

Zur Geometrie der Vogeleier

w. M. Walter Wunderlich (Wien)

(Mit 8 Abbildungen)

(Vorgelegt in der Sitzung der math.-nat. Klasse am 19. Jänner 1978)

§ 1. Einleitung

In der äußeren Form eines Vogeleis wird der Geometer zweifellos zunächst eine *Drehfläche* erkennen, wenn auch sorgfältige Messungen geringfügige Abweichungen von der Rotationssymmetrie verraten mögen [1]. Läßt man dies außer acht, so bleibt als Hauptfrage die nach der Beschreibung des *Meridianprofils*, also der Gestalt des durch die Achse gelegten Längsschnittes. Die nächstliegende Annahme des Profils als Ellipse erscheint schon auf den ersten Blick als unbefriedigend, weil sie die bestehende *Asymmetrie* bezüglich der der Ebene des größten Parallelkreises angehörenden „Hauptsehne“ des Profils nicht berücksichtigt. Diese Sehne zerlegt nämlich die Achsenstrecke l zwischen den beiden Scheiteln A_1 und A_2 in zwei ungleiche Abschnitte p und q , deren größerer, p , zum spitzen („pointed“) Scheitel A_1 gehört, während der andere, q , dem stumpfen Scheitel A_2 zugewandt ist.

Eine grobe Kennzeichnung des Eiprofils wird also durch drei Daten gegeben sein: die Achsenabschnitte p und q zusammen mit der Hauptsehne $2b$. Letztere kann als Eidecke mittels einer Schublehre direkt gemessen werden, ebenso die Elänge $l = p + q$; zur Bestimmung

der Abschnitte p und q wird hingegen eine eigene Apparatur von Nutzen sein.

Zweck der vorliegenden Mitteilung ist es nun, für ein durch die Hauptabmessungen p , q und b gekennzeichnetes Eiprofil verschiedene passende Näherungen unter der Vielzahl bekannter *gesetzmäßiger Kurven* namhaft zu machen. Im einzelnen bieten sich hierzu an: Cartesische Ovale (§2), symmetrische parabolische Kubiken (§3), spirische Linien (§4) und gewisse Radlinien 4. Stufe (§5). Die Gleichungen dieser Ersatzkurven, deren Formen gleichfalls von drei Parametern abhängen, würden es dann gestatten, die Gestalt eines Vogeileis durch Angabe von drei Kennzahlen einfach zu charakterisieren, ferner etwa Volumen, Oberfläche, Schwerpunkt etc. des Eikörpers zu berechnen. Vorher ist aber jeweils die Aufgabe zu lösen, die drei Formparameter aus den drei Meßdaten zu bestimmen. Hierzu wurden die nötigen Formeln entwickelt, überdies wurden — zur überschlagsmäßigen Orientierung — entsprechende Diagramme bereitgestellt.

Wieweit die vorgeschlagenen Ersatzprofile für den Oologen brauchbar und von Interesse sind, hängt einerseits von der Güte der Approximation ab, die durch entsprechende Messungen zu überprüfen wäre¹, anderseits aber auch vom rechnerischen Aufwand, der eine tragbare Grenze nicht wird überschreiten dürfen. Das Urteil muss einschlägigen Fachleuten überlassen bleiben.

Alles, was darüber gesagt werden soll, ist auf die im folgenden §2. **Cartesische Ovale** beschränkt.

Als *Cartesisches Oval* wird jene von R. Descartes (1617) untersuchte ebene Kurve bezeichnet, deren Punkte von zwei festen „Brennpunkten“ F_1 und F_2 Abstände r_1 und r_2 mit konstanten Koeffizienten λ , μ einen festen Wert annimmt [3, Kap. 9]. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit darf $\lambda > \mu > 0$ vorausgesetzt werden, da der Grenzfall $\lambda = \mu > 0$ auf die als ungeeignet anzusehende Ellipse führt, während der andere Grenzfall $\lambda > \mu = 0$ einen Kreis um F_1 liefert, der ebenfalls

ausgeschlossen werden kann. Nach Division durch λ mag also die definierende Relation mit

$$r_1 + m r_2 = c, \quad 0 < m < 1 \quad (2.1)$$

angesetzt werden. Die durch diese bipolare Gleichung erklärte Kurve ist algebraisch und von 4. Ordnung. Sie besteht aus zwei geschlossenen

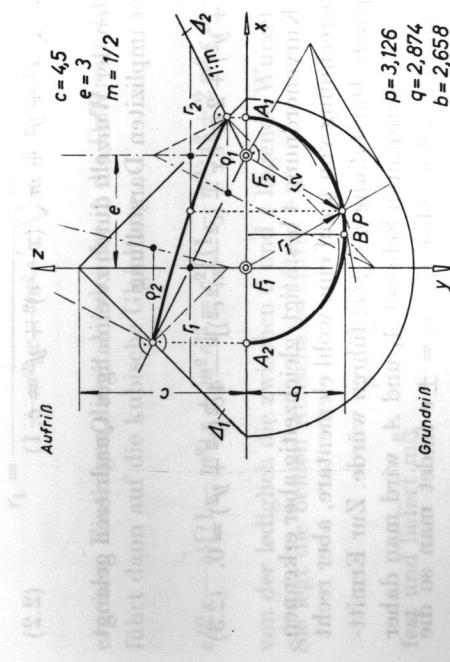


Abb. 1. Cartesisches Oval.

