Mechanism and Machine Theory, Vol. 15, pp. 5–8
Pergamon Press Ltd., 1980. Printed in Great Britain

Nomogramme für die Wattsche Geradführung

W. Wunderlich†

Eingegangen am 18 Dezember 1978

Zusammenfassung

Zur raschen Synthese von Wattschen Geradführungen vorgeschriebener Länge und Güte werden zwei Nomogramme bereitgestellt. Sie beruhen auf Optimierungsformeln, die in einer früheren Arbeit abgeleitet wurden [1].

1. Wattsches Gelenkviereck

DIE KLASSISCHE, aber immer noch aktuelle Geradführung von James Watt (1784) wird durch eine gleichschenklige *Doppelschwinge LABM* mit den Armlängen $LA = MB = a$ und der Koppel $AB = 2b$ vermittelt. Wird das Getriebe in $L(-e, f)$ und $M(e, -f)$ mit $e \approx b$ und $f \approx a$ gelagert, so beschreibt der Mittelpunkt C der Koppel eine achterförmige Koppelkurve 6. Ordnung, deren flacher Teil bei gehöriger Dimensionierung in einer beträchtlichen Umgebung des Ursprungs nur wenig von der x-Achse abweicht und daher für eine *angenäherte Geradführung* brauchbar ist (vgl. die Nebenfigur in Bild 1). Bei richtiger Abstimmung der Größen a, b, e und f kann für jede gewünschte *Länge* l der Geradführung die Einhaltung einer beliebig kleinen *Maximalabweichung* $\pm h$ erreicht werden.

Die für eine solche Aufgabe der Getriebesynthese benötigten Formeln wurden, gestützt auf das Optimierungsprinzip von P. L. Tschebyschew, in einer vorangegangenen Arbeit abgeleitet [1]. Die Formeln benützen zwei Parameter p und q, die der Einschränkung $p^2 < q < 2p^2$ unterliegen, und lauten:

$$
\begin{aligned}
&a^2 = \frac{q^2}{q - p^2}, \quad d^2 = \frac{q^2 + p(2p^2 - q)\sqrt{q}}{q - p^2}, \quad f^2 = \frac{1}{4}(2d^2 - 3p^2 - 2q); \\
&e = \frac{p(q - p^2)}{4fh}, \quad b^2 = a^2 - d^2 + e^2 + f^2, \quad l = 4p.
\end{aligned} \tag{1}
$$

Die Hilfsgröße d bedeutet den Zentralabstand der beiden auf dem Steg LM vorhandenen isolierten Doppelpunkte der Koppelkurve.

Obwohl diese Formeln, wie ein aus der Praxis [2] entnommenes numerisches Beispiel in [1] lehrt, ohne Schwierigkeit anzuwenden sind, erscheint es -- einer Anregung von J. Volmer folgend -- doch nützlich, einschlägige Nomogramme zu entwickeln, um dem Konstrukteur einen raschen Überblick über die bestehenden Möglichkeiten zu geben.

2. Netztafel

Um die Anzahl der Variablen zu verringern, wurde zunächst die *Länge* der Geradführung mit $l = 100$ (mm) normiert. Hierdurch ist der erste Parameter mit $p = 25$ fixiert. Für die Praxis erschien es ausreichend, sich auf Armlängen a zwischen 100 und 300 zu beschränken. Mit einigen Werten aus diesem Intervall wurden nun aus der ersten Gruppe der Gleichungen (1) die Größen q, d, f und a–f berechnet; q bleibt dabei etwa im Bereich von 670 bis 629, a–f zwischen 8,4 und 2,6.

†Professor für Geometrie, Technische Universität Wien, Österreich.

Für verschiedene Annahmen der zugelassenen Maximalabweichung oder *Güte* h von 0,0005 bis 0,2 wurden dann mittels der zweiten Gruppe der Gleichungen (1) die Größen e, b und $b-e$ bestimmt, wobei aus praktischen Erwägungen nur b-Werte zwischen 10 und 200 berücksichtigt wurden; $b-e$ variiert dabei ungefähr zwischen 0,004 und 0,6.

Die in einem *doppelt-logarithmischen* (b, a)*-Raster* eingetragenen Kurven $h = \text{const}$ und $b-e = \text{const}$ liefern dann die in Bild 1 wiedergegebene *Netztafel*. Dieselbe gestattet für jede innerhalb des erfaßten Bereiches ins Auge gefaßte Wahl der Getriebeabmessungen a und b die Güte h der Geradführung über eine Länge $l = 100$ abzulesen, ferner mittels der ebenfalls zu entnehmenden Differenzen $b-e$ und $a-f$ die Koordinaten $\mp e$ und $\pm f$ der Lagerpunkte L und M anzugeben. -- Für eine von 100 verschiedene Geradführungslänge l sind alle Werte bloß proportional abzuändern.

