

Böschungloxodromen und ebene Loxodromen im isotropen Raum

Von

w. M. Walter Wunderlich (Wien)

(Mit 4 Abbildungen)

Herrn Prof. Dr. Karl Strubecker zum 75. Geburtstag gewidmet

(Vorgelegt in der Sitzung der math.-nat. Klasse am 5. Oktober 1978)

1. Isotrope Metrik

Als *isotropen Raum* bezeichnet man nach K. Strubecker [3] einen dreidimensionalen affinen Raum mit einer Maßbestimmung, die sich bei Verwendung kartesischer Normalkoordinaten x, y, z auf das Bogenelementquadrat

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \quad (1.1)$$

gründet. Der isotrope Abstand zweier Punkte stimmt demnach mit dem euklidischen Abstand ihrer Grundrisse (Normalprojektionen auf die xy -Ebene π_1) überein. Diese Unabhängigkeit der Längenmetrik von der z -Koordinate bedingt starke Anomalien, doch sind die Ausartungen nicht so weitgehend, daß sich nicht doch eine interessante Geometrie entwickeln ließe. Dies hat Strubecker, geleitet vom euklidischen Vorbild

und im Sinne des Erlanger Programms, vor allem in differentialgeometrischer Richtung in mustergültiger Weise getan.

Schränkt man die im isotropen Sinn längentreuen Affinitäten des Raumes auf die volumstreu ein, so gelangt man zur maßgebenden sechsparametrischen *isotropen Bewegungsgruppe* G_6 :

$$\begin{aligned} x' &= a + x \cos \alpha - y \sin \alpha, \\ y' &= b + x \sin \alpha + y \cos \alpha, \\ z' &= c + c_1 x + c_2 y + z. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Ihre Transformationen beschreiben die Verlagerung von Punkten $P(x, y, z) \rightarrow P'(x', y', z')$ und setzen sich aus den euklidischen, auf den Raum ausgedehnten Bewegungen der Grundebene π_1 und affinen Scherungen mit z -parallelen Affinitätsstrahlen zusammen; diese Teiltransformationen sind durch $c = c_1 = c_2 = 0$ bzw. $\alpha = a = b = 0$ gekennzeichnet. Vom projektiven Gesichtspunkt aus tritt, nach komplexer Erweiterung des durch die Fernebene abgeschlossenen Raums, anstelle des absoluten Kugelkreises der euklidischen Geometrie ein *absolutes Geradenpaar*, das gegenüber allen Transformationen aus G_6 invariant ist; es besteht aus den Ferngeraden der beiden Parallelbüschel von Minimalebenen $x \pm iy = \text{const}$. Ihr Schnittpunkt Z (der Fernpunkt der z -Achse) wird der *absolute Punkt* des isotropen Raumes genannt, die ihn enthaltenden (also z -parallelen) Ebenen und Geraden heißen *isotrop* bzw. *vollisotrop*.

Zwei auf einer vollisotropen Geraden befindliche Punkte $P_1(x, y, z_1)$ und $P_2(x, y, z_2)$ haben definitionsgemäß den isotropen Abstand Null, doch kann ihnen auch eine nichtverschwindende Ersatzinvariante zugeordnet werden, nämlich die „Spanne“ $\Delta z = z_2 - z_1$, die offensichtlich gegenüber den Bewegungen (1.2) unempfindlich ist.

Die Metrik einer nichtisotropen Ebene ε , darstellbar durch

$$z = ux + vy + w, \quad (1.3)$$

stützt sich nach euklidischem Muster auf ihr absolutes Punktepaar, das sind die ihr angehörenden Punkte des absoluten Geradenpaares. Die isotropen Maße in ε stimmen demnach mit den entsprechenden

euklidischen Maßen im Grundriß überein. Insbesondere kann der *isotrope Winkel* zweier Geraden aus ε einfach euklidisch im Grundriß abgelesen werden, ebenso der *isotrope Abstand* zweier Parallelen. — In einer *isotropen Ebene* $\varepsilon (ux + vy + w = 0)$ hingegen herrschen ungewöhnliche Verhältnisse, weil hier der isotrope Winkel zweier schneidenden Geraden zu Null wird. Als nichtverschwindende Ersatzinvariante für den Unterschied zweier Richtungen $dx:dy:dz_1$ und $dx:dy:dz_2$ in ε kann jedoch ihre „*Neigung*“ $(dz_2 - dz_1)/ds$ eingeführt werden.

Infolge der ausgearteten absoluten Polarität haben als Normalen einer nichtisotropen Ebene stets die vollisotropen Geraden zu gelten, während sie für eine isotrope Ebene unbestimmt werden. Dies macht es erforderlich, für den *Winkel zweier Ebenen* $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ eine Ersatzinvariante einzuführen, falls sie nichtisotrop (und nicht parallel) sind. Hierfür mag die Spanne σ jener zwischen den Ebenen liegenden Strecke dienen, die von einer beliebigen vollisotropen und im Abstand 1 von der Schnittlinie verlaufenden Geraden getragen wird. Sind die Ebenen durch Gleichungen der Gestalt (1.3) festgelegt, so ergibt sich σ aus $\sigma^2 = (\Delta u)^2 + (\Delta v)^2$; dementsprechend hat man, dual zu (1.1), das Winkelementquadrat

$$d\sigma^2 = du^2 + dv^2. \quad (1.4)$$

Wichtiger für das Folgende ist die Klärung des Begriffs *Winkel einer Ebene ε mit einer Geraden g* , die als nichtisotrop vorausgesetzt sei. Ist ε isotrop, so wird man natürlich den Winkel einfach im Grundriß ablesen, wo die Ebene ε als Gerade erscheint. Im Falle einer nichtisotropen Ebene ε benötigt man hingegen wieder eine Ersatzinvariante. Hierfür bietet sich die vorhin erklärte Neigung der Geraden g gegenüber jener in ε verlaufenden Hilfsgeraden h an, die mit g einer isotropen Ebene angehört. Hat g die Richtung $dx:dy:dz$, so hat h die Richtung $dx:dy:(u dx + v dy)$, und der gewünschte Winkel hat dann den Wert

$$\lambda = \frac{dz - u dx - v dy}{ds}. \quad (1.5)$$

2. Isotrope Loxodromen und Böschungslinien

In der zweckmäßigen Auffassung nach G. Scheffers [2] versteht man unter einer *Loxodrome* jede Raumkurve, welche die Ebenen eines Büschels unter einem festen, von 0 und $\pi/2$ verschiedenen „Kurswinkel“ λ durchsetzt. Diese Definition läßt sich sinngemäß ohne weiteres vom euklidischen auf den isotropen Raum übertragen. Während man aber im (reellen) euklidischen Raum bloß zwischen Loxodromen mit eigentlicher Achse und solchen mit uneigentlicher Achse, also den *Böschungslinien*, zu unterscheiden hat, sind im isotropen Raum in jeder dieser beiden Kategorien zwei Unterklassen zu beachten, wie dies K. Strubecker [4] ausführlich dargelegt hat.

