungen (vgl. Abb. 1) bestehen dann die Beziehungen

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}_1 + \mu\mathbf{x}_2)^2 &= a_1^2, & (\mathbf{x}_2 + \nu\mathbf{x}_3)^2 &= a_2^2, & (\mathbf{x}_3 + \lambda\mathbf{x}_1)^2 &= a_3^2; \\ (\mathbf{x}_2 + \lambda\mathbf{x}_1)^2 &= b_1^2, & (\mathbf{x}_3 + \mu\mathbf{x}_2)^2 &= b_2^2, & (\mathbf{x}_1 + \nu\mathbf{x}_3)^2 &= b_3^2; \\ (1 + \lambda)^2 \mathbf{x}_1^2 &= c_1^2, & (1 + \mu)^2 \mathbf{x}_2^2 &= c_2^2, & (1 + \nu)^2 \mathbf{x}_3^2 &= c_3^2. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Dies sind neun Gleichungen, aus welchen sich die drei Faktoren λ, μ, ν und die sechs Skalarprodukte $\mathbf{x}_i \mathbf{x}_k$ ermitteln lassen. Letztere legen für $i = k$ die Beträge der Vektoren \mathbf{x}_i sowie für $i \neq k$ die Winkel fest, welche sie miteinander einschließen. Damit ist die Form des Sechsecks bestimmt, während die Lage im Raum noch frei bleibt.

Schafft man nach Ausquadrieren der Binome in den ersten sechs Gleichungen die gemischten Skalarprodukte weg und drückt man die skalaren Quadrate durch die Formeln der letzten Zeile aus, so erhält man die nachstehenden Bestimmungsgleichungen für λ, μ, ν :

$$\begin{aligned} \frac{\lambda c_1^2}{(1 + \lambda)^2} - \frac{\mu c_2^2}{(1 + \mu)^2} &= \frac{\lambda a_1^2 - \mu b_1^2}{1 - \lambda\mu}, \\ \frac{\mu c_2^2}{(1 + \mu)^2} - \frac{\nu c_3^2}{(1 + \nu)^2} &= \frac{\mu a_2^2 - \nu b_2^2}{1 - \mu\nu}, \\ \frac{\nu c_3^2}{(1 + \nu)^2} - \frac{\lambda c_1^2}{(1 + \lambda)^2} &= \frac{\nu a_3^2 - \lambda a_3^2}{1 - \nu\lambda}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Durch Übergang zu den neuen Parametern

$$u = \lambda/(1 + \lambda), \quad v = \mu/(1 + \mu), \quad w = \nu/(1 + \nu) \quad (2.3)$$

gelangt man zu den »Grundgleichungen«

$$\begin{aligned} [c_1^2 u (1 - u) - c_2^2 v (1 - v)] (1 - u - v) &= a_1^2 u (1 - v) - b_1^2 v (1 - u), \\ [c_2^2 v (1 - v) - c_3^2 w (1 - w)] (1 - v - w) &= a_2^2 v (1 - w) - b_2^2 w (1 - v), \\ [c_3^2 w (1 - w) - c_1^2 u (1 - u)] (1 - w - u) &= a_3^2 w (1 - u) - b_3^2 u (1 - w). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Bei Deutung der Größen u, v, w als kartesische Koordinaten in einem Parameterraum beschreiben die Gleichungen (2.4) drei *kubische Zylinder* $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$, deren Erzeugenden jeweils die Richtung einer Koordinatenachse haben. Jedes Lösungstriplet (u, v, w) des Gleichungssystems stellt einen Schnittpunkt P der drei Zylinder dar. Da die Zylinder im allgemeinen keine gemeinsamen Fernpunkte besitzen, ist mit $3^3 = 27$ eigentlichen Schnittpunkten zu rechnen; von diesen sind aber zwei von vornherein bekannt, nämlich $(0, 0, 0)$ und $(1, 1, 1)$ die allerdings ohne Interesse sind. Es gilt mithin der die im allgemeinen bestehende Starrheit des Stabwerks bestätigende

Satz 2. Ein windschiefes Sechseck mit schneidenden Diagonalen ist durch die Längen der Seiten und der Diagonalen für gewöhnlich der Gestalt nach bestimmt, wenn auch nicht unbedingt eindeutig. Im allgemeinen ist die Ermittlung der Form ein Problem 25. Grades.