Zügen, von denen der innere Eiform hat, während der äußere nicht unbedingt konvex zu sein braucht und außer Betracht bleibt. Schon J. Steiner hat in einer mündlichen Mitteilung an G. Th. Fechner [2] das innere Oval als brauchbaren Ersatz für ein Eiprofil bezeichnet und an einem Truthemenei verifiziert.

Gute Einsicht und eine einfache Konstruktion des Cartesischen Ovals eröffnet die nachstehende räumliche Deutung: Die Gleichungen $z = c - r_1$ und $z = mr_2$ definieren, mit z als Höhenkote, zwei Drehkegel Δ_1 und Δ_2 , deren Achsen in F_1 bzw. F_2 senkrecht zur Kurvenebene zu denken sind (Abbl. 1); die Durchdringungskurve 4. Ordnung von Δ_1 und Δ_2 bildet sich im Grundriß als Cartesisches Oval ab und kann nach Regeln der darstellenden Geometrie unter Einsatz von achsennormalen Hilfsebenen $z = \text{const}$ leicht punktweise konstruiert werden (vgl. [8],

¹ Erwa anhand eines mit einem Kondensor hergestellten Schattenrisses auf lichtempfindlichem Material.

S. 168f.). Man entnimmt aus Abb. 1, daß die Tangenten der Kurve sowie die Scheitelkrümmungskreise (Radien r_1 , r_2) mit wenigen Strichen hinzuzufügen sind.

Wird der Brennpunktabstand $F_1 F_2$ mit e bezeichnet, so ergibt sich nach Einführung kartesischer Koordinaten x , y gemäß Abb. 1 aus (2.1) die Gleichung

$$\sqrt{x^2 + y^2} + m\sqrt{(x - e)^2 + y^2} = c. \quad (2.2)$$

Nach Fortschaffen der Wurzeln durch zweimaliges Quadrieren gelangt man dann zu der impliziten Darstellung

$$[(1 - m^2)(x^2 + y^2) + 2m^2ex + (c^2 - m^2e^2)]^2 - 4c^2(x^2 + y^2) = 0. \quad (2.3)$$

welche zwar die Kurvenordnung 4 bestätigt, gleichzeitig aber erkennen läßt, daß die Ausrechnung von y auf eine wohl elementare, aber recht unhandliche explizite Darstellung $y = f(x)$ führen würde. Zur Ermittlung der durch $y = 0$ bestimmten Scheitel A_1 und A_2 wird man daher besser auf (2.1) zurückgreifen; über $r_1 - r_2 = \pm c$ findet man so die Scheitelabszissen

$$x_1 = \frac{me + c}{1 + m}, \quad x_2 = \frac{me - c}{1 + m}. \quad (2.4)$$

Hieraus ergibt sich für die Achsenlänge die Formel

$$l = x_1 - x_2 = \frac{2c}{1 + m}. \quad (2.5)$$

Die Berechnung der Profilbreite $2b$ ist ziemlich umständlich. Die Hauptsehne des Ovals ist durch verschwindende Ableitung $y' = dy/dx$ gekennzeichnet. Mit Benutzung der Beziehungen

$$r_1^2 = x^2 + y^2, \quad r_2^2 = (x - e)^2 + y^2 \quad (2.6)$$

erhält man durch Ableitung von (2.2) für $y' = 0$ zunächst die Bedingung

$$m(x - e)r_1 + xr_2 = 0, \quad (2.7)$$

woraus sich mit Rücksicht auf (2.1) die Werte

$$r_1 = \frac{cx}{(1 - m^2)x + m^2e}, \quad r_2 = \frac{mc(e - x)}{(1 - m^2)x + m^2e} \quad (2.8)$$

ergeben. Eintragen dieser Ausdrücke in die Differenz der Formeln (2.6) führt dann auf die kubische Gleichung

$$e(2x - e)[(1 - m^2)x + m^2e]^2 = e^2[(1 - m^2)x^2 + 2m^2ex - m^2e^2], \quad (2.9)$$

von der lediglich die zwischen 0 und e liegende Wurzel x_0 interessiert. Sie legt die beiden Achsenabschnitte

$$p = x_1 - x_0, \quad q = x_0 - x_2 \quad (2.10)$$

fest und liefert mit

$$b = y_0 = \sqrt{r_1^2 - x_0^2}, \quad (2.11)$$

wobei r_1 aus (2.8) zu entnehmen ist, die halbe Hauptsehne.

Bei vorgelegtem Epiprofil fällt zunächst die Aufgabe an, aus den drei Meßdaten b , p und q die drei Formparameter c , e und m zu ermitteln, wofür die Gleichungen (2.10) und (2.11) mit (2.4), (2.8) und (2.9) zur Verfügung stehen. Dies ist eine recht verwickelte Angelegenheit, für die A. Szielsko [5] umfangreiche, 34 Seiten füllende Zahlentafeln bereitgestellt hat. Im Hinblick auf die eher bescheidenen Genaugkeitsansprüche der Benutzer dürfte ein Nomogramm in Gestalt einer übersichtlichen Kurventafel die gleichen Dienste leisten können.