I. Achse eigentlich und nicht vollisotrop. In diesem „allgemeinen“ Fall mag die Loxodromenachse durch eine isotrope Bewegung (1.2) mit der y -Achse zur Deckung gebracht werden. Die einen Kurvenpunkt $P(x, y, z)$ enthaltende Büschelebene hat dann die Koordinaten $u = z/x$ und $v = w = 0$, was für die Loxodromen mit vorgeschriebenem Kurswinkel $\lambda = \text{const}$ gemäß (1.5) auf die *Mongesche Differentialgleichung*

$$\lambda x ds = x dz - z dx \text{ mit } ds^2 = dx^2 + dy^2 \quad (2.1)$$

führt. Sie weist jedem Raumpunkt P einen quadratischen Kegel von Fortschreitrichtungen zu¹, so daß man zwecks Festlegung wohldefinierter Kurven noch eine Zusatzbedingung stellen darf, etwa durch Vorgabe einer Trägerfläche $F(x, y, z) = 0$, speziell eines achsenparallelen Zylinders $f(x, z) = 0$ (Vorgabe des „Aufrisses“, also der Normalprojektion auf die xz -Ebene), oder eines isotropen Zylinders $g(x, y) = 0$ (Vorgabe des Grundrisses). Strubecker hat hierzu in [4] zahlreiche, durchwegs bemerkenswerte Beispiele geliefert, bei welchen die erforderliche Integration explizit ausführbar war. Der Verfasser hat in einer Note [8] auf eine integrallose Darstellung nach dem Vorbild von E. Salkowski [1] hingewiesen.

¹ Für sämtliche Punkte einer Büschelebene $z/x = u = \text{const}$ sind diese als *isotrope Drehkegel* aufzufassenden Elementarkegel translationskongruent zum Richtkegel $\lambda^2(x^2 + y^2) = (ux - z)^2$. Die zu verschiedenen u -Werten gehörigen Richtkegel besitzen die z -Achse zur Fokalachse und haben das Erzeugendenpaar $x:y:z = 0:1:\pm\lambda$ gemeinsam.

II. Achse eigentlich und vollisotrop. Hier sind die Büschelebenen isotrop, so daß der Kurswinkel im Grundriß ablesbar wird. Dementsprechend sind die Loxodromen beliebige Kurven, die sich im Grundriß auf eine *logarithmische Spirale* abbilden.

III. Achse uneigentlich und nicht isotrop. Eine solche Gerade kann durch eine Bewegung (1.2) in die Ferngerade der Grundebene $\pi_1 (z = 0)$ gebracht werden, was die Mongesche Gleichung auf $\lambda ds = dz$ reduziert. Die Loxodromen durchsetzen mithin das Parallelenbüschel $z = \text{const}$ unter dem festen euklidischen Winkel $\gamma = \arctg \lambda$, sind also auch im euklidischen Sinn *Böschungslinien* (bezüglich der Grundebene π_1).

IV. Achse uneigentlich und isotrop. Hier liegt ein Parallelbüschel isotroper Ebenen vor, so daß der Kurswinkel wie in II im Grundriß abgelesen werden kann. Seine Konstanz bedingt, daß sich als Loxodromen alle jene Kurven einstellen, die sich im Grundriß geradlinig abbilden; es handelt sich also um *beliebige Kurven in isotropen Ebenen* einer bestimmten Stellung.

3. Böschungslloxodromen

Als *Böschungslloxodrome* wird kurz eine solche Kurve bezeichnet, die gleichzeitig Loxodrome bezüglich einer eigentlichen Achse a_1 sowie einer uneigentlichen Achse a_2 ist, wobei die entsprechenden Kurswinkel λ_1 und λ_2 verschieden sein dürfen. Eine spezielle Klasse euklidischer Böschungslloxodromen hat der Verfasser gelegentlich als Grenzfall von Doppelloxodromen mit parallelem Achsenpaar betrachtet [6]. Im isotropen Raum sollen hier nur die nichttrivialen Annahmen I und III kombiniert werden, wobei zu unterscheiden sein wird, ob die Achsen a_1 und a_2 einander schneiden oder nicht.

Der Fall schneidender Achsen wurde grundsätzlich bereits von K. Strubecker in [4] erledigt, doch wird in der vorliegenden Arbeit auf Grund eines andersartigen Ansatzes eine neue Darstellung entwickelt, welche die Einsicht erleichtert und einige Ergänzungen liefert.

Der allgemeinere Fall eines windschiefen Achsenpaares wurde in [4] noch nicht in Angriff genommen, doch findet sich dort ein einschlägiges Beispiel (Nr. 4). Das Problem wird im folgenden vollständig gelöst, und zwar durch Einsatz der Stützfunktion für den

Loxodromengrundriß, was die Integration bis auf eine Quadratur zurückführt, die sich in Einzelfällen explizit ausführen läßt. Auf diese Weise gelangt man zu zahlreichen weiteren Beispielen, darunter beliebig vielen algebraischen.

Nebenbei stellen sich mit dem Grenzfall $\lambda_2 = 0$ auch die *ebenen Loxodromen* des isotropen Raums ein. Während die ebenen Loxodromen des euklidischen Raums im allgemeinen vierfache Loxodromen sind [5], erweisen sie sich hier als unendlichfache.

Auf das schwierigere Problem der *Doppelloxodromen* mit zwei eigentlichen (schneidenden oder windschiefen) Achsen, für welches der Verfasser im euklidischen Raum mehrere Beiträge geliefert hat [6], soll vielleicht bei anderer Gelegenheit zurückgekommen werden. Zwei einschlägige, noch dazu algebraische Beispiele für isotrope Doppelloxodromen mit windschiefer Achsenpaar $a_1, \tilde{a}_1$ werden sich übrigens zufällig auch unter den hier betrachteten Böschungloxodromen finden; im Hinblick auf die uneigentliche Achse a_2 sind sie daher im Grunde als *Dreifachloxodromen* anzuspochen, was ihre Merkwürdigkeit erhöht.