Auf weitgehend graphischem Wege könnte man nach geläufigen Regeln der darstellenden Geometrie die Durchdringungskurve 9. Ordnung zweier der kubischen Zylinder Γ_i ermitteln und ihren Normalriß auf die Basisebene des dritten aufsuchen. Diese Bildkurve von ebenfalls 9. Ordnung ist dann mit der dritten Basiskubik zu schneiden (Abb. 2a-c). Jedes so gefundene Tripel u, v, w legt dann gemäß (2.3) über λ, μ, ν mittelbar die Diagonalenabschnitte OA_i und OB_i fest, aus welchen sich mit Benützung der Seitenlängen sämtliche Teildreiecke $OA_i B_k$ des Stabwerks zusammensetzen lassen.¹ Die abschließende Zusammenfügung der

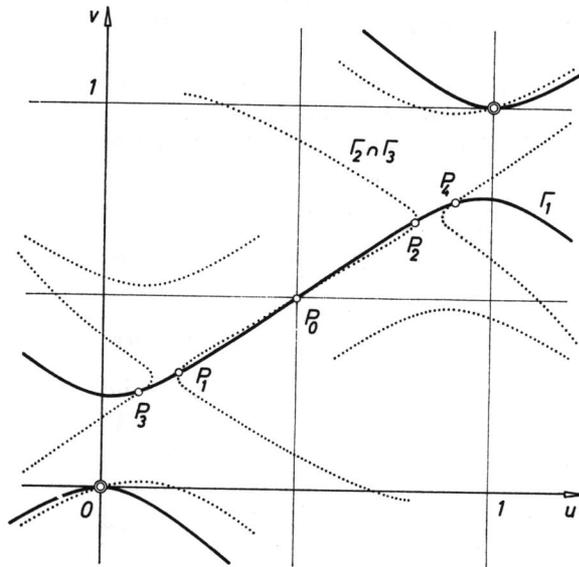


Abb. 2a

Dreiecke ist elementar zu vollziehen. — Die Zylinderbasen 3. Ordnung (2.4) sind für gewöhnlich vom Geschlecht 1. Zur Konstruktion der ersten etwa setze man entweder $v = tu$ oder $v = t - u$; zu gewähltem t ergibt sich dann u durch Auflösung einer quadratischen Gleichung. Geometrisch bedeutet dies die Erzeugung der Kubik durch ein Strahlbüschel und ein dazu projektives Kegelschnittsbüschel.

¹ Den Abbildungen 2a-c liegt die Annahme $a_1 = b_1 = 5$, $a_2 = b_2 = 3$, $a_3 = b_3 = 4$, $c_1 = 5$, $c_2 = 10\sqrt{3}/7 = 6.54654$ und $c_3 = 5\sqrt{2} = 7.07107$ zu Grunde. Hierzu gehören fünf (reelle und nichttriviale) Lösungen (u, v, w) , repräsentiert durch die Punkte $P_0(0.5, 0.5, 0.5)$, $P_1(0.2, 0.3, 0.4)$, $P_2(0.8, 0.7, 0.6)$, $P_3(0.098, 0.250, 0.404)$ und $P_4(0.902, 0.750, 0.596)$. Ihnen entsprechen fünf starre Formen des Stabwerks, von denen, bedingt durch die Annahme, die erste zentrisch-symmetrisch ist und die übrigen paarweise spiegelbildlich kongruent sind (vgl. Abschnitt 5)