Zur Entwicklung einer solchen Tafel wird zunächst eine nahe-liegende *Normierung* vorgenommen, indem alle Daten auf die Achsenlänge $l = 1$ proportional umgerechnet werden. In der Folge gilt also gemäß (2.5)

$$2c = 1 + m. \quad (2.12)$$

Ferner wird anstelle der Abschnitte p und q ihr Unterschied

$$u = p - q = x_1 + x_2 - 2x_0 = \frac{2me}{1+m} - 2x_0 \quad (2.13)$$

eingeführt, der mit Rücksicht auf $p + q = l = 1$ die Abschnitte durch

$$p = \frac{1+u}{2}, \quad q = \frac{1-u}{2} \quad (2.14)$$

festlegt. Da x_0 der kubischen Gleichung (2.9) genügt, so folgt über (2.13) für u die etwas günstigere Bedingung

$$= (1+m)^3 u [(1-m^2)u - 4me], \quad (2.15)$$

welche die Einführung der Hilfsgröße $v = u/e$ nahelegt. Mit ihrer Hilfe erhält man für e die Formel

$$e = \frac{1+m}{1^{m m} - 2(1^{-m m^2})}, \sqrt{(1+m)v \frac{4m - (1-m^2)v}{(1^{-m m}) + (1 + m m^2)}}, \quad (2.16)$$

Für b ergibt sich aus (2.11) und (2.8) nach einiger Rechnung die Darstellung

$$b = \frac{2 + (1+m)v}{4} \cdot \frac{2m - (1+m)v}{2m - (1-m^2)v} \sqrt{\frac{1-m}{(1-m) + (1+m)v}} \quad (2.17)$$

Die in Abb. 2 wiedergegebene Kurventafel besteht nun aus den in einem kartesischen (b, u) -System eingetragenen Niveaulinien $e = \text{const}$ und $m = \text{const}$. Zur Erstellung der Tafel wurde für die darin verzeichneten Wertepaare (e, m) die kubische Gleichung (2.15) mittels eines Computerprogramms nach u aufgelöst², worauf mit den ent-

Hierfür bin ich Herrn Kollegen W. Ströher zu Dank verpflichtet.

sprechenden Werten $v = u/e$ und m die b -Werte gemäß (2.17) berechnet wurden. Die so gewonnenen Knoten des Kurvennetzes waren dann nur noch gehörig zu verbinden. — Die punktiert eingetragene Grenzlinie gehört zu jenen nicht mehr in Betracht kommenden tropfenförmigen

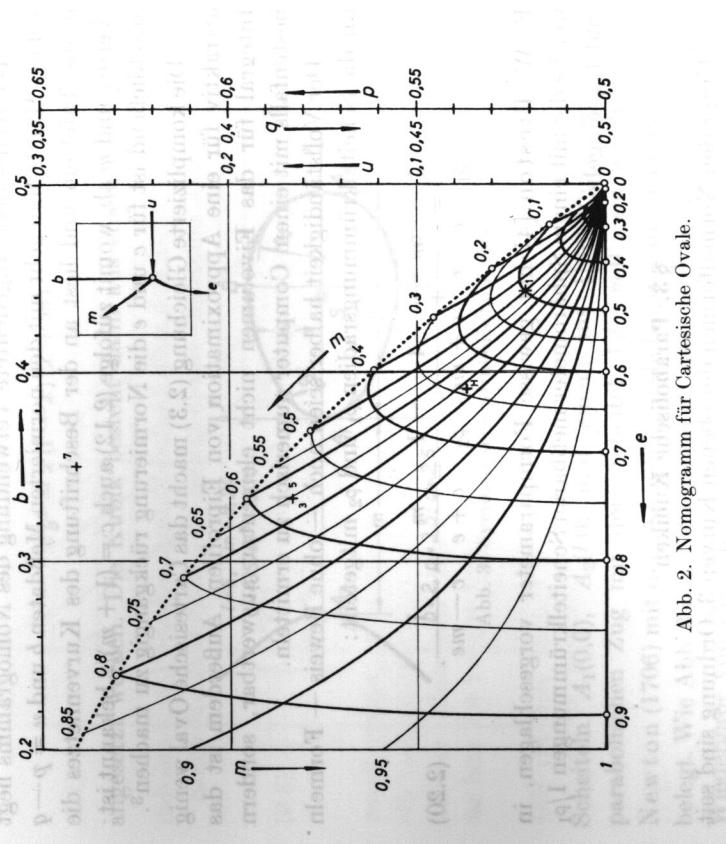


Abb. 2. Nomogramm für Cartesische Ovalen.

Profilen, bei welchen sich Scheitel A_1 und Brennpunkt F_2 in einem Doppelpunkt vereinigt haben; es handelt sich dabei jeweils um die innere Schleife einer *Pascalschnecke* [3, S. 147ff]. Aus der maßgebenden Bedingung $x_1 = e$ folgt über (2.4) und (2.12) die Beziehung

$$e^* = c = \frac{1+m}{2}, \quad (2.18)$$

und durch Auflösung der entsprechenden Gleichung (2.15) — nach Abspaltung des Wurzelfaktors $u + 1$ — der zugehörige Wert

$$\text{Normalwerten } u^* = \frac{m}{4(1-m)}(4-m-\sqrt{m^2+8}). \quad (2.19)$$

Die rechts oben angedeutete Verwendung des Nomogramms liegt auf der Hand: Man geht mit den normierten Maßdaten b und $u = p - q$ in die Tafel ein und liest an der Beschriftung des Kurvennetzes die Werte e und m ab, womit zufolge (2.12) auch $c = (1+m)/2$ bekannt ist; anschließend ist für c und e die Normierung rückgängig zu machen.³

Die komplizierte Gleichung (2.3) macht das Cartesische Oval wenig attraktiv für eine Approximation von Eiprofilen. Außerdem ist das Integral für das Einvolumen nicht elementar auswertbar, sondern bestensfalls mit einem Computer numerisch zu ermitteln.

