Mh. Math. 89, 163—170 (1980)

Monatshefte für Mathematik

Orthogonale Erzeugendenpolygone auf einschaligen Hyperboloiden

Von

Walter Wunderlich, Wien

Mit 1 Abbildung

(Eingegangen am 7. Oktober 1979)

Abstract. Orthogonal Generator Polygons on Hyperboloids. The question whether there exist closed orthogonal polygons formed by generators of a given hyperboloid is a poristic problem: For a prescribed number $2n$ of sides there exists either no polygon of the required kind or an infinite continuous set of such polygons. After having led back the solution to the classic theorem of Poncelet, closure conditions are developed for the cases $n = 2, 3, 4, 5$ and 6.

1. Betrachtet wird im dreidimensionalen, auf kartesische Koordinaten x, y, z bezogenen euklidischen Raum ein reelles *einschaliges Hyperboloid* H:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a \geqslant b > 0,\ c > 0. \tag{1.1}$$

Gestützt auf die Parameterdarstellung der Kehlellipse k,

$$x = a\cos u,\ y = b\sin u,\ z = 0, \tag{1.2}$$

können die bezüglich der z-Achse rechtsgewundenen Erzeugenden e mittels eines Kotenparameters t erfaßt werden durch

$$x = a(\cos u - t\sin u),\ y = b(\sin u + t\cos u),\ z = ct; \tag{1.3}$$

analog die linksgewundenen Erzeugenden f durch

$$x = a(\cos v + t\sin v),\ y = b(\sin v - t\cos v),\ z = ct. \tag{1.4}$$

Ein *orthogonales Erzeugendenpaar* $e\,(u = \text{const})$, $f\,(v = \text{const})$ ist demnach gekennzeichnet durch die Bedingung

$$a^2 \sin u \sin v + b^2 \cos u \cos v = c^2 \tag{1.5}$$

oder

$$(a^2 + b^2) \cos (v - u) + (b^2 - a^2) \cos (v + u) = 2\,c^2 . \tag{1.6}$$

Die von e und f aufgespannte Tangentialebene von H schneidet die Grundebene $z = 0$ nach der ,,Kehlspur"

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & a \cos u & a \cos v \\ y & b \sin u & b \sin v \end{vmatrix} = 0, \tag{1.7}$$

also

$$a\,b \sin (v - u) - b\,x (\sin v - \sin u) + a\,y (\cos v - \cos u) = 0 \tag{1.8}$$

oder

$$\frac{x}{a} \cos \frac{v+u}{2} + \frac{y}{b} \sin \frac{v+u}{2} = \cos \frac{v-u}{2} . \tag{1.9}$$

Ihr Pol bezüglich der Kehlellipse k (1.2) gibt den Grundriß des Schnittpunktes T von e und f an. Mit Benützung der Abkürzungen

$$\varphi = \frac{v+u}{2}, \; \psi = \frac{v-u}{2} \tag{1.10}$$

findet man so für die Koordinaten von T die Formeln

$$x = a \cos \varphi / \cos \psi, \; y = b \sin \varphi / \cos \psi, \; z = c \operatorname{tg} \psi, \tag{1.11}$$

wobei φ und ψ gemäß (1.6) durch

$$(a^2 + b^2) \cos 2\,\psi + (b^2 - a^2) \cos 2\,\varphi = 2\,c^2 \tag{1.12}$$

verknüpft sind.