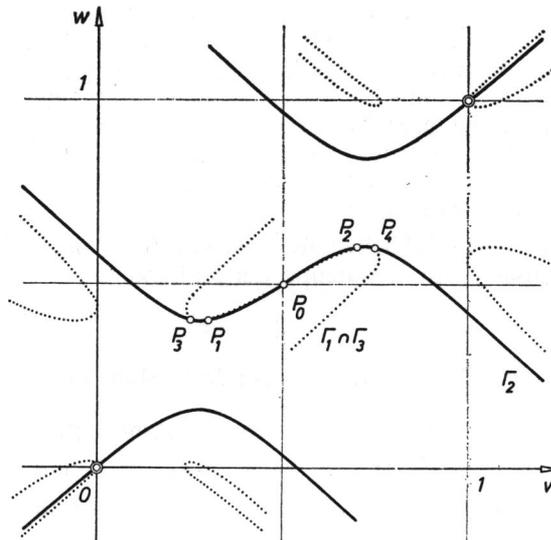


Abb. 2b

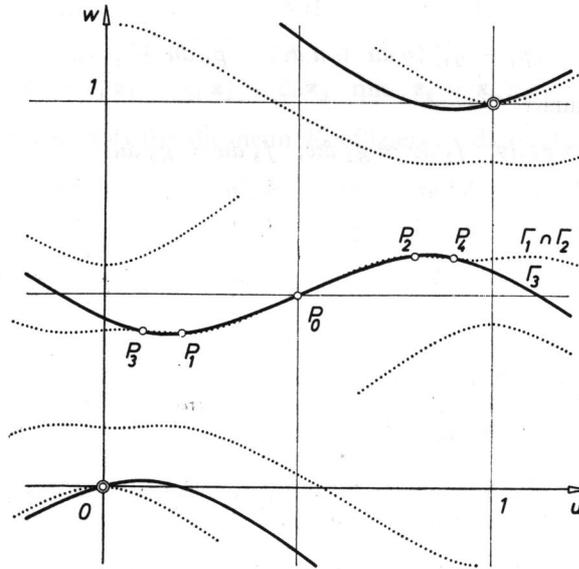


Abb. 2c

3. WACKELIGE STABWERKE

Haben die drei kubischen Zylinder Γ_i (2.4) zwei eng benachbarte Schnittpunkte gemeinsam, so besitzt das zugehörige Sechseck zwei wenig voneinander verschiedene Formen. Das betreffende Stabmodell gestattet dann auf Grund der Elastizität des Materials und des unvermeidlichen Spiels in den Gelenken einen sprunghaften Übergang zwischen zwei Positionen.

Rücken die beiden Lösungen ganz zusammen, dann entsteht ein *wackeliges Stabwerk* mit »infinitesimaler« Beweglichkeit, die jedoch am Modell deutlich merkbar sein wird. Jedem Punkt \mathbf{x} des Stabwerks kann dabei ein Geschwindigkeitsvektor $\dot{\mathbf{x}}$ zugeordnet werden, der unter Verwendung eines geeigneten Lageparameters t durch den üblichen Grenzübergang beim Zusammenrücken zweier Nachbarlagen zu erklären ist. Er stellt ein relatives Maß für die differentielle Verschiebung $d\mathbf{x} = \dot{\mathbf{x}} \cdot dt$ des betreffenden Punktes dar. Wesentlich ist natürlich die Übereinkunft über das feste Beobachtersystem.

In einem solchen Grenzfall haben die drei Zylinder Γ_i ein *Linielement* $(u, v, w; du : dv : dw)$ gemeinsam. Mit Benützung der Abkürzungen

$$c_i^2 - a_i^2 = p_i, \quad c_{i+1}^2 - b_i^2 = q_i \quad (3.1)$$

nehmen die Zylindergleichungen (2.4) folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned} (c_1^2 u^2 - c_2^2 v^2)(u + v - 2) &= (p_1 - q_1)uw - p_1 u + q_1 v, \\ (c_2^2 v^2 - c_3^2 w^2)(v + w - 2) &= (p_2 - q_2)vw - p_2 v + q_2 w, \\ (c_3^2 w^2 - c_1^2 u^2)(w + u - 2) &= (p_3 - q_3)wu - p_3 w + q_3 u. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Durch Ableitung folgen daraus für die Inkremente du, dv, dw über

$$\begin{aligned} 2(c_1^2 u \, du - c_2^2 v \, dv)(u + v - 2) + (c_1^2 u^2 - c_2^2 v^2)(du + dv) &= \\ = (p_1 - q_1)(v \, du + u \, dv) - p_1 \, du + q_1 \, dv \text{ etc.} \end{aligned}$$

Relationen der Bauart

$$\begin{aligned} f_1 \, du = g_1 \, dv, \quad f_2 \, dv = g_2 \, dw, \quad f_3 \, dw = g_3 \, du \quad (3.3) \\ \text{mit} \quad f_1 = 3c_1^2 u^2 + 2c_1^2 uv - c_2^2 v^2 - 4c_1^2 u - (p_1 - q_1)v + p_1, \\ g_1 = 3c_2^2 v^2 + 2c_2^2 v^2 - c_1^2 u^2 - 4c_2^2 v + (p_1 - q_1)u + q_1 \text{ etc.} \end{aligned}$$

Elimination der Differentiale führt schließlich auf eine *Wackelbedingung* der Gestalt

$$f_1 f_2 f_3 = g_1 g_2 g_3, \quad (3.4)$$

neben der natürlich noch die Grundgleichungen (3.2) zu beachten sind. Mit deren Hilfe wären im Prinzip die Parameter u, v, w fortzuschaffen. Eine geometrische Kennzeichnung der wackeligen Sechsecke mit schneidenden Diagonalen steht noch aus.

Liegt nun eine einschlägige Annahme vor, so kann man aus (3.3) Verhältniswerte für $du : dv : dw$ angeben. Über die Ableitung der Umkehrformeln von (2.3), nämlich

$$\lambda = u/(1 - u), \quad \mu = v/(1 - v), \quad \nu = w/(1 - w), \quad (3.5)$$

stehen dann auch entsprechende Verhältniswerte für

$$d\lambda : d\mu : d\nu = du/(1 - u)^2 : dv/(1 - v)^2 : dw/(1 - w)^2 \quad (3.6)$$

zur Verfügung. Mit Benützung der abgeleiteten Ausgangsgleichungen (2.1) lassen sich schließlich die Knotenverschiebungen $d\mathbf{x}_1, d\mathbf{x}_2, d\mathbf{x}_3$ bezüglich des Diagonalentripels $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ ermitteln. Wie dies zweckmäßig geschieht, wird für einen Sonderfall im nächsten Abschnitt näher ausgeführt.