4. Böschungloxodromen mit windschiefer Achsenpaar

Sei a_1 die eigentliche, als nicht vollisotrop vorausgesetzte Achse; wie bereits bemerkt, kann man sie mit der y -Achse des Koordinatensystems identifizieren (Abschnitt 2, I). Die uneigentliche Achse a_2 soll den absoluten Punkt Z nicht enthalten. Ihr der xz -Ebene angehörender Punkt X ist mithin sicher von Z verschieden und kann daher durch eine affine Scherung, welche die yz -Ebene punktweise festläßt, in den Fernpunkt der x -Achse verlagert werden. Die Achse a_2 mag demnach von vornherein als Ferngerade der Ebene $z = my$ angenommen werden, wobei unter Voraussetzung windschiefer Achsenlage $m \neq 0$. Die durch einen Kurvenpunkt $P(x, y, z)$ gehende Büschelebene hat also die Koordinaten $u = 0, v = m, w = z - my$, was über (1.5) auf die Böschungsbedingung $\lambda_2 ds = dz - m dy$ führt. Setzt man der einfacheren Schreibung zuliebe $\lambda_1 = \lambda$ und $\lambda_2 = \mu$, so ist unter Beachtung von (2.1) und (1.1) das folgende Differentialgleichungssystem zu lösen:

$$\lambda x ds = x dz - z dx, \quad \mu ds = dz - m dy, \quad ds^2 = dx^2 + dy^2. \quad (4.1)$$

Wird die Ableitung nach der Bogenlänge s durch einen Akzent gekennzeichnet, dann lautet das System:

$$xz' - zx' = \lambda x, \quad z' - my' = \mu, \quad x'^2 + y'^2 = 1. \quad (4.2)$$

Aus den ersten beiden Gleichungen folgt

$$z = (my' + \mu - \lambda) x / x'. \quad (4.3)$$

Der Vergleich der Ableitung hiervon mit der zweiten Gleichung (4.2) führt dann auf die nachstehende *Differentialgleichung des Loxodromengrundrisses*:

$$mx(x'y'' - x''y') + (\lambda - \mu)xx'' - \lambda x'^2 = 0. \quad (4.4)$$

Setzt man die Tangentengleichung des Kurvengrundrisses in der Hesseschen Normalform

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi = p \quad (4.5)$$

an, und bezeichnet man die Ableitung nach dem Winkelparameter φ durch einen Punkt, so gewinnt man mit Benützung der Kurvennormale

$$-x \sin \varphi + y \cos \varphi = \dot{p} \quad (4.6)$$

die aus (4.5) und (4.6) fließende Parameterdarstellung

$$x = p \cos \varphi - \dot{p} \sin \varphi, \quad y = p \sin \varphi + \dot{p} \cos \varphi. \quad (4.7)$$

Neuerliche Ableitung liefert über

$$\dot{x} = -(p + \ddot{p}) \sin \varphi, \quad \dot{y} = (p + \ddot{p}) \cos \varphi \quad (4.8)$$

und die gemäß (1.1) geltende Beziehung $s^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$ die Ableitung der Bogenlänge

$$s = \pm (p + \ddot{p}). \quad (4.9)$$

Mit Benützung der Kettenregel hat man dann

$$x' = \mp \sin \varphi, \quad y' = \pm \cos \varphi, \quad x'' = -\frac{\cos \varphi}{p + \ddot{p}}, \quad y'' = -\frac{\sin \varphi}{p + \ddot{p}}. \quad (4.10)$$

Nach Eintragung in (4.4) erhält man so für die Stützfunktion $p(\varphi)$ die lineare homogene Differentialgleichung 2. Ordnung:

$$\lambda(p + \ddot{p}) \sin^2 \varphi = (p \cos \varphi - \ddot{p} \sin \varphi)[(\mu - \lambda) \cos \varphi \pm m]. \quad (4.11)$$

Mit Rücksicht auf das partikuläre Integral $p_0 = \sin \varphi$ setze man gemäß dem Prinzip der Variation der Konstanten

$$p = q \sin \varphi, \quad \dot{p} = \dot{q} \sin \varphi + q \cos \varphi, \quad \ddot{p} = \ddot{q} \sin \varphi + 2\dot{q} \cos \varphi - q \sin \varphi. \quad (4.12)$$

Hierdurch vereinfacht sich die Gleichung zu:

$$\lambda \ddot{q} \sin \varphi + [(\lambda + \mu) \cos \varphi \pm m] \dot{q} = 0. \quad (4.13)$$

Nun ist Trennung der Variablen möglich. Unter Einführung der wegen $\lambda \neq 0$ zulässigen Abkürzungen

$$r = -(\lambda + \mu)/\lambda, \quad n = \mp m/\lambda \neq 0 \quad (4.14)$$

hat man zunächst

$$\frac{\ddot{q}}{\dot{q}} = r \cot \varphi + \frac{n}{\sin \varphi}, \quad (4.15)$$

und damit das Zwischenintegral

$$\dot{q} = -a \sin^r \varphi \cdot \operatorname{tg}^n(\varphi/2). \quad (4.16)$$

Nochmalige Quadratur ergibt dann

$$q = -a \int \sin^r \varphi \cdot \operatorname{tg}^n(\varphi/2) \cdot d\varphi, \quad (4.17)$$

wobei die additive Integrationskonstante ohne Belang ist, weil sie bloß eine Verschiebung der Lösungskurve längs der y -Achse bewirkt². Die geometrische Bedeutung von q ist aus (4.12) und (4.5) zu erkennen: q ist der vom Ursprung aus gezählte Tangentenabschnitt auf der y -Achse (Loxodromenachse a_1).

Mit der Kenntnis von q und $\dot{q}$ ergibt sich nun über (4.7) und (4.12) sowie (4.3) und (4.10) die nachstehende *Parameterdarstellung der Böschungloxodromen*:

$$\begin{aligned} x &= -\dot{q} \sin^2 \varphi, & y &= \dot{q} \sin \varphi \cos \varphi + q, \\ z &= \mp \lambda \dot{q} \sin \varphi (n \cos \varphi + r + 2). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Ausführlicher lautet sie zufolge (4.16) und (4.17):

$$\begin{aligned} x &= a \sin^{r+2} \varphi \cdot \operatorname{tg}^n(\varphi/2), \\ y &= -a \sin^{r+1} \varphi \cos \varphi \cdot \operatorname{tg}^n(\varphi/2) - a \int \sin^r \varphi \cdot \operatorname{tg}^n(\varphi/2) \cdot d\varphi, \\ z &= \pm \lambda a (r + 2 + n \cos \varphi) \sin^{r+1} \varphi \cdot \operatorname{tg}^n(\varphi/2). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Nach Übergang zum neuen Parameter $t = \operatorname{tg}(\varphi/2)$ hat man:

$$\begin{aligned} x &= \frac{2^{r+2} a t^{r+n+2}}{(\ell^2 + 1)^{r+2}}, & y &= \frac{2^{r+1} a t^{r+n+1}}{(\ell^2 + 1)^{r+2}} (\ell^2 - 1) - 2^{r+1} a \int \frac{t^{r+n} dt}{(\ell^2 + 1)^{r+1}}, \\ z &= \pm \frac{2^{r+1} \lambda a t^{r+n+1}}{(\ell^2 + 1)^{r+2}} [(r - n + 2)\ell^2 + (r + n + 2)]. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Ein neuerlicher Parameterwechsel $t = \tau^{-1}$ bewirkt, wie man leicht feststellt, lediglich einen Vorzeichenwechsel bei n und y , so daß es genügt, bloß positive Werte von n zu betrachten. Auch das doppelte Vorzeichen bei z ist ohne besonderen Belang.

