BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XXIV (XXVIII), Fasc. 3—4, 1978
Secţia I
MATEMATICĂ
MECANICĂ TEORETICĂ, FIZICĂ

C. D. 513.6; 528.35

SUR UNE DÉFORMATION REMARQUABLE DU SYSTÈME DES GÉNÉRATRICES D'UN CÔNE DU SECOND DEGRÉ ET UN PROBLÈME DE GÉODÉSIE

PAR

W. WUNDERLICH

0. On étudie une déformation qui conserve la longueur des génératrices tandis que la conique de base varie de manière affine dans un système homofocal, ses points décrivant les coniques homofocales du système orthogonal. Cette transformation, indépendante du sommet, peut être appliquée pour le développement du cône, mais elle a surtout une certaine importance pour un problème de trilatération dans le domaine de la géodésie.

1. Considérons un cône elliptique, déterminé par sa base

(1.1) $\quad (k) \quad x = c \operatorname{ch} v \cos u, \quad y = c \operatorname{sh} v \sin u, \quad z = 0 \quad (c, v = \text{const})$

et le sommet $B(X, Y, Z)$. La distance r d'un point $A(x, y, 0)$ de la base au sommet B se calcule par la formule

$$
\begin{aligned}
r^2 &= (X - x)^2 + (Y - y)^2 + Z^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 - \\
&\quad - 2c(X \operatorname{ch} v \cos u + Y \operatorname{sh} v \sin u) + \frac{c^2}{2}(\operatorname{ch} 2v + \cos 2u).
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

On voit que les génératrices de même longueur r et en distribution égale $r(u)$ se trouvent non seulement sur le cône donné, mais aussi sur une infinité d'autres cônes elliptiques de même excentricité $c > 0$, si les paramètres additionnels v, X, Y, Z satisfont aux conditions

$$X \operatorname{ch} v = a, \quad Y \operatorname{sh} v = b, \quad X^2 + Y^2 + Z^2 + \frac{c^2}{2} \operatorname{ch} 2v = C, \tag{1.3}$$

où a, b, C sont des constantes. La formule (1.2) prend alors la forme

$$r^2 = C - 2c(a \cos u + b \sin u) + \frac{c^2}{2} \cos 2u. \tag{1.4}$$

2. Pour une interprétation visuelle on peut imaginer un modèle, où quelques génératrices AB sont réalisées par des tiges rigides ayant une articulation commune au sommet B. Un changement continu du paramètre v induit une déformation continue du modèle, au cours de laquelle l'ellipse (k) (1.1) varie dans un système homofocal défini par l'excentricité constante c. Chaque point de base $A \in$ (k) (u = const) parcourt une hyperbole

$$(2.1) \quad (\mathrm{l}) \quad x = c \cos u \operatorname{ch} v, \quad y = c \sin u \operatorname{sh} v, \quad z = 0 \quad (c, u = \text{const.}),$$

possédant aussi l'excentricité c. Le système homofocal des ellipses (k) et des hyperboles (l) constitue un réseau orthogonal bien connu en relation avec la transformation conforme $x + iy = \cos(u - iv)$. Le fait que la déformation décrite ne soit pas gênée par le joint commun au sommet B n'était pas évident.

La trajectoire (q) du sommet $B(X, Y, Z)$ au cours de la déformation du cône est définie par (1.3) et représentée en forme paramétrique par

$$(2.2) \quad (\mathrm{q}) \; X = \frac{a}{\operatorname{ch} v}, \quad Y = \frac{b}{\operatorname{sh} v}, \quad Z^2 = C - \frac{c^2}{2} \operatorname{ch} 2v - \frac{a^2}{\operatorname{ch}^2 v} - \frac{b^2}{\operatorname{sh}^2 v}.$$

En général, c'est à dire si $ab \neq 0$, (q) est une courbe gauche algébrique d'ordre 12, base propre d'un faisceau de surfaces d'ordre 4 :

$$(2.3) \quad (\lambda X^2 + \mu Y^2)(X^2 + Y^2 + Z^2 - C) - \frac{c^2}{2}(\lambda X^2 - \mu Y^2) + c^2(\lambda a^2 + \mu b^2) = 0.$$

La projection orthogonale de q sur le plan base $Z = 0$ est une quartique unicursale $(a/X)^2 - (b/Y)^2 = 1$. Dans le cas particulier $a \neq 0, b = 0$ la trajectoire (q) du sommet appartient au plan de symétrie $Y = 0$ et forme un des deux ovales égaux de la quartique circulaire

$$(2.4) \quad X^2 \left(X^2 + Y^2 - C - \frac{c^2}{2}\right) + a^2 c^2 = 0.$$

La situation est semblable pour $a = 0$, $b \neq 0$. Dans le cas $a = b = 0$ le sommet B varie sur l'axe principal $X = Y = 0$.