4. SECHSECKE MIT ORTHOGONALEM DIAGONALENTRIPEL

Für ein Sechseck, dessen Diagonalen einander unter rechten Winkeln treffen, vereinfachen sich die Ausgangsgleichungen (2.1) wegen $\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_k = 0$ bei $i \neq k$ auf $\mathbf{x}_1^2 + \mu^2 \mathbf{x}_2^2 = a_1^2$ usf. Man erkennt zunächst leicht die notwendige (aber nicht hinreichende) Bedingung

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2. \quad (4.1)$$

Es soll nun gezeigt werden, daß es sich um ein *wackeliges Sechseck* handelt.

Zu diesem Zwecke werden vorerst die Ableitungen von (2.1) gebildet. Dies führt nach dem Muster

$$(\mathbf{x}_1 + \mu \mathbf{x}_2) (\dot{\mathbf{x}}_1 + \mu \dot{\mathbf{x}}_2 + \dot{\mu} \mathbf{x}_2) = 0 \quad (4.2)$$

mit Beachtung von

$$\mathbf{x}_2 \dot{\mathbf{x}}_2 = -c_2^2 \dot{\mu} / (1 + \mu)^3 = -\dot{\mu} \mathbf{x}_2^2 / (1 + \mu)$$

auf sechs Gleichungen der Bauart

$$\mathbf{x}_1 \dot{\mathbf{x}}_1 + \mu \mathbf{x}_2 \dot{\mathbf{x}}_1 + \mu \mathbf{x}_1 \dot{\mathbf{x}}_2 - \mu \mathbf{x}_2 \dot{\mathbf{x}}_2 = 0 \quad \text{etc.} \quad (4.4)$$

Zerlegt man nun die Geschwindigkeitsvektoren in Komponenten parallel zu den Diagonalen, etwa durch den Ansatz

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \xi_i \mathbf{z}_1 + \eta_i \mathbf{z}_2 + \zeta_i \mathbf{z}_3 \quad \text{mit} \quad \mathbf{z}_k = \mathbf{x}_k / \mathbf{x}_k^2, \quad (4.5)$$

so ergeben sich aus (4.4) für die neun Koeffizienten die sechs linear-homogenen Gleichungen

$$\begin{aligned} \xi_1 + \mu(\eta_1 + \xi_2 - \eta_2) &= 0, & \eta_2 + \lambda(\xi_2 + \eta_1 - \xi_1) &= 0; \\ \eta_2 + \nu(\zeta_2 + \eta_3 - \zeta_3) &= 0, & \zeta_3 + \mu(\eta_3 + \zeta_2 - \eta_2) &= 0; \\ \zeta_3 + \lambda(\xi_3 + \zeta_1 - \xi_1) &= 0, & \xi_1 + \nu(\zeta_1 + \xi_3 - \zeta_3) &= 0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Jetzt kann noch über das feste Bezugssystem verfügt werden. Sei dessen Ursprung im (festgehaltenen) Diagonalschnittpunkt O , möge die x -Achse mit der Diagonale $A_1 B_1$ zusammenfallen und die xy -Ebene stets auch die Diagonale $A_2 B_2$ enthalten. A_1 und B_1 rücken dann bei der Wackelbewegung bloß auf der x -Achse weiter, während A_2 und B_2 sich lediglich in der xy -Ebene verschieben. Mit Rücksicht auf die entsprechenden Voraussetzungen

$$\eta_1 = \zeta_1 = \zeta_2 = 0 \quad (4.7)$$

reduziert sich die Anzahl der Unbekannten in (4.6) auf sechs, und die Wackeligkeit des Stabwerks ist gewährleistet, wenn die Gleichungen linear abhängig sind. Dies ist tatsächlich der Fall, denn aus den jeweils in einer Zeile stehenden Gleichungspaaren folgen die Ansätze

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \varrho\mu(1 + \lambda) = \sigma\nu(1 + \lambda), & \xi_2 &= \varrho(\lambda\mu - 1), \\ \eta_2 &= \varrho\lambda(1 + \mu) = \tau\nu(1 + \mu), & \xi_3 &= \sigma(\nu\lambda - 1), \\ \zeta_3 &= \sigma\lambda(1 + \nu) = \tau\mu(1 + \nu), & \eta_3 &= \tau(\mu\nu - 1), \end{aligned} \quad (4.8)$$

die für $\rho : \sigma : \tau = \nu : \mu : \lambda$ verträglich sind. Es ist demnach