Der Vollständigkeit halber seien noch — ohne Beweis — Formeln für die Scheitelkrümmungsradien ρ_1 und ρ_2 mitgeteilt:

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{m}{c-e} + \frac{1}{c+me}, \quad \frac{1}{\rho_2} = \frac{m}{c+e} + \frac{1}{c-me}. \quad (2.20)$$

F. W. Preston [4] hat gewisse Formparameter vorgeschlagen, in welche die mit einem Sphärometer maßbaren Scheitelkrümmungen $1/\rho_1$ und $1/\rho_2$ eingehen.

§ 3. Parabolische Kubiken

Unter den Normalformen der ebenen Kurven 3. Ordnung sind seit jeher die durch die kartesische Gleichung $y^2 = a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3$ darstellbaren bevorzugt worden. Diese sogenannten „divergenten

³ Für ein Hühnerei mit den Maßdaten (in mm) $b = 21,1$; $p = 29,0$ und $q = 25,0$ liegt der zu den normierten Werten $b = 0,391$ und $u = 0,074$ gehörige Ablesepunkt an der mit H bezeichneten Stelle des Diagramms. Er liefert zunächst $e = 0,64$ und $m = 0,66$, also $c = 0,533$; Rücknormierung führt dann auf die Formparameter $c = 28,8$ und $e = 34,5$ (mm) sowie $m = 0,66$ (dimensionslos). — Vermerkt wurden auch die zu den Eiprofilen aus Abb. 1, 3 (oder 5) und 7 gehörigen Ablesepunkte; sie sind mit den Ziffern 1, 3 und 7 versehen.

Parabeln“ sind zur x -Achse symmetrisch und besitzen die Ferngerade als Wendetangente [3, S. 16ff.]; sie sollen hier als *parabolische Kubiken* bezeichnet werden. Jede ebene Kurve 3. Ordnung lässt sich durch eine geeignete Kollineation in eine solche Kubik überführen.

Sind die drei auf der Symmetriearchse $y = 0$ liegenden Scheitel reell und verschieden, so kann die Kurvengleichung mit

$$c y^2 = x(l-x)(x+m) \quad (3.1)$$

angesetzt werden. Die Kubik besteht dann aus einem *Oval* mit den

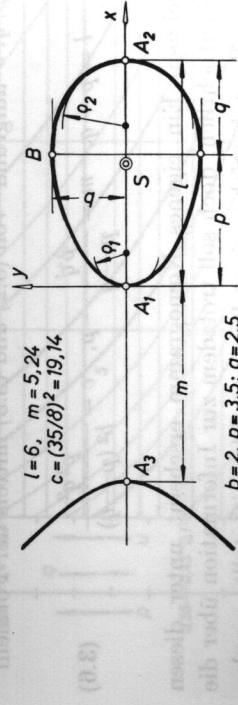


Abb. 3. Symmetrische parabolische Kubik.

Wert aus der Tafel für ein Oval mit den Scheiteln $A_1(0,0)$, $A_2(l,0)$ und einem ins Unendliche reichenden parabolischen Zug mit dem Scheitel $A_3(-m,0)$; sie wurde von I. Newton (1706) mit dem Namen „parabola campaniformis cum ovali“ belegt. Wie Abb. 3 zeigt, könnte sie offenbar auch zur Näherungsweise Wiedergabe von Eiprofilen dienen.

Die durch verschwindende Ableitung $y' = 0$ gekennzeichnete Abszisse $x_0 = p$ der Hauptsehne des Ovals genügt der quadratischen Gleichung

$$3p^2 - 2(l-m)p - lm = 0 \quad (3.2)$$

und hat den Wert

$$p = \frac{1}{3}(l-m + \sqrt{l^2 + lm + m^2}); \quad (3.3)$$

der zweite Achsenabschnitt $q = l - p$ beträgt daher

$$q = \frac{1}{3} (2l + m - \sqrt{p^2 + lm + m^2}). \quad (3.4)$$

Die Profildicke $2b$ ergibt sich gemäß (3.1) aus

$$b^2 = \frac{pq}{c} (p + m). \quad (3.5)$$

Umgekehrt lassen sich auch die drei Formparameter l, m, c aus den Meßdaten p, q, b aufgrund von (3.2) und (3.5) mittels der Formeln

$$\begin{aligned} l &= p + q, \quad m = \frac{pq}{p - q} - p, \quad c = \frac{p^2 q^2}{b^2 (p - q)} \end{aligned} \quad (3.6)$$

leicht berechnen. Ein eigenes Nomogramm erscheint unter diesen Umständen entbehrlich, doch soll trotzdem zur Information über die auftretenden Wertebereiche eine Kurventafel beigestellt werden (Abb. 4). Sie beruht wieder auf der Normierung $p + q = l = 1$ und ist ähnlich zu verwenden wie jene in Abb. 2.⁴

Infolge der einfachen Kurvengleichung (3.1) läßt sich für das *Eivolumen* V unschwer eine geschlossene Formel ableiten:

$$V = \pi \int_0^l y^2 dx = \frac{\pi l^3}{12c} (l + 2m). \quad (3.7)$$

Auch die *Schwerpunktsabszisse* X ist explizit angebar:

$$X = \frac{\pi}{V} \int_0^l xy^2 dx = \frac{l \cdot 3l + 5m}{5(l + 2m)}. \quad (3.8)$$

⁴ Der mit H bezeichnete Ablesepunkt für das Hühnerei aus Fußnote 3 befindet sich an der gleichen Stelle wie in Abb. 2 und liefert die normierten Werte $m = 2,8$ und $c = 5,5$ (den wahren Werten 152 und 295 mm entsprechend). — Die Ablesepunkte zu den Profilen aus Abb. 1, 3 (5) und 7 sind wieder mit den gleichen Nummern versehen.