Satz 1: Die Böschungloxodromen des isotropen Raumes, welche die Ebenen des eigentlichen Büschels $z/x = \text{const}$ unter dem isotropen

² Diese Translationsinvarianz der Lösungsschar war von vornherein klar, so daß das partikuläre Integral $p_0 = \sin \varphi$ nicht erraten zu werden brauchte.

Kurswinkel $\lambda \neq 0$ und die Ebenen des Parallelbüschels $z - my = \text{const}$ unter dem isotropen Böschungswinkel μ durchsetzen, werden durch die Parametendarstellungen (4.19) oder (4.20) erfaßt. Hierbei ist $r = -(\lambda + \mu)/\lambda$ und $n = \mp m/\lambda > 0$, also umgekehrt $\lambda : \mu = -1 : (r + 1)$ und $m = \mp \lambda n$.

Als Böschungslinien sind die behandelten Loxodromen elementar rektifizierbar. Auf Grund der zweiten Gleichung (4.1) ergibt sich unter der Voraussetzung $\mu \neq 0$ ($r \neq -1$) die Bogenlänge mit

$$s = \frac{z - my}{\mu} = \pm \frac{(r + 2)q \sin \varphi - nq}{r + 1}, \quad (4.21)$$

wobei q und q aus (4.16) und (4.17) zu entnehmen sind. Durch Ableitung nach dem Winkelparameter φ oder auch über (4.9) erhält man mit Benützung von (4.15) den Krümmungsradius

$$\rho = s = \pm [(r + 2) \cos \varphi + n] q. \quad (4.22)$$

Mit der Beziehung zwischen ρ und s beherrscht man also in jedem Einzelfall die natürliche Gleichung des Loxodromengrundrisses im Sinne von E. Cesàro³.

5. Beispiele zu Abschnitt 4

Aus der Darstellung (4.20) ist zu ersehen, daß die zu rationalen Werten von r und n gehörigen Böschungsloxodromen auf rational-algebraischen Trägerzylindern mit y -parallelen Erzeugenden verlaufen, also rational-algebraischen Aufriß besitzen. Ob die Loxodromen selbst algebraisch sind, hängt von der Auswertung des Integrals in der y -Koordinate ab.

Eine elementare Auswertung des Integrals ist beispielsweise bei gleichen Kurswinkeln $\lambda = \mu$ möglich, was $r = -2$ bedingt. Die Parame-

³ Die euklidische Krümmung $\kappa = 1/\rho$ des Grundrisses gibt bereits die isotrope Krümmung der Raumkurve an. Die isotrope Torsion ist bei einer Böschungslinie proportional zur Krümmung [4], und zwar ist hier $\tau = \pm \mu \kappa$.

terdarstellung einer solchen Loxodrome lautet dann gemäß (4.20) für positives $n \neq 1$:

$$x = a t^n, \quad y = \frac{na}{2} \left(\frac{t^{n+1}}{n+1} - \frac{t^{n-1}}{n-1} \right), \quad z = \frac{\lambda na}{2} (t^{n-1} - t^{n+1}). \quad (5.1)$$

Die so gewonnenen Loxodromen sind affin zum Prototyp $\xi = t^n$, $\eta = t^{n+1}$, $\zeta = t^{n-1}$, also durchwegs räumliche W -Kurven, nämlich Bahnen von einparametrischen Affinitätsgruppen. Auch der Kreuzriß, d. h. die Normalprojektion auf die yz -Ebene, ist eine (natürlich ebene) W -Kurve. Für rationales n stellen sich algebraische Loxodromen ein, deren Ordnung sich mit $N = \beta + \max(\alpha, \beta)$ errechnet, wenn $n = \alpha/\beta$ als gekürzter Bruch natürlicher Zahlen angeschrieben wird. Hierunter fällt für $n = 2$ die kubische Parabel

$$x = a t^2, \quad y = \frac{a}{3} (t^3 - 3t), \quad z = \lambda a (t - t^3), \quad (5.2)$$

die sich, auf anderem Wege hergeleitet, schon bei Strubecker [4] als Beispiel 4 findet. — Im Ausnahmefall $n = 1$ ergibt sich die in Abb. 1 dargestellte und durch

$$x = at, \quad y = \frac{a}{4} (t^2 - \ln t^2 - 2), \quad z = \frac{\lambda a}{2} (1 - t^2) \quad (5.3)$$

beschriebene transzendente Böschungsloxodrome, die auf einem parabolischen Zylinder verläuft. Sie ist affin zum Prototyp $\xi = e^t$, $\eta = \tau$, $\zeta = e^{2\tau}$, also ebenfalls eine W -Kurve; gleiches gilt für den Kreuzriß, der affin zu einer Exponential- oder Logarithmuskurve ist.

Beliebig viele weitere algebraische Böschungsloxodromen lassen sich mit ganzem $r < -2$ und rationalem n angeben. So gehört beispielsweise zu $r = -3$ ($\lambda : \mu = 1:2$) und $n = 1$ ($m = -\lambda$) wieder eine kubische Parabel:

$$x = \frac{a}{2} (t^2 + 1), \quad y = \frac{a}{6} (t^3 - 3t), \quad z = -\frac{\lambda a}{2} (t^3 + t). \quad (5.4)$$

Die beiden kubischen Loxodromen (5.2) und (5.4) sind trotz ihrer gleichartigen Grundrisse — sogenannte „Tschirnhaus-Kubiken“ [4] — insofern wesentlich verschieden, als die Loxodromenachse a_1 ($x = z =$

= 0) im ersten Falle eine Monosekante (mit dem Treffpunkt $t = 0$ im Ursprung) ist, im zweiten hingegen eine Bisekante (mit den zu $t = \pm i$ gehörigen konjugiert-imaginären Treffpunkten $x = z = 0$, $y = \mp 2ai/3$); überdies hat die erste Kurve gegenüber der die uneigentliche Achse a_2 enthaltenden Bezugsebene $z = my = -2\lambda y$ die Böschung $\mu = \lambda$, wäh-

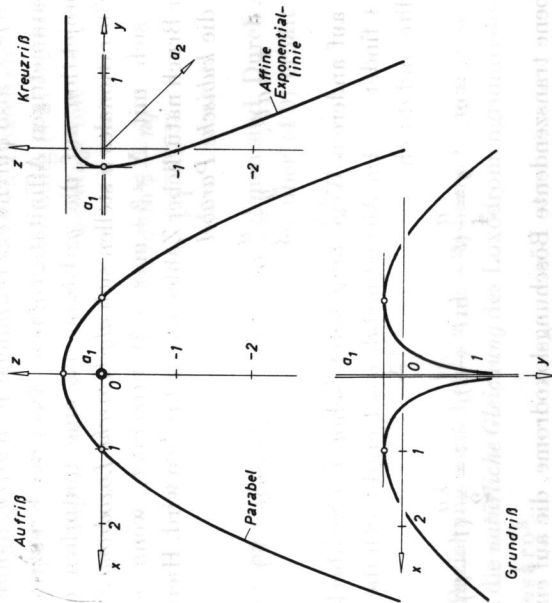


Abb. 1. Transzendente Böschungsloxodrome mit parabolischem Trägerzylinder.

rend die zweite die Böschung $\mu = 2\lambda$ gegenüber der Bezugsebene $z = -\lambda y$ aufweist.