$$\begin{aligned} \xi_1 : \xi_2 : \xi_3 : \eta_2 : \eta_3 : \zeta_3 &= (1 + \lambda) \mu \nu : (\lambda \mu - 1) \nu : (\lambda \nu - 1) \mu : \\ &: (1 + \mu) \lambda \nu : (\mu \nu - 1) \lambda : (1 + \nu) \lambda \mu. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Damit sind über (4.5) die Verschiebungsgeschwindigkeiten $\dot{\mathbf{x}}_i$ der Knoten A_i bis auf einen willkürlichen Proportionalitätsfaktor bestimmt. Für die Knoten B_i lassen sich die Geschwindigkeitsvektoren $\dot{\mathbf{y}}_i$ nach dem Muster $\dot{\mathbf{y}}_2 = (-\mu \mathbf{x}_2) \cdot = -\dot{\mu} \mathbf{x}_2 - \mu \dot{\mathbf{x}}_2$ unschwer hinzufügen, wobei $\dot{\mu}$ aus (4.3) zu entnehmen ist. — Es gilt also jedenfalls

Satz 3. *Ein windschiefes Gelenksechseck mit rechtwinklig schneidenden Diagonalen ist zumindest wackelig.*

Unter Umständen kann sogar stetige Beweglichkeit in endlichem Ausmaß bestehen, beispielsweise für jenes Stabwerk, das aus den drei Diagonalen eines regulären Oktaeders und dem sie verbindenden Kantenzug besteht (vgl. Satz 4).

5. STETIG BEWEGLICHE STABWERKE

Haben die drei (eventuell zerfallenden) kubischen Zylinder Γ_i (2.4) nicht bloß diskret verteilte Punkte, sondern eine ganze *Linie* gemeinsam, so existiert eine stetige einparametrische Schar von Lösungstripeln (u, v, w) und das Stabwerk ist in einem endlichen Bereich *zwangsläufig beweglich*.

Ein solcher Fall liegt beispielsweise vor, wenn die Gegenseiten des Sechsecks paarweise gleich sind und auch die drei Diagonalen gleiche Länge haben. Unter diesen Voraussetzungen

$$a_i = b_i, \quad c_i = c \quad (i = 1, 2, 3) \quad (5.1)$$

reduzieren sich die Grundgleichungen (2.4) auf

$$\begin{aligned} c_1^2 (u - v) (1 - u - v)^2 &= a_1^2 (u - v), \\ c^2 (v - w) (1 - v - w)^2 &= a_2^2 (v - w), \\ c^2 (w - u) (1 - w - u)^2 &= a_3^2 (w - u). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Die drei Zylinder zerfallen mithin in je *drei Ebenen* — Γ_1 etwa in $u = v$ und $uv - 1 = \pm a_1/c$ — und haben die *Gerade* $u = v = w$ gemeinsam, woraus über (2.3) oder (3.5) $\lambda = \mu = \nu$ folgt; in der Mittelstellung $\lambda = \mu = \nu = 1$ bedeutet dies Parallelität der Gegenseiten².

Für das Studium der nunmehr erkannten *Beweglichkeit* des vorliegenden Stabwerks empfiehlt sich der Übergang zu Kugelkoordinaten r, φ, ψ . Die Gleichheit

² Die zu den übrigen acht diskret verteilten Schnittpunkten der restlichen Ebenen gehörigen Formen des Stabwerks arten aus, weil sie auf die gleichzeitig unerfüllbaren Relationen $\mathbf{x}_i \mathbf{x}_k = -|\mathbf{x}_i| \cdot |\mathbf{x}_k|$ für alle $i \neq k$ führen.

der Diagonalenabschnitte $OA_i = r = c/(1 + \lambda)$ bzw. $OB_i = r - c$ ermöglichen den Ansatz

$$A_i \dots x_i = r \cos \psi \cos \varphi_i, \quad y_i = r \cos \psi \sin \varphi_i, \quad z_i = r \sin \psi; \quad (5.3)$$

$$B_i \dots \bar{x}_i = (r - c) \cos \psi \cos \varphi_i, \quad \bar{y}_i = (r - c) \cos \psi \sin \varphi_i, \quad \bar{z}_i = (r - c) \sin \psi.$$

Die Seitengleichheit $A_1B_2 = B_1A_2 = a_1$ führt dann über

$$[r \cos \varphi_1 - (r - c) \cos \varphi_2]^2 \cos^2 \psi + [r \sin \varphi_1 - (r - c) \sin \varphi_2]^2 \cos^2 \psi + c^2 \sin^2 \psi = a_1^2$$

auf die Beziehung

$$\sin \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} = s_1 \quad \text{mit} \quad s_1^2 = \frac{p_1}{4r(c-r)\cos^2\psi}, \quad (5.4)$$

wobei gemäß (3.1) $p_1 = c^2 - a_1^2$. Analoge Ausdrücke bestehen für s_2 und s_3 . Aus der Identität

$$\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} + \frac{\varphi_3 - \varphi_2}{2} + \frac{\varphi_1 - \varphi_3}{2} = 0$$

folgt weiter mit Benützung von (5.4) mittels geläufiger trigonometrischer Formeln die Relation

$$4(s_1^2 s_2^2 + s_2^2 s_3^2 + s_3^2 s_1^2) - (s_1^2 + s_2^2 + s_3^2)^2 = 4s_1^2 s_2^2 s_3^2$$

oder

$$4(p_1 p_2 + p_2 p_3 + p_3 p_1) - (p_1 + p_2 + p_3)^2 = \frac{p_1 p_2 p_3}{r(c-r)\cos^2\psi}. \quad (5.5)$$