Der Vollständigkeit halber seien auch noch die *Scheitelkrümmungsradien* angeführt:

$$\rho_1 = \frac{lm}{2c}, \quad \rho_2 = \frac{l(l+m)}{2c}. \quad (3.9)$$

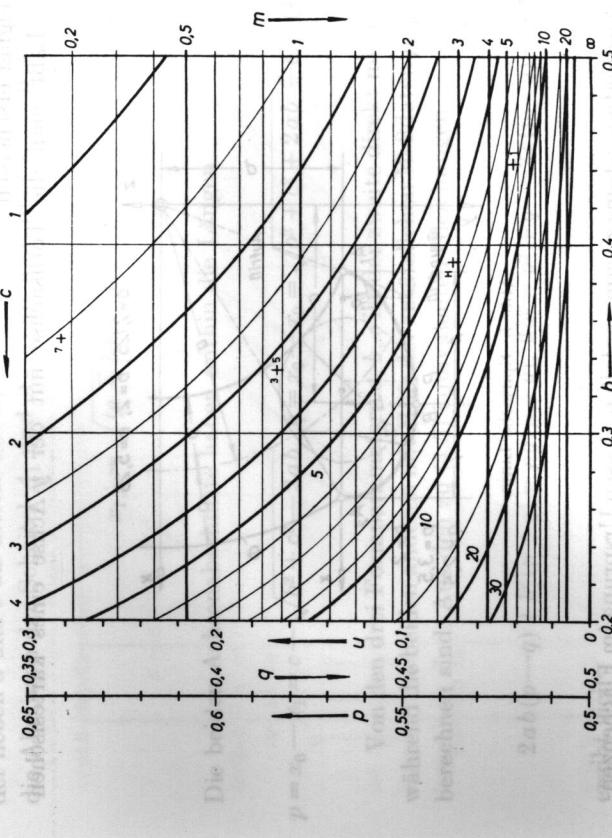


Abb. 4. Nomogramm für parabolische Kubiken.

Über die Brauchbarkeit der bestehend einfachen Approximation von Eiprofilen durch parabolische Kubiken (3.1) könnte wieder nur ein Vergleich mit Messungen an realen Objekten entscheiden.

§ 4. Spirische Linien

Spirische Linien schlechtweg heißen die von Perseus (130 v. Chr.) untersuchten achsenparallelen ebenen Schnitte des Torus („Spire“); es handelt sich dabei um doppelt-symmetrische Kurven 4. Ordnung [3, S. 244ff.].

Liegt im besonderen ein *Ringdorus* Φ zugrunde, erzeugt durch Rotation eines Kreises vom Radius b um eine (seiner Ebene angehörende) Achse im Zentralabstand $a > b > 0$, und verläuft die Schnittelbeine in einer Entfernung $d < a - b$ von der Achse, so besteht die spirische Linie aus zwei kongruenten Ovalen, die zur Approximation vom Eiprofilen geeignet erscheinen.

Läßt man die Torusachse mit der y -Achse eines kartesischen

Für die Abszisse der Hauptsehne $2b$ findet man über $r_0 = a$ den Wert

$$(4.3) \quad x_0 = \sqrt{a^2 - d^2} = c,$$

der neben a und b als dritter Formparameter (statt d) dienen soll. Für die Abszissen der Scheitel A_1 und A_2 erhält man über $r_{1,2} = a \mp b$:

$$(4.4) \quad x_{1,2} = \sqrt{(a \mp b)^2 - d^2}.$$

Die beiden Achsenabschnitte haben mithin die Längen

$$p = x_0 - x_1 = c - \sqrt{b^2 + c^2 - 2ab}, \quad q = x_2 - x_0 = \sqrt{b^2 + c^2 + 2ab} - c. \quad (4.5)$$

Von den drei Formparametern a, b, c ist der zweite direkt meßbar, während die beiden anderen mit Hilfe der zusätzlichen Meßdaten p, q zu berechnen sind. Aus den zu (4.5) äquivalenten Gleichungen

$$2ab(p-q) + b^2(p+q) = pq(p+q), \quad 2b^2 = p^2 + q^2 - 2c(p-q) \quad (4.6)$$

ergibt sich

$$a = \frac{pq - b^2}{2b} \cdot \frac{p+q}{p-q}, \quad c = \frac{p^2 + q^2 - 2b^2}{2(p-q)}. \quad (4.7)$$

Ein Überblick gewährt die *Kurvetafel* Abb. 6, die wieder auf der Normierung $p+q=1$ beruht und den Unterschied $p-q=u$ verwendet. Die Niveaulinien $a=\text{const.}$ beschrieben durch $4b^2 + 8abu + u^2 = 1$, sind konzentrische Kegelschnitte (für den in Betracht kommenden Bereich $a > 1/2$ Hyperbeln); die Kurven $c=\text{const.}$ sind untereinander ähnliche Hyperbeln $4b^2 + 4cu - u^2 = 1$. Die punktiert eingetragene Grenzlinie kennzeichnet die für $d=a-b$, also $c^2 = 2ab - b^2$ auftretenden *Lemmiskatenprofile*, bei welchen die beiden