Bildet man die Quadratsumme der Koordinaten (1.11), so ergibt sich mit Beachtung von (1.12) die parameterfreie Beziehung

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2 - c^2 . \tag{1.13}$$

Dies ist die Gleichung der Mongeschen *Direktorkugel* L des Hyperboloids H, die aus allen Raumpunkten besteht, aus welchen sich Tripel orthogonaler Tangentialebenen an H legen lassen [3, S. 186]. In jedem Punkt P von L gibt es ∞^1 solcher Tripel, die den Berührungskegel aus P an H umhüllen; es ist dies ein metrisch spezieller, meist nach G. MONGE benannter quadratischer Kegel [2]. Zur Menge der Punkte P gehören naturgemäß auch die Schnittpunkte T der orthogonalen Erzeugendenpaare von H. Damit hat man

Satz 1: *Die Schnittpunkte orthogonaler Erzeugendenpaare eines einschaligen Hyperboloids H (1.1) erfüllen die Schnittkurve 4. Ordnung l von H mit der Direktorkugel L (1.13).*

Diese Quartik l ist zu den Hauptebenen von H symmetrisch und für gewöhnlich von I. Art; für $a = b$ oder $a = c$ oder $b = c$ zerfällt sie in zwei Kreise.

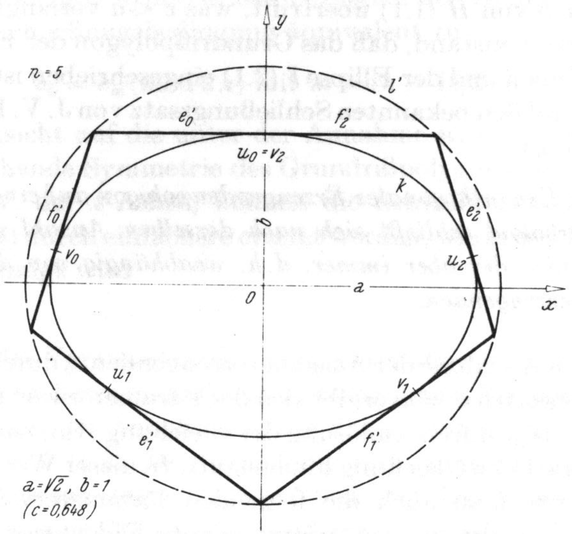

Abb. 1

2. Zu jeder Erzeugenden e der ersten Schar des Hyperboloids H gibt es zwei sie rechtwinklig treffende Erzeugende f aus der zweiten Schar und umgekehrt, wie aus (1.5) zu entnehmen ist. Ausgehend von einer beliebigen Erzeugenden e_0 läßt sich mithin ein *orthogonales Erzeugendenpolygon* $\ldots e_{-1} f_{-1} e_0 f_0 e_1 f_1 \ldots$ konstruieren, das zickzackförmig zwischen dem oberen und dem unteren Teil der Quartik l

verläuft und sich im allgemeinen nicht schließen wird. In der Normalprojektion auf die Kehlebene $z = 0$ („Grundriß") bilden sich die Seiten eines solchen Polygons auf Tangenten der Kehlellipse k (1.2) ab, die ja den Umriß des Hyperboloids H darstellt; die Polygonecken kommen hingegen im Bild auf die (doppelt überdeckte) Grundrißellipse l' von l zu liegen (Abb. 1). Für l' ergibt sich durch Elimination von z aus (1.1) und (1.13) die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2}\cdot\frac{a^2+c^2}{a^2+b^2}+\frac{y^2}{b^2}\cdot\frac{b^2+c^2}{a^2+b^2}=1\,. \tag{2.1}$$

Die Quartik $l = H \cap L$ und damit das Erzeugendenpolygon fallen nur dann reell aus, wenn der Radius der Kugel L (1.13) die kleinere Halbachse b von H (1.1) übertrifft, was $c < a$ verlangt.

Aus dem Umstand, daß das Grundrißpolygon der Ellipse k (1.2) umgeschrieben und der Ellipse l' (2.1) eingeschrieben ist, folgt unter Berufung auf den bekannten Schließungssatz von J. V. PONCELET [1, S. 46ff] sofort

Satz 2: ***Ein orthogonales Erzeugendenpolygon auf einem einschaligen Hyperboloid schließt sich nach derselben Anzahl von Schritten entweder nie oder aber immer, d. h. unabhängig von der Wahl der Ausgangserzeugenden.***