Es gilt mithin

$$r(c-r)\cos^2\psi = m^2 \quad \text{mit} \quad m^2 = \frac{p_1 p_2 p_3}{2(p_1 p_2 + p_2 p_3 + p_3 p_1) - (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)}. \quad (5.6)$$

Mit Rücksicht auf (5.4) hat man daher

$$s_i^2 = p_i/4m^2 = \text{const.} \quad (5.7)$$

Hält man also φ_1 fest — etwa durch die Annahme $\varphi_1 = 0$ —, dann sind auch φ_2 und φ_3 konstant. Das Stabwerk erlaubt demnach eine Bewegung bei festem Zentrum O und fester z -Achse, in deren Verlauf die Knoten A_i auf ebenen Bahnen k_i wandern.

Diese Bahnkurven k_i werden jeweils durch $\varphi_i = \text{const}$ und die Polargleichung (5.6) beschrieben. Sie sind offensichtlich untereinander kongruent und werden, wie der Tausch von r und $c-r$ lehrt, gleichzeitig auch von den Knoten B_i durchlaufen. Der Übergang zu kartesischen Koordinaten $x = r \cos \psi$, $z = r \sin \psi$ zeigt, daß es sich um doppelt-symmetrische *algebraische Kurven 6. Ordnung* mit der Gleichung

$$(x^2 + z^2)(x^2 + m^2)^2 = c^2 x^4 \quad (5.8)$$

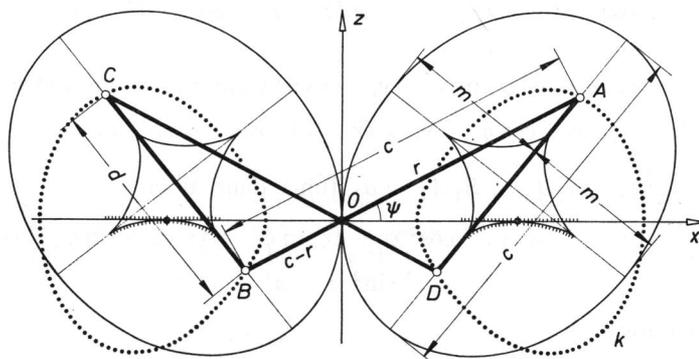


Abb. 3

handelt. Das Aussehen einer solchen, für $0 < 2m < c$ aus zwei Ovalen bestehenden Sextik k zeigt Abb. 3. Die ihr angehörenden Punkte $A(r, \psi)$, $B(r - c, \psi)$, $C(-r, -\psi)$ und $D(c - r, -\psi)$ bilden ein Antiparallelogramm mit den Seiten $AB = CD = c$ und $AD = BC = d$, wobei $d^2 = c^2 - 4m^2$, wie man leicht nachprüft. Dies ermöglicht die folgende kinematische Erzeugung: k ist gemeinsame Bahn der vier Ecken des Antiparallelogramms $ABCD$, wenn dieses so bewegt wird, daß sein Seitenschnittpunkt O und die Symmetrale z festbleiben. Oder, mit Hinblick auf die bekannten Polkurven des Antiparallelogramms: k ist die gemeinsame Bahn der Brennpunkte einer Ellipse mit den Achsen c und $2m$, wenn dieselbe am festen Linienelement (O, z) entlanggleitet; die Ellipsenevolute (eine affine Astroide) rollt dabei gleitfrei auf der Elementennormale x ab (Abb. 3). — Wegen der festen Durchmesserlänge $AB = c$ ist die Kurve k ihre eigene Konchoide; sie könnte mithin als »Autokonchoide« angesprochen werden.

Die Ergebnisse seien zusammengefaßt in

Satz 4. Ein windschiefes Gelenksehseck mit paarweise gleichen Gegenseiten und schneidenden Diagonalen gleicher Länge ist zwangläufig beweglich. Es kann bei festgehaltenem Diagonalschnittpunkt so verformt werden, daß die sechs Ecken paarweise, drei ebene, untereinander kongruente Kurven 6. Ordnung durchlaufen.