Immerhin besteht Anlaß zu der Vermutung, daß eine solche Böschungskubik zwei *eigentliche Loxodromenachsen* $a_1, \bar{a}_1$ besitzt. In der Tat, normiert man der Bequemlichkeit halber die Kubik (5.2) durch die Annahme $a = \lambda = 1$ und die Kubik (5.4) durch $a = 2, \lambda = 1/2$, so haben die beiden Kurven kongruente Grundrisse und übereinstimmende Böschung $\mu = 1$, so daß sie durch geeignete isotrope Bewegungen (1.2) zur Deckung zu bringen sein werden. Es erscheint zweckmäßig, hierbei die

Böschungs Bezugsebenen $z = -2y$ bzw. $z = -y/2$ mit der Grundebene π_1 zu vereinigen. Dazu eignet sich bei der ersten Kurve die vollisotrope Scherung $x' = x, y' = y, z' = z + 2y$, bei der zweiten die Bewegung $x' =$

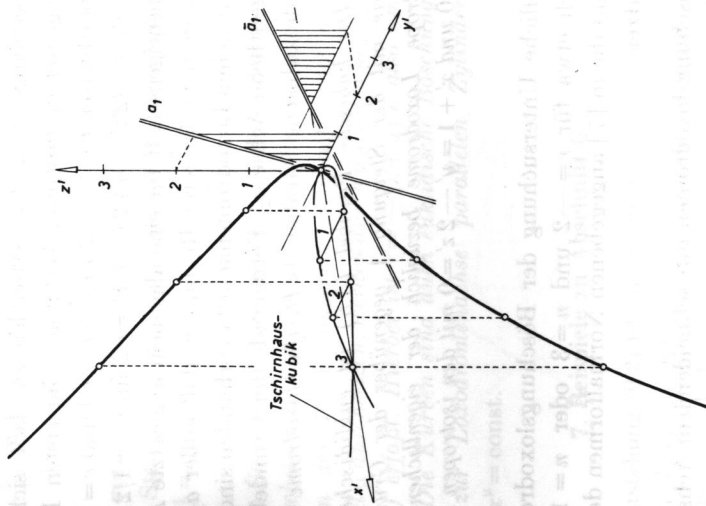


Abb. 2. Kubische Parabel als Böschungsloxodrome mit zwei eigentlichen Achsen.

$= x - 1, y' = y, z' = z + (y/2)$; in beiden Fällen gelangt man zur gleichen Kubik, welche unter Vorzeichenwechsel des Parameters t beschrieben wird durch

$$x' = t^2, \quad y' = t - \frac{1}{3}t^3, \quad z' = t + \frac{1}{3}t^3. \quad (5.5)$$

Es handelt sich dabei um die in Abb. 2 wiedergegebene kubische Parabel, welche auch als (unter $\pi/4$ ansteigende) Normalform für die

euklidische Böschungskubik bekannt ist [7]. Als isotrope Loxodrome besitzt sie jetzt die eigentlichen Achsen $a_1(x'=0, z'=2y')$ und $\bar{a}_1(x'=-1, y'=2z')$; die zugehörigen Kurswinkel betragen laut Ansatz $\lambda=1$ und $\bar{\lambda}=1/2$. Mittels der Formel (1.5), in welcher wegen der Böschung $\mu=1$ die Bogenlänge $s=z'$ zu verwenden ist, läßt sich die doppelte Loxodromeneigenschaft unschwer bestätigen; im ersten Fall sind dabei die Ebenenkoordinaten $u=(z'-2y')/x'=t-t^{-1}$ und $v=2$ zu benutzen, im zweiten Fall $u=(2z'-y')/2(x'+1)=t/2$ und $v=1/2$. Überprüfung der Loxodromeneigenschaft für eine allgemein angesetzte Achse lehrt auf ähnlichem Wege nach längerer Rechnung, daß außer a_1 und $\bar{a}_1$ keine weiteren eigentlichen Loxodromenachsen vorhanden sind. Im Hinblick auf die uneigentliche Achse a_2 (Ferrogerade der Grundebene $z'=0$) ist die vorliegende kubische Parabel als *Dreifachloxodrome* anzusprechen.

Satz 2: Die kubische Parabel (5.5) ist euklidische und isotrope Böschungslinie mit der Steigung 1 gegenüber der Grundebene $z'=0$, überdies isotrope Loxodrome bezüglich der eigentlichen Achsen $x'=2y'-z'=0$ und $x'+1=y'-2z'=0$ mit den isotropen Kurswinkeln 1 bzw. $1/2^4$.

Eine ähnliche Untersuchung der Böschungloxodromen 4. Ordnung, die sich etwa für $r=-2$ und $n=3$ oder $n=1/2$ einstellen, könnte sich auf die in [7] angegebenen Normalformen der Böschungskartiken stützen.

6. Böschungloxodromen mit schneidendem Achsenpaar

Der Fall schneidender Achsen a_1, a_2 wird durch die in Abschnitt 4 zurückgestellte Annahme $m=0$ erfaßt. Für diese speziellen, schon von K. Strubecker [4] betrachteten Böschungloxodromen reduzieren sich die Parameterdarstellungen (4.19) und (4.20) wegen $n=0$ auf

$$\begin{aligned} x &= a \sin^{r+2} \varphi, & y &= -a \sin^{r+1} \varphi \cos \varphi - a \int \sin^r \varphi d\varphi, \\ z &= \pm (r+2) \lambda a \sin^{r+1} \varphi \end{aligned} \quad (6.1)$$

⁴ Wird die vorgenommene Normierung rückgängig gemacht, so tritt vor die rechtssseitigen Polynome in (5.5) der Faktor a , vor das letzte überdies noch der Faktor λ . Die zweite Loxodromenachse enthält nebenbei jene beiden Punkte der Kubik, deren Tangenten zur Grundebene parallel sind und je eine absolute Gerade treffen.

bzw.

$$\begin{aligned} x &= \frac{2^{r+2} a t^{r+2}}{(t^2+1)^{r+2}}, & y &= \frac{2^{r+1} a t^{r+1} (t^2-1)}{(t^2+1)^{r+2}} - 2^{r+1} a \int \frac{t^r dt}{(t^2+1)^{r+1}}, \\ z &= \pm \frac{2^{r+1} (r+2) \lambda a t^{r+1}}{(t^2+1)^{r+1}}. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Wie man sieht, verlaufen solche Böschungloxodromen — in Übereinstimmung mit Strubecker — auf y -parallelen Trägerzylindern der Familie $z^{r+2}/x^{r+1} = \text{const.}$