3. Nach Annahme der Ausgangserzeugenden e_0 durch Wahl ihres Parameterwertes $u = u_0$ ergibt sich der Parameterwert $v = v_0$ für die Nachbarseite f_0 durch Auflösung der Gleichung (1.5) nach v, was auf eine quadratische Gleichung hinausläuft. In dieser Weise fortschreitend, könnte man auch die folgenden Parameterwerte $u_1 \neq u_0$, $v_1 \neq v_0$ usf. ermitteln, wobei jetzt bereits Eindeutigkeit herrscht. Hierzu empfehlen sich jedoch eher *Rekursionsformeln*, die durch Differenzenbildung der Gleichungen (1.5) für $u = u_i$, $v = v_i$ und $u = u_{i+1}$, $v = v_i$ bzw. $u = u_{i+1}$, $v = v_i$ und $u = u_{i+1}$, $v = v_{i+1}$ zu gewinnen sind. Sie lauten:

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(u_{i+1}+u_i)=\frac{a^2}{b^2}\operatorname{tg}v_i \quad \text{bzw.} \quad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(v_{i+1}+v_i)=\frac{a^2}{b^2}\operatorname{tg}u_{i+1}\,. \tag{3.1}$$

Zur Aufstellung der *Schließungsbedingung* für eine bestimmte, naturgemäß gerade Seitenzahl $2n$ des Polygons genügt es zufolge Satz 2, etwa von $u_0 = \pi/2$ auszugehen, was sicher eine Ausgangserzeugende e_0 mit einer reellen Anschlußerzeugenden f_0 gewährleistet.

Deren Parameterwert v_0 ergibt sich nämlich gemäß (1.5) aus

$$\sin v_0 = c^2/a^2 < 1\,. \tag{3.2}$$

Die folgenden Parameterwerte sind dann rekursiv mittels (3.1) zu berechnen.

Bei der Schließung ist grundsätzlich zu unterscheiden, ob das Grundrißpolygon einfach oder doppelt überdeckt wird. Im ersten Fall stimmt seine Seitenzahl mit jener des Erzeugendenpolygons überein, und die Schließungsbedingung ist äquivalent zu

$$u_0 = u_n \,(\mathrm{mod}\, 2\pi). \tag{3.3}$$

Im zweiten Fall, der nur bei ungeradem n eintreten kann, ist das Erzeugendenpolygon symmetrisch bezüglich der Kehlebene $z = 0$. Hier ist die Schließungsbedingung äquivalent zu

$$u_0 = v_m \,(\mathrm{mod}\, 2\pi) \text{ mit } m = (n-1)/2. \tag{3.4}$$

Mit Rücksicht auf die unter der Annahme $u_0 = \pi/2$ (oder auch $u_0 = 0$) bestehende Symmetrie des Grundrißpolygons bezüglich der y-Achse (bzw. der x-Achse) können die Schließungsbedingungen (3.3) oder (3.4) durch einfachere ersetzt werden, wie in den folgenden Beispielen gezeigt wird.

4. Unter der Voraussetzung eines *einfach überdeckten Grundrißpolygons* besteht dieses im Falle eines orthogonalen *Erzeugendenvierseits* ($2n = 4$) bei der Annahme $u_0 = \pi/2$ aus den Scheiteltangenten der Kehlellipse k (1.2). Die Schließungsbedingung verlangt somit $v_0 = \pi$ (oder 0), was zufolge (3.2) $c = 0$ bedeutet. Das Hyperboloid H artet also in diesem Falle zu dem außerhalb der Ellipse k befindlichen Gebiet der Ebene $z = 0$ aus, und die Schar der Erzeugendenvierseite wird von den k umschriebenen Rechtecken gebildet, deren Ecken den Direktorkreis $l = l'$ mit dem Radiusquadrat $a^2 + b^2$ erfüllen.