In der Mittelstellung ($\lambda = \mu = \nu = 1$) besteht das Stabwerk aus drei Diagonalen eines Parallelepipeds und dem sie verbindenden Kantenzug. Läßt man die bisherige Voraussetzung gleicher Diagonalenlänge fallen, so ist das auch dann noch in der Mittelstellung zentrisch-symmetrische Stabwerk im allgemeinen starr. Neben der von einem jetzt beliebigen Parallelepipeds abgeleiteten Grundform kann es noch weitere starre Nebenformen aufweisen, wie das den Abbildungen 2a-c zugrundeliegende Beispiel lehrt. Alle drei zugehörigen kubischen Zylinder Γ_i (2.4) sind bei einer solchen Annahme bezüglich des ihnen gemeinsamen Punktes P_0 ($u = v = w = 1/2$) symmetrisch, sodaß ihre übrigen Schnittpunkte paarweise spiegelbildlich zu P_0 angeordnet sind. Das Formbestimmungsproblem reduziert sich dementsprechend von Grad 25 auf 12. — Nachdem sich mit jedem nach P_0 rückenden Schnittpunkt aus Symmetriegründen noch ein weiterer vereinigt, tritt

in einem solchen Fall in der Mittelstellung eine *höhere Wackeligkeit* auf. Die unter (3.4) angegebene Wackelbedingung lautet hier wegen $a_i = b_i$:

$$(c_1^2 - c_2^2)(c_2^2 - c_3^2)(c_3^2 - c_1^2) + 16a_2^2 a_3^2 (c_1^2 - c_2^2) + 16a_3^2 a_1^2 (c_2^2 - c_3^2) + 16a_1^2 a_2^2 (c_3^2 - c_1^2) = 0. \quad (5.9)$$

Abschließend sei noch erwähnt, daß ein weiteres *zwangsläufig bewegliches Stabwerk* bei *plansymmetrischer Struktur* vorliegt, gekennzeichnet durch

$$a_1 = b_3, \quad a_2 = b_2, \quad a_3 = b_1, \quad c_2 = c_3. \quad (5.10)$$

Hier zerfällt nur der zweite der kubischen Zylinder (2.4) in drei Ebenen, während die beiden anderen zur Teilebene $v = w$ spiegelbildlich liegen. Die drei Zylinder Γ_i haben mithin eine irreduzible *Kurve 3. Ordnung* in dieser Ebene gemeinsam, was die behauptete Beweglichkeit gewährleistet.

6. WÜRFELGETRIEBE

Das in Abschnitt 1 als Normalform angeführte Stabwerk, bestehend aus drei Würfel diagonalen und dem sie verbindenden Kantenzug, ist gekennzeichnet durch $a_i = b_i = a$ und $c_i = c$ mit $c^2 = 3a^2$. Dieses »Würfelgetriebe« fällt unter Satz 4 und ist also in der geschilderten Weise zwangsläufig beweglich; im Ansatz (5.3) mag dabei $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 2\pi/3$ und $\varphi_3 = 4\pi/3$ genommen werden. Das Getriebe ist insofern besonders bemerkenswert, als die Sechseckseiten durch *Zylindergelenke* verbunden werden können, worauf die Diagonalstäbe entbehrlich werden.

Zum Nachweis errichte man in zwei Nachbarecken, etwa A_1 und B_2 , die Normalen auf die von dort ausgehenden Seitenpaare. Für die betreffenden, zu

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}_1 + \lambda \mathbf{x}_2) \times (\mathbf{x}_1 + \lambda \mathbf{x}_3) &= (\mathbf{x}_1 + \lambda \mathbf{x}_2) \times \lambda (\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_2) \quad \text{bzw.} \\ (\mathbf{x}_1 + \lambda \mathbf{x}_2) \times (\mathbf{x}_3 + \lambda \mathbf{x}_2) &= (\mathbf{x}_1 + \lambda \mathbf{x}_2) \times (\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1) \quad \text{mit } \lambda r = c - r \end{aligned} \quad (6.1)$$

proportionalen *Normalenvektoren* findet man nach kurzer Rechnung:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= (2c \sin \psi, 0, (c - 3r) \cos \psi) \quad \text{bzw.} \\ \mathbf{b}_2 &= (-c \sin \psi, c/\sqrt{3} \sin \psi, (3r - 2c) \cos \psi). \end{aligned} \quad (6.2)$$

Nun bestätigt man unter Beachtung von (5.6) mit $m^2 = 2c^2/9$ leicht die Beziehung

$$\mathbf{a}_1 \mathbf{b}_2 = 0. \quad (6.3)$$

Die beiden Knotennormalen weisen mithin zum Stab $A_1 B_2$ und zueinander unveränderlich senkrechte Lage auf und können daher als Achsen von *Zylindergelenken* dienen. Weil aus Symmetriegründen Gleiches auch für die übrigen Seiten gilt, lassen sich sämtliche Knoten mit *Zylindergelenken* ausstatten.