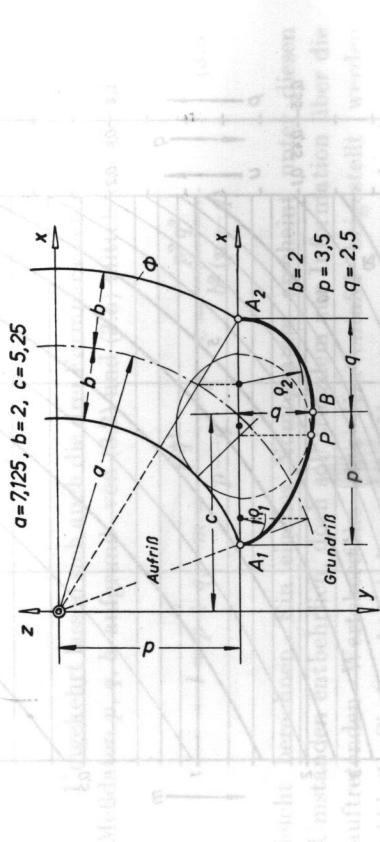


Abb. 5. Spirische Linie.

Koordinatensystems zusammenfallen, dessen Ursprung im Flächenzentrum liegt, so ergibt sich die Gleichung von Φ durch Elimination des Parallelkreishalbmessers r aus den beiden Beziehungen

$$x^2 + z^2 = r^2, \quad (r-a)^2 + y^2 = b^2. \quad (4.1)$$

Setzt man überdies $z = -d = \text{const.}$, so erhält man die spirische Linie dargestellt durch

$$(x^2 + y^2 + a^2 - b^2 + d^2)^2 = 4a^2(x^2 + d^2). \quad (4.2)$$

Auf Grund ihrer Entstehung ist die Kurve, wie aus Abb. 5 ersichtlich, darstellend-geometrisch leicht zu konstruieren (vgl. [8], S. 151 ff.).

Ovale in einem Doppelpunkt verschmelzen; sie wird von der Ellipse $4b^2 + u^2 + 2u = 1$ gebildet⁵.

Ergänzend seien noch die Werte der *Scheitellkrümmungsradien* angegeben, deren konstruktive Ermittlung aus Abb. 5 ersichtlich ist:

$$\rho_1 = \frac{x_1}{a-b}, \quad \rho_2 = \frac{x_2}{a+b} \quad \text{mit} \quad x_{1,2}^2 = b^2 + c^2 \mp 2ab. \quad (4.8)$$

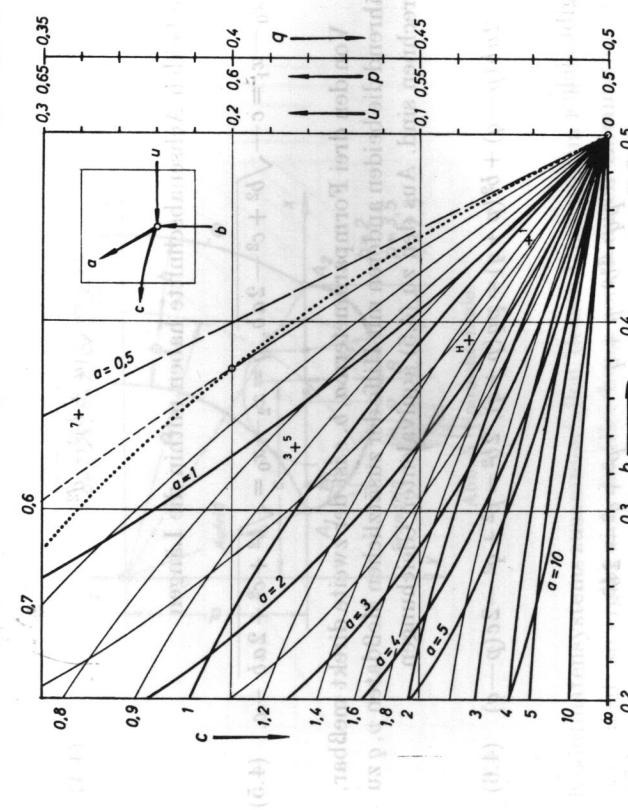


Abb. 6. Nomogramm für spirische Linien.

Dank der relativ einfachen Kurvengleichung (4.2) ist eine explizite Berechnung des Einhalbmens und des Schwerpunktes zwar möglich, doch wird auf die Wiedergabe der etwas umständlichen Formeln verzichtet.

⁵ Der zu dem Hühnerei aus Fußnote 3 gehörige Ablesepunkt H führt auf die normierten Werte $a = 1,66$ und $c = 1,33$ (den wahren Werten 89,5 und 71,9 mm entsprechend). — Die zu den Profilen aus Abb. 1, 3 (5) und 7 gehörigen Ablesepunkte wurden ebenfalls wieder markiert.