3. Au cours de sa déformation le cône prend deux formes plates (réelles), caractérisées par $Z = 0$. Pour les trouver on a, en posant $\operatorname{ch} 2v = \xi$, à résoudre l'équation cubique

$$(3.1) \quad \eta = c^2 \xi + \frac{4a^2}{\xi + 1} + \frac{4b^2}{\xi - 1} - 2C = 0.$$

En consultant le graphe de la fonction $\eta(\xi)$ on voit que l'équation $\eta = 0$ a trois racines réelles, mais l'une est contenue dans l'intervalle $-1 < \xi < 1$ et donc est à écarter. Les positions limites B_1 et B_2 du sommet, appartenant aux autres racines de (3.1), se trouvent l'une à l'intérieur de l'ellipse correspondante (k_1), l'autre à l'extérieur de (k_2). Dans les cas de symétrie simple $a = 0$ ou $b = 0$ l'équation (3.1) se réduit à une équation quadratique, dans le cas $a = b = 0$ on a une équation linéaire.

On pourrait se servir des formes aplaties pour le développement du cône. Ceci se fait approximativement au moyen d'une pyramide inscrite à un nombre suffisant d'arêtes assez voisines. Les longueurs nécessaires de ces arêtes peuvent alors être prises en se servant du disque (k_1, B_1) par exemple comme d'un diagramme polaire. Évidemment ce procédé n'est praticable avec avantage que dans les cas de symétrie, surtout pour le cône circulaire oblique ($c = 0$), pour lequel l'usage a été décrit en détail dans [5]. Dans tous ces cas la méthode peut être exécutée sans calcul, par une voie purement constructive.

4. Pour adapter l'exposé précédent à un cône de base hyperbolique, il suffit d'échanger les variables u et v dans (1.1).

Dans le cas parabolique on mettra au lieu de (1.1) les équations

$$x = u^2 - v^2, \quad y = 2uv, \quad z = 0, \tag{4.1}$$

qui définissent un réseau orthogonal constitué de paraboles homofocales (k) (v = const) et (l)(u = const), en relation avec la transformation conforme $x + iy = (u + iv)^2$. Pour la distance r d'un point $A \in$ (k) au sommet $B(X, Y, Z)$ on a

$$\begin{aligned} r^2 = (X - x)^2 + (Y - y)^2 + Z^2 = u^4 - 2u^2(X - v^2) - 4u\, vY + \\ + (X^2 + Y^2 + Z^2 + 2v^2 X + v^4). \end{aligned} \tag{4.2}$$

On voit par cette formule que les génératrices de même longueur r et en distribution égale $r(u)$ se trouvent sur une infinité à un paramètre de cônes paraboliques, dont les données v, X, Y, Z sont liées par les conditions

$$X - v^2 = a, \quad vY = b, \quad X^2 + Y^2 + Z^2 + 2v^2 X + v^4 = C, \tag{4.3}$$

a, b, C étant des constantes. La formule (4.2) prend alors la forme

$$r^2 = u^4 - 2au^2 - 4bu + C. \tag{4.4}$$

Au cours de la déformation du cône, induite par variation du paramètre v, la parabole base (k) se change dans le cadre d'un système homofocal, tandis que ses points décrivent les paraboles (l) (u = const) du système orthogonal. Le sommet B du cône se déplace sur la courbe

$$(\mathrm{q}) \quad X = v^2 + a, \quad Y = \frac{b}{v}, \quad Z^2 = C - (2v^2 + a)^2 - \frac{b^2}{v^2}. \tag{4.5}$$

Il s'agit d'une sextique gauche dans le cas général $b \neq 0$, située sur l'ellipsoïde de révolution

$$(2X - a)^2 + Y^2 + Z^2 = C. \tag{4.6}$$

Elle se projette sur le plan base $Z = 0$ comme cubique unicursale $(X - y)Y^2 = b^2$, parcourue deux fois. Dans le cas de symétrie $b = 0$ la trajectoire (q) se réduit à l'ellipse

$$(2X - a)^2 + Z^2 = C, \quad Y = 0, \tag{4.7}$$

méridienne de la surface (4.6).

La détermination des formes aplaties du cône, caractérisées par $Z = 0$, conduit aussi à une équation cubique dans le cas général et à une équation quadratique dans le cas de symétrie.

5. En géodésie moderne on se sert de plus du mesurage électronique des distances. Ainsi il devient possible de remplacer la méthode classique de triangulation par une „trilatération" qui renonce complètement au mesurage usuel des angles. En relation avec cette tendance K. Killian [2] a posé la question suivante : en mesurant de m points de base A_i $(i = 1,..., m)$ à n points de but B_j $(j = 1, ..., n)$ toutes les distances $A_i B_j = r_{ij}$, pour quelles valeurs de m et n est-il possible (sans connaître la position des A_i) de déterminer la configuration complète des $m + n$ points A_i et B_j ? La réponse dépend de l'équation diophantienne $mn = 3(m + n) - 6$ et dit $m = 4, n = 6$ ou $m = 6, n = 4$. Pour des valeurs plus grandes le problème devient surdéterminé en géneral, ainsi que déjà pour $m = n = 5$.