Orthogonale *Erzeugendensechsseite* ($2n = 6$) existieren unter der zulässigen Annahme $u_0 = 0$ für $v_0 + u_1 = \pi$, was gemäß (1.5) über

$$b^2 \cos v_0 = a^2 \sin^2 v_0 - b^2 \cos^2 v_0 = c^2 \tag{4.1}$$

auf die Bedingung

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{c^2} \tag{4.2}$$

führt. Hierdurch sind bekanntlich die sogenannten *gleichseitigen Hyperboloide* mit ∞^1 Tripeln orthogonaler Erzeugenden in jeder der beiden Scharen gekennzeichnet [3, S. 177]. Je zwei solche bezüglich des Mittelpunkts spiegelbildlich angeordnete Tripel bilden ein orthogonales Erzeugendensechsseit.

Orthogonale *Erzeugendenachtseite* ($2n = 8$) gibt es, wenn $u_0 = 0$ den Wert $u_1 = \pi/2$ nach sich zieht. Dies führt gemäß (1.5) über

$$b^2 \cos v_0 = a^2 \sin v_0 = c^2 \tag{4.3}$$

auf die Bedingung

$$\frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} = \frac{1}{c^4}. \tag{4.4}$$

Für das Vorhandensein von orthogonalen *Erzeugendenzehnseiten* ($2n = 10$) ist bei Ausgang von $u_0 = 0$ das Bestehen der Relation $u_1 + v_1 = \pi$ maßgebend. Dies führt gemäß (1.5) über

$$\begin{aligned} b^2 \cos v_0 &= a^2 \sin v_0 \sin v_1 - b^2 \cos v_0 \cos v_1 = \\ &= a^2 \sin^2 v_1 - b^2 \cos^2 v_1 = c^2 \end{aligned} \tag{4.5}$$

durch Elimination von v_0 und v_1 zunächst auf

$$\begin{aligned} a^2 (b^2 + c^2)\sqrt{b^2 - c^2} &= b^2 c^2 (\sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{a^2 - c^2}) = \\ &= b^2 c^2 (b^2 + c^2) \big/ (\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a^2 - c^2}). \end{aligned} \tag{4.6}$$

Nach Kürzung durch $b^2 + c^2$ und zweimaligem Quadrieren erhält man die (erwartungsgemäß in a und b symmetrische) Bedingung

$$(a^4 - b^4)^2 c^8 + 4 a^4 b^4 (a^2 + b^2) c^6 - 2 a^4 b^4 (a^2 + b^2)^2 c^4 + a^8 b^8 = 0. \tag{4.7}$$

Die existierende Lösung $c^2 = a^2 b^2 / (a^2 + b^2)$ ist jedoch nicht brauchbar, da sie zu (4.2) äquivalent ist und daher Sechsseite liefert. Nach Abspaltung des entsprechenden Wurzelfaktors verbleibt schließlich als entscheidende Bedingung:

$$(a^2 + b^2)(a^2 - b^2)^2 c^6 + (a^2 + b^2)^2 a^2 b^2 c^4 - (a^2 + b^2) a^4 b^4 c^2 - a^6 b^6 = 0. \tag{4.8}$$

Orthogonale *Erzeugendenzwölfseite* ($2n = 12$) treten auf, falls $u_0 = 0$ den Wert $v_1 = \pi/2$ liefert. Dies führt gemäß (1.5) über

$$b^2 \cos v_0 = a^2 \sin v_0 \sin u_1 + b^2 \cos v_0 \cos u_1 = a^2 \sin u_1 = c^2 \tag{4.9}$$

nach Elimination von v_0 und u_1 zunächst auf

$$a^2 \sqrt{b^4 - c^4} + b^2 \sqrt{a^4 - c^4} = a^2 b^2, \tag{4.10}$$

und nach Fortschaffen der Quadratwurzeln schließlich zu

$$(a^4 - b^4)^2 c^8 + 2 a^4 b^4 (a^4 + b^4) c^4 - 3 a^8 b^8 = 0. \tag{4.11}$$

5. Unter der Voraussetzung eines *doppelt überdeckten Grundrißpolygons* gilt im Falle eines orthogonalen *Erzeugendensechsseits* ($n = 3$) bei Ausgang von $u_0 = \pi/2$ die Schließungsbedingung $v_0 + u_1 = 3\pi$. Dies führt gemäß (1.5) über

$$a^2 \sin v_0 = a^2 \sin^2 v_0 - b^2 \cos^2 v_0 = c^2 \tag{5.1}$$

auf $c^2 = a^2$, was keine brauchbaren Lösungen liefert, weil die Direktorkugel L (1.13) den Radius b erhält, und die Quartik l daher in zwei imaginäre Kreise zerfällt.