§ 5. Radlinien 4. Stufe (Kirste-Profil)

In einer mündlichen Mitteilung hat mein inzwischen verstorbener Kollege L. Kirste gelegentlich auf ein im Flugzeugbau verwendbares Stromlinienoval hingewiesen, das aus einer Ellipse $(x/a)^2 + (y/c)^2 = 1$ in der Weise abgeleitet wird, daß man die Ordinaten y mit einem linear von der Abszisse abhängenden Faktor $1 + \mu x$ multipliziert. Dieses „Kirste-Profil“ kann demnach unter Verwendung eines Winkelparameters t beschrieben werden durch

$$(5.1) \quad x = a \cos t, \quad y = c \sin t (1 + m \cos t) = c \sin t + \frac{mc}{2} \sin 2t,$$

wobei $0 < m < 1$ angenommen sei. Aus der kartesischen Gleichung (5.1)

$$(5.2) \quad a^4 y^2 = c^2 (a^2 - x^2) (a + m x)^2$$

ist zu entnehmen, daß es sich um eine algebraische Kurve 4. Ordnung handelt, die bei $D(-a/m, 0)$ einen isolierten Doppelpunkt hat. Die komplexe Darstellung

$$(5.3) \quad x + iy = \frac{a + c}{2} e^{it} + \frac{a - c}{2} e^{-it} + \frac{mc}{4} e^{2it} - \frac{mc}{4} e^{-2it}$$

wiederum lehrt, daß die Kurve zu den *Radlinien 4. Stufe* (mit der Charakteristik $1:-1; 2:-2$) gehört. Die vielseitige Brauchbarkeit höherer Radlinien, deren Theorie in [6] entwickelt und deren Einsatz zu Approximationsszwecken bereits in [7] vorgeführt wurde, erfährt hiermit eine weitere Bestätigung.

Die Werte $t_1 = \pi$ und $t_2 = 0$ führen zu den Scheiteln $A_1 (-a, 0)$ bzw. $A_2 (a, 0)$ und auf die Beziehung $l = 2a$. Der zur Hauptsehne des Eiprofils gehörige Parameterwert ist durch verschwindende Ableitung

$$(5.4) \quad \dot{y} = dy/dt = c \cos t + mc \cos 2t = 0$$

gekennzeichnet und ergibt sich aus

$$(5.5) \quad \cos t_0 = \frac{1}{4m} (\sqrt{1 + 8m^2} - 1).$$

Über die entsprechenden Profilkoordinaten x_0, y_0 folgen dann für die Achsenabschnitte $p = 1 - x_0$ und $q = 1 - x_0$ sowie für die halbe Eindicke $b = y_0$ die Formeln

$$p = a(1 + \cos t_0), \quad q = q(1 - \cos t_0), \quad b = c \sin t_0 (1 + m \cos t_0). \quad (5.6)$$

Die Ermittlung der drei Formparameter a, c und m aus den drei Maßdaten p, q und b liefert dann über

$$\cos t_0 = \frac{p - q}{p + q}, \quad \sin t_0 = \frac{2\sqrt{pq}}{p + q} \quad (5.7)$$

und die gemäß (5.4) bestehende Bedingung $m = -\cos t_0 / \cos 2t_0$ die Umkehrformeln

$$a = \frac{p + q}{2}, \quad c = \frac{b(p + q)}{8pq\sqrt{pq}}(6pq - p^2 - q^2), \quad m = \frac{p^2 - q^2}{6pq - p^2 - q^2}. \quad (5.8)$$

Für die Scheitelkrümmungsradien erhält man die Beträge

$$(5.9) \quad p_1 = \frac{c^2}{a}(1 - m)^2, \quad p_2 = -\frac{c^2}{a}(1 + m)^2.$$

Zu beachten ist im übrigen, daß das durch (5.1) dargestellte Profil nicht unbedingt konvex ausfällt. Unter Umständen auftretende Wendepunkte sind durch $\dot{x}\ddot{y} - \dot{x}^2\dot{y} = 0$ bedingt und stellen sich demgemäß für

$$(5.10) \quad 2m \cos^3 t - 3m \cos t - 1 = 0$$

ein. In dem zu verschwindender Ableitung von (5.10) gehörenden Grenzfall rücken je zwei Wendepunkte zu einem Flachpunkt zusammen; dies geschieht für $\cos t = -1/\sqrt{2}$, also $t = \pm 3\pi/4$, was $m = 1/\sqrt{2}$ bedingt. Die eingangs getroffene Beschränkung $0 < m < 1$ ist demnach auf $0 < m < 1/\sqrt{2} = 0,707$ zu verschärfen.

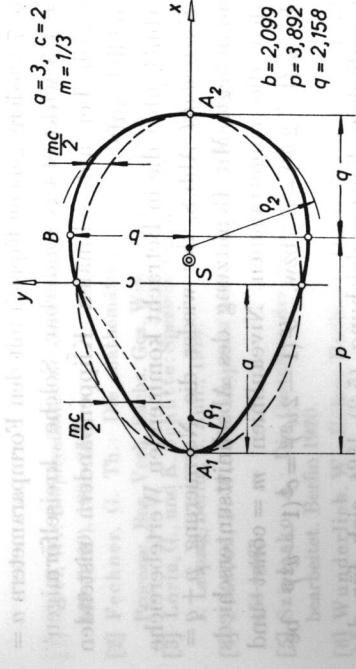


Abb. 6. Geometrische Konstruktion des Vogeleiters.

Abb. 7. Kirste-Profil.