Satz 3: Die Böschungloxodromen des isotropen Raumes, welche die Ebenen des Büschels $z/x = \text{const}$ unter dem isotropen Kurswinkel $\lambda \neq 0$ und die Ebenen des Parallelbüschels $z = \text{const}$ unter dem isotropen Böschungswinkel μ durchsetzen, werden durch die Parameterdarstellungen (6.1) und (6.2) erfaßt. Hierbei ist $r = -(\lambda + \mu)/\lambda$, also umgekehrt $\lambda : \mu = -1 : (r+1)$. Die Kurven sind auch euklidische Böschungslinien und verlaufen auf zur Loxodromenachse parallelen Zylindern mit der Gleichung $z^{\mu-\lambda}/x^\mu = \text{const.}$

7. Beispiele zu Abschnitt 6

Aus der Darstellung (6.2) ist zu erkennen, daß die zur Loxodromenachse parallelen Trägerzylinder rational-algebraisch sind, falls r eine rationale Zahl ist, was kommensurable Kurs- und Böschungswinkel bedeutet. Ob die Loxodromen selbst algebraisch ausfallen, hängt von der Auswertung des Integrals in der Ordinate y ab. Sie ist beispielsweise für ungerades $r \geq 1$ rational möglich; die zugehörigen Loxodromen sind algebraisch und haben die Ordnung $N = 2r + 4$.

Mit der Annahme $r=1$ etwa ($\lambda : \mu = -1 : 2$) erhält man eine Böschungloxodrome 6. Ordnung, gemäß (6.1) darstellbar durch

$$x = a \cdot \sin^3 \varphi, \quad y = a \cdot \cos^3 \varphi, \quad z = 3 \lambda a \cdot \sin^2 \varphi. \quad (7.1)$$

Diese Kurve erscheint im Grundriß als *Astroide* $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ und ist als spezielle Böschungslinie auf einer Rotationsquadratik wohlbekannt.

Sie verläuft in der Tat auf dem einschaligen Drehhyperboloid

$$12\lambda^2(x^2 + y^2) - (2z - 3\lambda a)^2 = 3\lambda^2 a^2, \quad (7.2)$$

und nicht auf einem quadratischen Kegel, wie in [4] (wo diese Loxodrome als Beispiel 5 vorkommt) versehentlich angegeben ist; sie

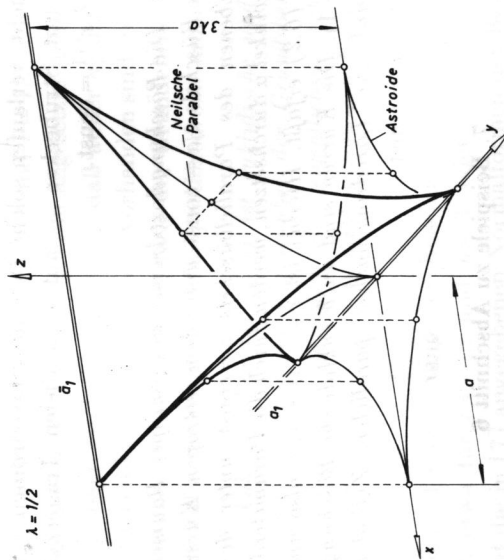


Abb. 3. Rationale Sextik als Böschungloxodrome mit zwei eigentlichen Achsen.

ließe sich dort auch mit der Wahl $\tau = -1/3$ unter Satz 5 einordnen, da als Aufriß eine *Neilsche Parabel* $z^3/x^2 = \text{const}$ auftritt (die übrigens zum Kreuzriß kongruent ist). — Bemerkenswert an dieser in Abb. 3 wiedergegebenen vierspitzigen Kurve ist hauptsächlich, daß sie wieder ein Beispiel für eine *Dreifachloxodrome* darstellt, weil sie neben der y -Achse a_1 , welche zwei Spitzen verbindet, aus Symmetriegründen auch noch die andere Spitzengerade $\bar{a}_1$ ($y = 0$, $z = 3\lambda a$) als zweite eigentliche Loxodromenachse besitzt.

Satz 4: Die vierspitzige Sextik (7.1) ist euklidische und isotrope Böschungslinie mit der Steigung 2λ auf dem einschaligen Drehhyperboloid

(7.2) und gleichzeitig isotrope Loxodrome mit dem Kurswinkel λ bezüglich der Achsen $x = z = 0$ und $y = z - 3\lambda a = 0$.

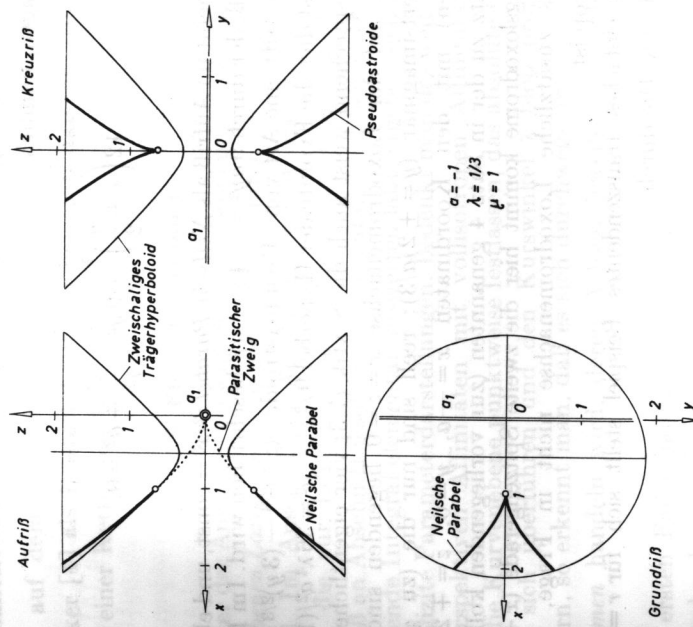


Abb. 4. Rationale Sextik als Böschungloxodrome.