Certainement le problème de trouver la configuration des dix points $A_1, .., A_4, B_1, .., B_6$ au moyen des 24 distances r_{ij} est algébrique, mais d'un degré élevé, jusqu'ici inconnu [3]. Néanmoins on peut construire un modèle composé des 24 tiges $A_i B_j$ en échelle convenable ; malgré ses 10 articulations le système sera rigide en général, remarque faite déjà par R. Bricard [1]. Sous certaines conditions cependant le modèle sera mobile et permettra des déformations du moins infinitésimales. Une condition suffisante pour une telle configuration critique a été signalée par K. Killian et P. Meissl [2] : le système articulé possède une déformabilité au moins infinitésimale, si les dix points appartiennent à une quadrique („surface dangereuse"). On peut démontrer que les points A_i et B_j peuvent être multipliés sans borne, si seulement tous sont situés sur la même quadrique [3]. Chez R. Bricard [1] on trouve aussi un exemple particulier, distingué par mobilité finie et continue à un paramètre.

Une autre situation critique se présente, si les quatre points de base $A_1,..., A_4$ sont coplanaires: les points de but B_j, en nombre quelconque $n \geqslant 6$, peuvent être distribués arbitrairement dans l'espace. Cepedant, la déformabilité infinitésimale dérivée dans [2] et [3], en vérité n'est que le germe d'une mobilité finie et continue à deux paramètres. Ce fait surprenant résulte immédiatement des développements précédents : faisant passer par les quatre points A_i une ellipse (k) (1.1), et tenant compte de la circonstance que la déformation à un paramètre considérée dans la Section 1 est indépendante du sommet B, cette déformation peut être exécutée simultanément pour un nombre quelconque de points B_j. Puisqu'on a à sa disposition tout un faisceau de coniques (k) passant par $A_1, .., A_4$, on a un paramètre de plus.

S'il y a encore un cinquième point de base dans le plan des autres, il n'y existe qu'une seule conique (k) passant par $A_1, .., A_5$. La déformation à un paramètre du système spatial, possible toujours sans égard au nombre et à la distribution des points de but B_j, est précisément celle qui a été décrite plus haut ; pour le cas d'une ellipse (k) dans la Section 1, pour les cas d'une hyperbole ou d'une parabole dans la Section 4. Le cas singulier d'une conique décomposée en deux droites s'ajoute sans difficulté : la déformation du système est produite par une rotation des droites autour de leur point d'intersection, changeant l'angle qu'elles enferment.

Des points de base additionnels $A_6, .., A_n$, sont admissibles en nombre illimité, s'ils se trouvent aussi sur la conique critique (k). La déformation continue à un paramètre du système articulé reste inaltérée. Néanmoins le degré de liberté peut augmenter, si les points de but B_j ont une position spéciale. C'est le cas chez un exemple de R. B r i c a r d [1], où les B_j (en nombre quelconque) sont situés sur la conique focale de (k) ; le degré de liberté monte alors à 3 [4].

Reçue le 30 Mars 1976

Université Technique, Vienne, Autriche

BIBLIOGRAPHIE

1. B r i c a r d R., *Sur des systèmes articulés.* Nouv. Ann. Math., **79**, 395—400 (1920).
2. K i l l i a n K., W e i s s l P., *Einige Grundaufgaben der räumlichen Trilateration und ihre gefährlichen Orter.* D. Geod. Komm. Bayer. Akad. Wiss., A/*61*, 65—72 (1969).
3. W u n d e r l i c h W., *Gefährliche Annahmen der Trilateration und bewegliche Fachwerke* (II). Z. Angew. Math. Mech. (à paraître).
4. W u n d e r l i c h W., *Fokalkurvenpaare in orthogonalen Ebenen und bewegliche Stabwerke.* Sitzgsber. Osterr. Akad. Wiss. (a paraître).
5. W u n d e r l i c h W., *Zur Abwicklung des schiefen Kreiskegels.* Elem. Math. (à paraître).

ASUPRA UNEI DEFORMĂRI REMARCABILE A SISTEMULUI DE GENERATORI AL UNUI CON DE ORDINUL DOI ȘI O PROBLEMĂ DE GEODEZIE

(Rezumat)

Se studiază o deformație care păstrează lungimea generatoarelor în timp ce conica de bază variază în mod afin într-un sistem homofocal, punctele sale descriind conicele homofocale ale sistemului ortogonal. Deformația prezintă importanță pentru o problemă de trilaterație în geodezie.