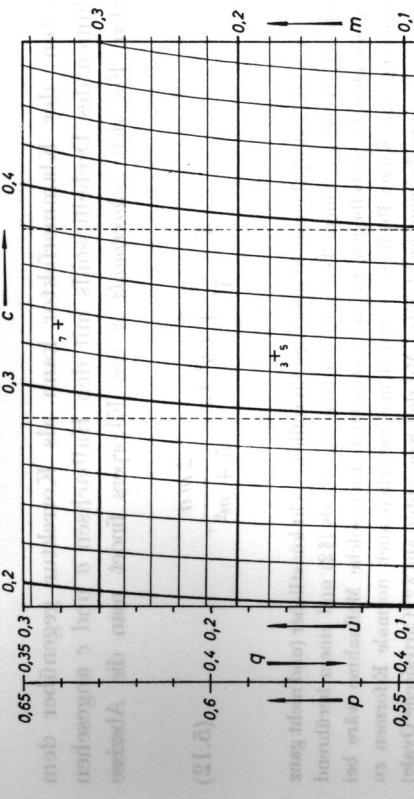


Abb. 7. Kirste-Profil.

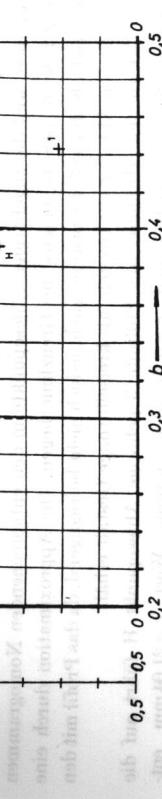


Abb. 8. Nomogramm für Kirste-Profil.

Das in Abb. 7 wiedergegebene Eiprofil mit den Formparametern $a = 3$, $c = 2$, $m = 1/3$ wirkt etwas sonderbar. Solche „kreiselförmigen“ Eier treten jedoch bei auf schmalen Klippenbändern nistenden Seevögeln tatsächlich auf⁶.

Einen Überblick über die in Betracht kommenden Wertebereiche vermittelt die *Kurrenttafel* Abb. 8, der wieder die Normierung $p + q = 2a = 1$ zugrundeliegt. Mit Benützung des Abschnittsunterschieds $u = p - q$ werden die eingetragenen Niveaulinien $m = \text{const}$ und $c = \text{const}$ durch $m(1 - 2u^2) = u$ bzw. $b^2(1 - 2u^2)^2 = c^2(1 - u^2)^3$ beschrieben⁷.

Dank der einfachen Kurvengleichung (5.2) lässt sich für das *Eivolumen* die handliche Formel

$$V = \pi \int_{-a}^a y^2 dx = \frac{4\pi}{3} a c^2 \left(1 + \frac{m^2}{5} \right) \quad (5.11)$$

ableiten; der Klammerfaktor kann als Korrektur gegenüber dem Volumen des Drehellipsoids mit den Halbachsen a und c angesehen werden. Für den *Schwerpunkt* S des Eikörpers findet man die Abszisse

$$X = \frac{\pi}{V} \int_{-a}^a x y^2 dx = \frac{2ma}{5 + m^2}. \quad (5.12)$$

⁶ A. Szielsko [5] versucht derartige Eiprofile in recht künstlicher (und nicht ganz fehlerfreier) Weise aus einem Teil eines Cartesischen Ovals (§2) und einem berührend anschließenden Hyperbelbogen zusammenzusetzen. Eine solche Maßnahme wäre bei Verwendung von Kirste-Profilen — mit denen natürlich auch normale Eiformen zu erfassen sind — anscheinend nicht nötig. Mit den Konzepten aus §2 (Cartesische Ovalen) und §4 (Spirische Linien) sind derartige ungewöhnliche Eiprofile nicht mehr zu beschreiben, weil die zugehörigen Ablesepunkte in den entsprechenden Nomogrammen (Abb. 2 bzw. 6) bereits jenseits der Grenzlinie liegen. Die Approximation durch eine parabolische Kubik (§3) ist zwar möglich, jedoch nicht befriedigend, da das Profil mit den Meßdaten von Abb. 7 mehr tropfen- als kreiselförmige Gestalt erhält.

⁷ Der zu dem Hühnerei aus Fußnote 3 gehörige Ablesepunkt H führt auf die normierten Werte $m = 0.075$ und $c = 0.39$. (dem wahren Wert $c = 21.04 \text{ mm}$ entsprechend). — Die zu den in Abb. 1, 3 (5) und 7 wiedergegebenen Eiprofilen gehörigen Ablesepunkte sind wieder mit 1, 3 bzw. 7 markiert.

Literatur

- [1] Abel, W.: Biophysikalische Gesetzmäßigkeiten am Vogelei. Sb. Österr. Akad. Wiss. **169** (1960), 199–249.
- [2] Fechner, G. Th.: Die mathematische Behandlung organischer Gestalten und Prozesse. Ber. Verh. Sächs. Ges. Wiss. (Leipzig), 1849, 50–64.
- [3] Loria, G., und K. Schütte: Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven, I. Leipzig/Berlin, 2. Aufl., 1910.
- [4] Preston, F. W.: The shapes of birds' eggs: mathematical aspects. Auk **85** (1968), 454–463.
- [5] Szielsko, A.: Die Gestalten der normalen und abnormen Vogeleier analytisch bearbeitet. Berlin 1920.
- [6] Wunderlich, W.: Höhere Radlinien. Österr. Archiv **1** (1947), 277–296.
- [7] Wunderlich, W.: Höhere Radlinien als Näherungskurven. Österr. Ingen. Archiv **4** (1950), 3–11.
- [8] Wunderlich, W.: Darstellende Geometrie, I (Hochschultaschenb. 96/96a), Mannheim 1960.