Eine rationale Auswertung des maßgebenden Integrals in (6.2) ist auch für gerade $r \leq -4$ möglich; die zugehörige Loxodrome hat dann die Ordnung $N = 2|r| - 2$. — Mit der Annahme $r = -4$ etwa ($\lambda:\mu = 1:3$) erhält man wieder eine *Böschungloxodrome* 6. Ordnung, gemäß (6.1) darstellbar durch

$$x = -a \cdot \csc^2 \varphi, \quad y = -\frac{2a}{3} \cot^3 \varphi, \quad z = -2\lambda a \cdot \csc^3 \varphi. \quad (7.3)$$

Diese in Abb. 4 wiedergegebene Sextik ist mit der bei Strubecker [4] als Beispiel 3 angeführten Loxodrome identisch. Sie stellt in mancher Hinsicht ein Seitenstück zur Böschungslinie (7.1) dar, denn auch sie verläuft auf einem *Hyperboloid*, allerdings auf einem zweischaligen und dreiachsigen, nämlich

$$12 \left(x + \frac{a}{2} \right)^2 + 9y^2 - \frac{z^2}{\lambda^2} + a^2 = 0. \quad (7.4)$$

Sie erscheint im Aufriß als *Neilsche Parabel* $z^2/x^3 = \text{const.}$, und ebenso im Grundriß, der durch $9ay^2 = -4(x+a)^3$ beschrieben wird. Im Kreuzriß hingegen tritt eine Art von „Pseudoastroide“ $(z/\lambda)^{2/3} - (3y)^{2/3} = (2a)^{2/3}$ auf; es ist dies die Evolute der Hyperbel $9\lambda^2 z^2 - y^2 = 36\lambda^4 a^2/(1+9\lambda^2)^2$. Dementsprechend weist auch die Sextik (7.3) vier eigentliche Spitzen auf; die auf der Loxodromenachse $x = z = 0$ liegenden sind jedoch konjugiert-imaginär ($y = \pm 2ia/3$); reell sind nur die (zu $\varphi = \pm \pi/2$ gehörigen) mit den Koordinaten $x = -a$, $y = 0$, $z = \mp 2\lambda a$. Im Gegensatz zu der in Satz 4 genannten (zur vorliegenden kollinearen) Böschungslloxodrome kommt hier die zweite Spitzengerade ($x+a=y=0$) als zusätzliche Loxodromenachse nicht in Frage, weil sie vollisotrop ist.

Ein einfaches transzendentes Beispiel stellt sich für $r=0$ ($\lambda:\mu = -1:1$) ein. Die durch

$$x = a \cdot \sin^2 \varphi, \quad y = -a(\varphi + \sin \varphi \cos \varphi), \quad z = 2\lambda a \cdot \sin \varphi \quad (7.5)$$

beschriebene, auf einem *parabolischen Zylinder* $z^2 = 4\lambda^2 ax$ mit der Achsenebene π_1 verlaufende Böschungslinie erscheint im Grundriß als *gemeine Zykloide* und ist als *euklidische Böschungslloxodrome* wohlbekannt [6]; sie durchsetzt nämlich das von der Fokalachse $x = \lambda^2 a$, $z = 0$ getragene Ebenenbüschel unter dem konstanten euklidischen Kurswinkel $\gamma = \arctg \lambda$, welcher mit dem euklidischen Böschungswinkel übereinstimmt.

Zu erwähnen wäre schließlich noch die Annahme $r = -3$ ($\lambda:\mu = 1:2$), weil sie auf eine andere bekannte (transzendente)

Böschungslloxodrome führt. Sie wird beschrieben durch

$$x = \frac{a}{\sin \varphi}, \quad y = -\frac{a}{2} \left(\frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi} + \ln \tg \frac{\varphi}{2} \right), \quad z = -\frac{\lambda a}{\sin^2 \varphi}, \quad (7.6)$$

verläuft auf dem *parabolischen Zylinder* $\lambda x^2 + az = 0$ und tritt bei Strubecker [4] als Beispiel 2 auf, der bemerkt, daß ihr Grundriß die Evolute einer Kettenlinie ist.

8. Ebene Loxodromen

Unter der Annahme verschwindender Böschung $\mu = 0$ gelangt man zu den *ebenen Loxodromen*, die gemäß (4.14) durch $r = -1$ gekennzeichnet sind. Im Anschluß an Abschnitt 4 erhält man Loxodromen in Ebenen, die zur Loxodromenachse a_1 ($x = z = 0$) schräg stehen, im Anschluß an Abschnitt 6 solche in zu a_1 parallelen Ebenen. Da sich das maßgebende Integral elementar auswerten läßt, ergeben sich in jedem Fall explizite Parameterdarstellungen. Bedenkt man des weiteren, daß jene perspektiven Affinitäten mit vollisotropen Affinitätsstrahlen, welche die Kurvenebene punktweise festlassen, das absolute Geradenpaar in sich überführen und den Kurswinkel λ bloß proportional verändern, so erkennt man, daß es sich durchwegs um *unendlichfache Loxodromen* handeln wird, deren Achsen jeweils ein Strahlbüschel erfüllen.

Im ersten Fall erhält man über (4.20) die in der Ebene $z = my$ verlaufenden Loxodromen mit dem Grundriß

$$x = \frac{2a^{p+1}}{p^2+1}, \quad y = \frac{a^p}{n(p^2+1)} [(n-1)p^2 - (n+1)]. \quad (8.1)$$

Übt man noch die vollisotrope Scherung $z' = z - my$ aus, so gelangt die Kurve in die Grundebene $z' = 0$, und es gilt

Satz 5: Die isotropen Loxodromen in zur Achse schrägen Ebenen werden repräsentiert durch die in der Grundebene $z = 0$ verlaufenden Kurven (8.1). Jede von ihnen durchsetzt mit beliebig vorgebarem Kurswinkel λ das Ebenenbüschel mit der Achse $x = 0$, $z = n\lambda y$, ist also ∞^1 -

fache Loxodrome. Diese Kurven sind Orthogonaltrajektorien linearer Kreisreihen und als solche identisch mit reellen euklidischen Loxodromen zweier konjugiert-imaginären Ebenenbüschel mit den Achsen $y = 0$, $z = \pm ix$.

Der letzte Teil des Satzes ergibt sich aus dem Vergleich der Darstellung (8.1) mit den gleichartigen Formeln (14) in [5], wo der Verfasser im Rahmen einer Untersuchung der ebenen euklidischen Loxodromen — die sich im allgemeinen als vierfache erweisen — auch jenem Grenzfall Beachtung geschenkt hat, in welchem zwei Achsen zu Minimalgeraden werden. Die dort erhaltenen Kurven waren durch die Eigenschaft gekennzeichnet, daß die Tangentenstrecke zwischen dem Berührungspunkt und einer bestimmten Koordinatenachse zu der von der Tangente auf der Achse abgeschnittenen Strecke in einem konstanten Verhältnis steht. Diese Eigenschaft läßt sich auch hier für die Kurven (8.1) unschwer nachweisen. Bezeichnet O den Koordinatenursprung, P einen Kurvenpunkt und Q den der y -Achse angehörenden Punkt der Tangente in P , so liest man aus der Tangentengleichung (4.5) mit Hinblick auf (4.12) für die Koordinaten $x=0$, $y=q$ ab. Die Tangentenstrecke PQ kann als Abstand des Punktes Q von der Kurvennormale (4.6) aufgefaßt werden und ergibt sich mit $\dot{p}-q \cos \varphi = \dot{q} \sin \varphi$. Gemäß (4.16) und (4.17) hat man mit $r = -1$

$$\dot{q} = -\frac{a}{\sin \varphi} \operatorname{tg}^n(\varphi/2), \quad q = -\frac{a}{n} \operatorname{tg}^n(\varphi/2), \quad (8.2)$$

und daher für das gesuchte Verhältnis:

$$PQ:OQ = \dot{q} \sin \varphi : q = n:1. \quad (8.3)$$

Schlägt man nun um Q einen Kreis durch P , so schneidet dieser die Kurve rechtwinklig. Die von diesen Kreisen erfüllte Schar verträgt wegen der Proportionalität (8.3) sämtliche zentrischen Ähnlichkeiten von O aus und kann daher als „lineare Kreisreihe“ bezeichnet werden; sie wird von der Loxodrome (8.1) orthogonal durchsetzt⁵.