Auf diese Weise ist man zu einer schon von R. BRICARD [2] entdeckten zwangsläufig beweglichen *Sechsgelenkkette* $A_1 B_2 A_3 B_1 A_2 B_3$ gelangt, die allgemein dadurch charakterisiert ist, daß die zu den Knotenebenen normalen Achsen der Zylindergelenke zwei Dreikante $\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3$ und $\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2 \mathbf{b}_3$ bilden, wobei die Kanten des einen senkrecht zu den Seitenflächen des anderen sind. Speziell die Kette

mit Würfelstruktur in der Mittellage ist unlängst von S. KUNZE und H. STACHEL [4] hinsichtlich ihrer Bewegung genauer studiert worden, wobei die Invarianz der Diagonalabstände $A_i B_i$ festgestellt wurde. Die dabei untersuchten Relativbewegungen unterscheiden sich allerdings wesentlich von der in Satz 4 genannten Deformation, weil andere Bezugssysteme verwendet wurden. Von praktischer Bedeutung war vor allem eine Bewegung mit festgehaltener Diagonale, da sie die Grundlage für eine von P. SCHATZ in der Schweiz entwickelte Schüttelmaschine »Turbula« bot [3]; diese Bewegung wurde auch von V. BRAT [1] betrachtet.

Die Vermutung, daß sich die dargelegten Entwicklungen für das Würfelgetriebe auf das allgemeinere Getriebe mit Quaderstruktur ausdehnen lassen, hat sich nicht bestätigt. Das aus drei Diagonalen eines Quaders und dem sie verbindenden sechsgliedrigen Kantenzug gebildete Stabwerk fällt zwar unter Satz 4 und ist dementsprechend beweglich. Werden andererseits die Sechseckseiten in der rechtwinkligen Ausgangslage durch Zylindergelenke verbunden, deren Achsen mit den Knotennormalen zusammenfallen, so ist wohl auch das Bricardsche Kriterium erfüllt und man hat ebenfalls ein zwangläufiges Getriebe; die beiden Bewegungen sind jedoch grundverschieden, weil sich bei der zweiten die Diagonalabstände ändern.

Auch für andere gleichseitige Sechsecke $a_i = b_i = a$ mit gleichen Diagonalen $c_i = c$ — etwa das vom regulären Oktaeder abgeleitete mit $c^2 = 2a^2$ — sind Zylindergelenke nicht statthaft; dies tritt ausschließlich für den obigen Fall $c^2 = 3a^2$ zu.

LITERATUR

- [1] V. Brát: A six-link spatial mechanism. *J. Mechanisms* 4 (1969), 325—336.
- [2] R. Bricard: *Leçons de cinématique*, II (Paris 1927), S. 316 ff.
- [3] P. Clahsen: Transformationen von Polyedern in Polyederketten. *Elem. Math.* 26 (1971), 84—87.
- [4] S. Kunze — H. Stachel: Über ein sechsgliedriges räumliches Getriebe. *Elem. Math.* 29 (1974), 25—32.

Walter Wunderlich, Wien

PROSTORNI ZGLOBNI ŠESTEROKUTI KOJIMA SE DIJAGONALE SIJEKU

Rasprava se odnosi na prostorne šesterokute kojima tri dijagonale imaju jednu zajedničku točku (sl. 1). Svi takvi šesterokuti međusobno su kolinearni i svaki leži na izvjesnoj kvadraci. Oblik takva šesterokuta općenito je određen duljinama stranica i dijagonala, premda ne jednoznačno. Pomoću prikladnih parametara koji određuju djelišne omjere na dijagonalama svodi se problem oblika na presjek triju kubnih valjaka (sl. 2) i obično je 25. stupanja. Odgovarajući model od šipaka bit će dakle općenito krut, ali može imati različite pozicije. Pri posebnim dimenzijama može šipkasti sklop ipak biti gibljiv i to ili infinitezimalno, ili čak u konačno mjeri neprekinuto. To se npr. događa za šesterokute koji imaju u parovima jednake suprotne stranice i jednake dijagonale; u tom slučaju postoji gibanje pri kojem se svih šest čvorišta po dva pomiču po trima ravninskim, međusobno sukkladnim krivuljama 6. reda (sl. 3). Napose onaj šipkasti sklop koji se sastoji od triju prostornih dijagonala kocke i šesteročlanog poteza bridova koji ih spajaju može se uz uklonjene dijagonale snabdjeti valjkastim zglobovima (umjesto sfernih koji se inače pretpostavljaju); tako se dobiva poseban slučaj šesteročlanog lanca što ga je otkrio R. Bricard.

Primljeno u II. razredu
6. 10. 1977.