3. Leitertafel

Die Feststellung, daß die Niveaulinien $h = \text{const}$ und $b-e = \text{const}$ in der doppelt-logarithmischen Netztafel Bild 1 fast geradlinig ausfielen, legte es nahe, entsprechende Potenzgesetze ausfindig zu machen. Die Ursache für das genannte Phänomen war offenbar in dem Umstand zu suchen, daß sich in dem betrachteten Bereich der Wert von q nur wenig von p^2 unterschied.

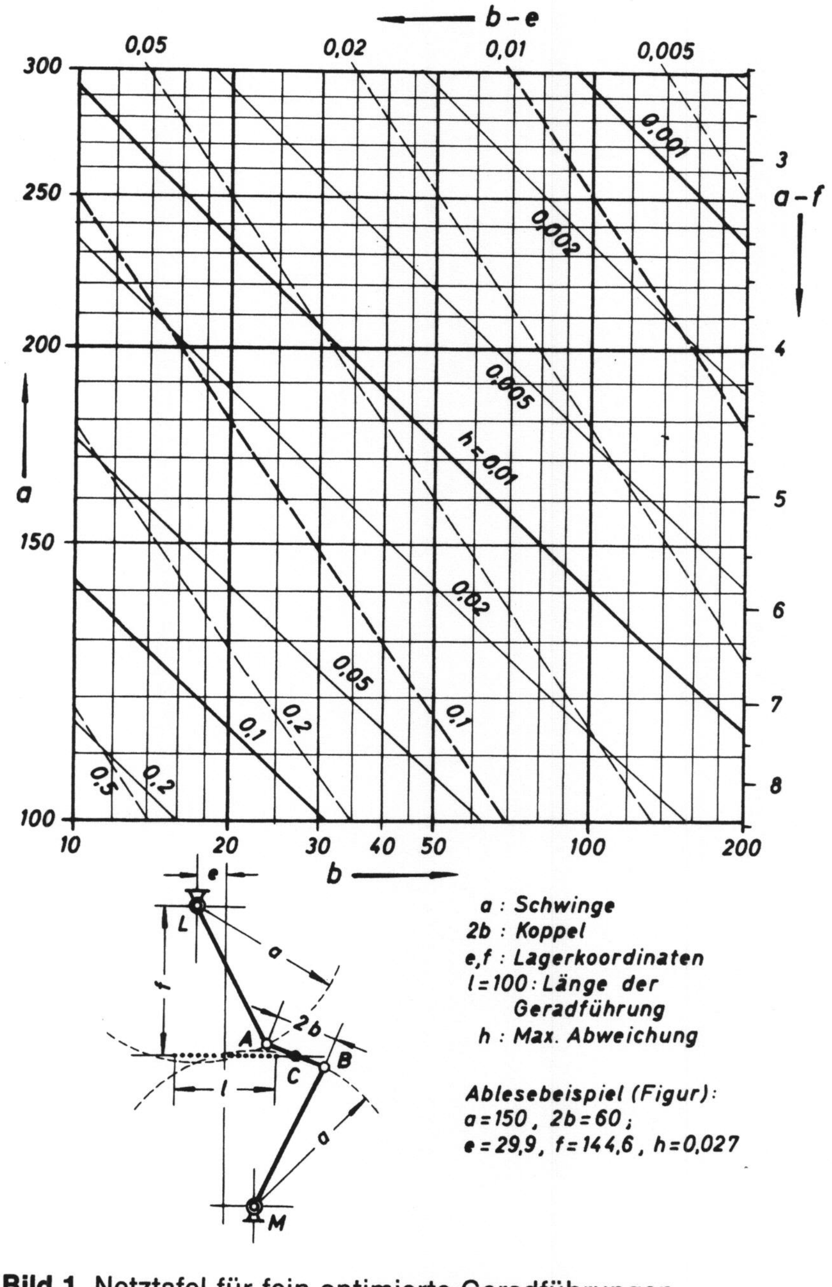

Bild 1. Netztafel für fein optimierte Geradführungen.

In der Tat führt der dadurch motivierte Ansatz

$$q = p^2 + u^2, \quad u \text{ klein} \tag{2}$$

über einfache Potenzreihenentwicklungen zu

$$\begin{gathered} a = \frac{p^2}{u} + u, \quad d^2 = \frac{2p^2}{u^2} + \frac{3}{2}p^2 + \frac{3}{8}u^2 + \ldots, \quad f = \frac{p^2}{u} - \frac{u}{4} - \ldots; \\ e = \frac{u^3}{4ph}\left(1 + \frac{u^2}{4p^2} + \ldots\right), \quad b^2 - e^2 = \frac{5}{16}u^2 + \ldots, \end{gathered} \tag{3}$$

und damit zu den einfachen, jedoch gröberen Näherungsformeln

$$a \approx f \approx \frac{p^2}{u}, \quad a - f \approx \frac{5}{4}u; \quad b \approx e \approx \frac{u^3}{4ph}, \quad b - e \approx \frac{5ph}{8u}. \tag{4}$$