Orthogonale *Erzeugendenzehnseite* ($n = 5$) verlangen mit $u_0 = \pi/2$ die Relation $u_1 + v_1 = 3\pi$ (Abb. 1). Dies führt gemäß (1.5) über

$$\begin{aligned} a^2 \sin v_0 &= a^2 \sin v_0 \sin u_1 + b^2 \cos v_0 \cos u_1 = \\ &= a^2 \sin^2 u_1 - b^2 \cos^2 u_1 = c^2 \end{aligned} \tag{5.2}$$

ähnlich wie bei der Herleitung von (4.8) auf die Bedingung

$$\begin{aligned} &(a^2 + b^2)(a^2 - b^2)^2 c^6 - (a^2 + b^2)^2 a^2 b^2 c^4 - \\ &- (a^2 + b^2) a^4 b^4 c^2 + a^6 b^6 = 0. \end{aligned} \tag{5.3}$$

6. Eine allgemeine Schließungsbedingung für beliebiges n ist — abgesehen von den Ansätzen (3.3) bzw. (3.4) und bei den Drehhyperboloiden ($a = b$) — offenbar nicht angebbar.

Auch eine Ausdehnung der Betrachtung auf *hyperbolische Paraboloide*

$$z = \frac{x^2}{4a} - \frac{y^2}{4b}, \quad a \geqslant b > 0 \tag{6.1}$$

ist nicht möglich, weil es hier zu jeder Erzeugenden e der ersten Schar nur eine einzige orthogonale Erzeugende f in der zweiten Schar gibt. Mit Hilfe der Parameterdarstellung

$$x = \sqrt{a}\,(u + v), \quad y = \sqrt{b}\,(u - v), \quad z = u v \tag{6.2}$$

ergibt sich nämlich als Orthogonalitätsbedingung für die Erzeugenden $u = \text{const}$ und $v = \text{const}$ die Relation

$$uv = b - a. \tag{6.3}$$

Als Ort der Schnittpunkte rechtwinkliger Erzeugendenpaare tritt mithin die Schichtenhyperbel l

$$z = b - a \tag{6.4}$$

auf (die für das orthogonale Paraboloid $a = b$ in die Scheitelerzeugenden $x \pm y = z = 0$ zerfällt). Erzeugendenpolygone der gesuchten Art existieren demnach auf Paraboloiden überhaupt nicht.

Zusatz bei der Korrektur: Die Zehnecksbedingungen (4.8) bzw. (5.3) lassen sich übersichtlicher schreiben in der Form

$$\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \mp \frac{1}{c^2}\right)^3 = 4\left(\frac{1}{a^6} + \frac{1}{b^6} \mp \frac{1}{c^6}\right).$$

Literatur

[1] DINGELDEY, F.: Kegelschnitte und Kegelschnittsysteme. Enzykl. Math. Wiss. IIIC1. Leipzig: Teubner. 1921—1928.

[2] GRÜNWALD, A.: Die bifokale Abbildung von Kreiskegeln auf die Punkte der Ebene. Sitzber. Böhm. Ges. Wiss. 1910, 1—60.

[3] STAUDE, O.: Flächen 2. Ordnung und ihre Systeme und Durchdringungskurven. Enzykl. Math. Wiss. IIIC2. Leipzig: Teubner. 1921—1928.

Prof. W. WUNDERLICH
Institut für Geometrie
Technische Universität
Gußhausstraße 27
A-1040 Wien, Österreich

Printed in Austria