⁵ Diese Loxodromen könnten mithin als die Grundrisse der Falllinien eines schiefen Kreiskegels gedeutet werden.

Während die Formel (4.22) für den Krümmungsradius ρ auch im vorliegenden Fall verwendbar bleibt, versagt die Formel (4.21) für die Bogenlänge wegen $\mu = 0$ ($r = -1$); sie ist zu ersetzen durch

$$s = \int \rho d\varphi = (n-1)q - a \int \operatorname{tg}^{n-1}(\varphi/2) d\varphi, \quad (8.4)$$

wobei q aus (8.2) zu entnehmen ist.

Für rationales n fallen die ebenen Loxodromen (8.1) *rational-algebraisch* aus; wird $n = \alpha/\beta$ wieder als gekürzter Bruch natürlicher Zahlen angeschrieben, dann ergibt sich für $n \neq 1$ die Ordnung der Kurve mit $N = \alpha + 2\beta$. Das Aussehen solcher Loxodromen ist für die einfachsten Annahmen $n = 2$ ($N = 4$, kollineare Kardioiden) und $n = 1/2$ ($N = 5$) aus Abb. 2 in [5] zu entnehmen. — Im Ausnahmefall $n = 1$ erhält man über (8.1) als Loxodrome den *Kreis*

$$x^2 + y^2 = 2ax. \quad (8.5)$$

Offensichtlich handelt es sich dabei auch um einen Kreis im Sinne der isotropen Geometrie; seine Punkte haben ja von seinem Zentrum O konstante isotrope Entfernung a . Er berührt in seinem Treffpunkt O mit der Achse a_1 ($x=0$, $z=y$) die durch a_1 legbare isotrope Ebene ($x=0$), und diese kennzeichnende Eigenschaft bleibt bei allen Bewegungen (1.2) erhalten. Es gilt daher

Satz 6: *Jeder isotrope Kreis ist ∞^2 -fache Loxodrome, nämlich bezüglich aller nicht vollisotropen Treffgeraden, welche in seinen isotropen Tangentialebenen verlaufen.*

Diese auch von K. Strubecker [4] hervorgehobene Tatsache ist das isotrope Analogon zur euklidischen Loxodromeneigenschaft der Villarceauxschen Kreisschnitte des Ringtorus, an dessen Stelle jetzt ein vollisotroper Drehzylinder tritt.

Ausständig ist nun noch der Fall von Loxodromen in zur Achse a_1 ($x=z=0$) parallelen Ebenen. Für isotrope Trägerebenen, die mit $x=a$ $=$ a $=$ const angesetzt werden dürfen, erhält man aus der ersten und

dritten Gleichung (4.1) unter Beachtung von $dx = 0$ zunächst $\lambda ds = dz$ und $ds = \pm dy$, also nach Integration nur die Geraden $x = a$, $z = \pm \lambda y + b$, was in Einklang mit Abschnitt 2, IV steht. — Für nichtisotrope Trägerebenen ergibt sich die Antwort durch die Spezialisierung $\mu = 0$ (also $r = -1$) in Satz 3. Gemäß (6.1) hat man

$$x = a \cdot \sin \varphi, \quad y = -a \left(\cos \varphi + \ln \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right) \quad (8.6)$$

als Grundriß der in der Ebene $z = \lambda a$ verlaufenden Loxodrome, bei welcher es sich um eine *gemeine Traktrix* handelt, also um die Schleppkurve einer Geraden (Schleppstrecke a). Da ihre Gestalt unabhängig von der Höhenkote λa ist, gilt der merkwürdige

Satz 7: *Die in der Grundlebene $z = 0$ befindliche gemeine Traktrix (8.6) ist ∞^1 -fache isotrope Loxodrome, nämlich bezüglich aller aus ihrer Asymptote durch vollisotrope Schiebung hervorgehenden Achsen $x = 0$, $z = b$; der zugehörige isotrope Kurswinkel beträgt $\lambda = b/a^6$.*

Diese bemerkenswerte Loxodrome würde sich bei Strubecker [4] mit der Annahme $f(x) = b/x$ in (38) oder für den übergangenen Wert $\tau = -1$ in (71) einstellen. — Mit Hinblick auf die bekannte Tatsache, daß die gemeine Traktrix Meridian der sogenannten Pseudosphäre ist, also der einfachsten Drehfläche konstanter negativer Krümmung, sei bemerkt, daß die euklidischen Loxodromen in achsenparallelen Ebenen als Meridiane der allgemeineren (konischen oder ringartigen) Drehflächen konstanter negativer Krümmung auftreten, wie der Verfasser in [5] gezeigt hat.

Literatur

- [1] Salkowski, E.: Schraubenlinien und Loxodromen. Sb. Math. Ges. Berlin 1908, 83—87.
 [2] Scheffers, G.: Über Loxodromen. Ber. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig 1902, 363—370.

⁶ Den Inhalt der Sätze 5 und 7 hat auch W. Rath in seiner den isotropen Loxodromen gewidmeten Diplomarbeit (TU Wien, 1978) erkannt.

- [3] Strubecker, K.: Differentialgeometrie des isotropen Raumes. I, Sb. Akad. Wiss. Wien 150 (1941), 1—53. — II, Math. Z. 47 (1942), 743—777. — III, Math. Z. 48 (1942), 369—427. — IV, Math. Z. 50 (1945), 1—92.
 [4] Strubecker, K.: Loxodromen im isotropen Raum. Sb. Österr. Akad. Wiss. 184 (1975), 269—305.
 [5] Wunderlich, W.: Über die ebenen Loxodromen. Sb. Österr. Akad. Wiss. 162 (1953), 285—292.
 [6] Wunderlich, W.: Doppelloxodromen mit schneidendem Achsenpaar. Sb. Österr. Akad. Wiss. 164 (1955), 17—34. — Über Loxodromen auf Zylindern 2. Grades. Monatsh. Math. 59 (1955), 111—117. — Kreise als Doppelloxodromen. Arch. Math. 6 (1955), 230—242. — Contributi al problema delle lossodromiche doppie. Rendic. Mat. 15 (1956), 1—12.
 [7] Wunderlich, W.: Algebraische Böschungslinien dritter und vierter Ordnung. Sb. Österr. Akad. Wiss. 181 (1973), 353—376.
 [8] Wunderlich, W.: Integrallose Darstellung der Loxodromen im isotropen Raum. Anz. Österr. Akad. Wiss. 1977/7, 93—96.