Drückt man weiterhin die Hilfsgröße u durch a und $p = l/4$ aus, so erhält man die bequemen *Faustformeln*

$$a - f \approx \frac{5l^2}{64a}, \quad b \approx e \approx \frac{l^5}{4096a^3h}, \quad b - e \approx \frac{5l^4}{8192a^2b}. \tag{5}$$

Da die Formeln (5) durchwegs den Charakter von *Potenzgesetzen* haben, so lassen sie sich nach geläufigen Verfahren der Nomographie durch *Leitertafeln* mit parallelen, durchwegs *logarithmischen Skalen* darstellen [3, 4]. Hierbei mag man wieder durch die Annahme $l = 100$ normieren und dieselben Bereiche wie vorhin vorsehen, also $100 \leqq a \leqq 300$ und $10 \leqq b \leqq 200$.

Auf diese Weise entstand die übersichtliche, in Bild 2 wiedergegebene Leitertafel. Ihre

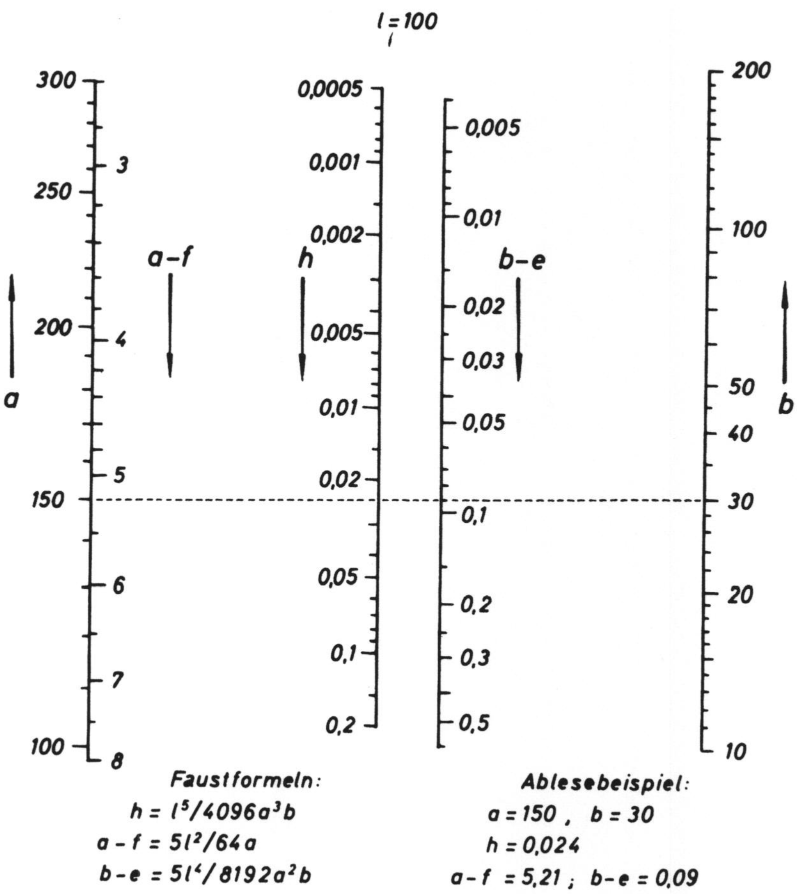

Bild 2. Leitertafel für grob optimierte Geradführungen.

Benützung ist aus dem eingetragenen Ablesebeispiel ersichtlich, das sich auf die schon in[1] behandelte Aufgabe von R. Walther und G. Wagenzink[2] bezieht.

Literatur

1. W. Wunderlich, Approximate optimization of Watt's straight-line mechanism. *Mechanism and Mathine Theory* **13**, 155–160 (1978).
2. R. Walther–G. Wagenzink, Anwendung einer Viergelenkkette für eine Werkzeuggeradführung. *Maschinenbautechnik* **9**, G91–93 (1960).
3. W. Meyer zur Capellen, *Leitfaden der Nomographie.* Springer, Berlin (1953).
4. A. S. Levens, *Nomography.* Wiley, New York/Chapman & Hall, London; 2nd edn. (1959).

NOMOGRAMS FOR WATT'S STRAIGHT-LINE LINKAGES

W. Wunderlich

Abstract - Two nomograms for a quick synthesis of Watt's straight-line linkages are presented. They are based upon optimization formulas which were derived, by means of Chebyshev's principle, in a foregoing paper [1]. After having chosen the arm length LA = MB = a and the coupler AB = 2b of a double-rocker mechanism LABM, the nomograms give immediately the position coordinates of the pivots L(-e,f), M(e,-f) and the maximal deviation $\pm h$ for an approximate straight-line motion over a normed length l = 100.