IFToMM - JUGOSLOVENSKI NACIONALNI KOMITET

III JUGOSLOVENSKI SIMPOZIJUM
MAŠINE I MEHANIZMI, UNIVERZITETSKA
ISTRAŽIVANJA I PRIMENA U INDUSTRIJI

Mostar, 22,23.i 24. maj 1980.
Rad broj: A-3 str.23÷34

# UMWENDUNG EINER REGELMÄSSIGEN SECHSGLIEDRIGEN TETRAEDERKETTE

Walter WUNDERLICH, Professor
der Geometrie an der Technischen Universität Wien

## 1. Einleitung

Ein starrer Körper besitzt im dreidimensionalen Raum eine Beweglichkeit vom Freiheitsgrad 6. Durch Anbringen eines zylin- drischen Drehgelenks wird die Bewegung auf eine Drehung vom Frei- heitsgrad 1, also um 5 Einheiten reduziert. Bildet man daher eine geschlossene Kette aus n starren Gliedern, wobei je zwei benach- barte durch ein Zylindergelenk verbunden sind, so entsteht bei Fixierung eines Gliedes ein Getriebe mit dem Freiheitsgrad $f = 6(n-1) - 5n = n - 6$. Die Kette wird daher erst ab $n > 6$ eine Deformation gestatten.

Für $n \leq 6$ kann aber bei speziellen Abmessungen trotzdem Beweglichkeit auftreten. Für $n = 3$ besteht naturgemäss stets Starrheit. Für $n = 4$ ist Beweglichkeit vorhanden, falls die Gelenkach- heit. Für n= 4 ... sen parallel sind oder in einem Punkt zusammenlaufen (ebene und sphärische Gelenkvierecke), ferner beim "Isogramm" (windschiefen Parallelogramm) von G.T.BENNETT, dessen Achsen im allgemeinen windschief sind [1]. Das unterschiedliche Verhalten von viergliedrigen Ketten, realisierbar durch Tetraeder, die längs gemeinsamer Kanten gelenkig verbunden sind, wurde in [6] behandelt. Über bewegliche fünfgliedrige Ketten weiss man noch sehr wenig [3]; ein durch Verschmelzung zweier Isogramme gewonnenes Beispiel hat M.GOLDBERG [4] angegeben.

Für sechsgliedrige Ketten hat R.BRICARD [3] ein hinreichendes (jedoch keineswegs notwendiges) Kriterium erkannt: Bilden die sechs Gelenkachsen zwei Trieder, bei welchen die Kanten des einen normal zu den Seitenflächen des anderen sind, so liegt ein zwangläufig bewegliches Getriebe vor. Die Gemeinlote benachbarter Achsen bilden ein geschlossenes Sechseck, das den Schnitt der beiden Trieder darstellt. -- Die Bewegung der Bricardschen Kette ist im allgemeinen recht kompliziert und kaum ausreichend geklärt. Ausgenommen ist lediglich die "regelmässige" Kette mit durchwegs gleichen Achsenabständen, die von V.BRÁT [2] und unlängst wieder von S.KUNZE und H.STACHEL [5] untersucht wurde; hier bilden die beiden Achsentrieder in der Mittelstellung einen Würfel. Dieses "Würfelgetriebe", das auch eine praktische Anwendung gefunden hat (Abschnitt 4), soll nun nochmals von einem anderen Gesichtspunkt aus betrachtet werden.

## 2. Würfelgetriebe

Sei EE'FF' ein zweifach orthogonal-symmetrisches Tetraeder mit den Kantenlängen EE' = FF' = 2c und EF = EF' = E'F = E'F' = b. Der Abstand der einander rechtwinklig kreuzenden Kanten EE' und FF' sei mit a bezeichnet. Es gilt dann die Beziehung $b^2 = a^2+2c^2$.

Dieses Tetraeder werde nun mit seinen Kanten EE' und FF' in zwei unter $60^0$ gegeneinander geneigte Ebenen $\varepsilon_1$ und $\varepsilon_2$ eingepasst, die in kartesischen Koordinaten durch $x \pm y\sqrt{3} = 0$ angesetzt sein mögen. Durch fortgesetzte Spiegelung an den beiden Ebenen entsteht dann wie in einem Kaleidoskop eine Kette aus sechs kongruenten Tetraedern (Abb.1). Bedenkt man, dass die Neigung etwa der Kante EE' noch variabel ist, so erkennt man, dass die Kette eine zwangläufige Deformation gestattet, wenn die Verbindungen längs der gemeinsamen Tetraederkanten gelenkig ausgeführt werden. Dies steht auch in Einklang mit dem Bricardschen



Kriterium, da je zwei benachbarte Gelenkachsen orthogonal sind.[1])

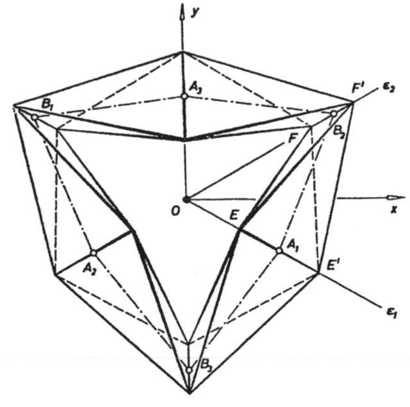

Abb.1

Aus der Abstandsstrecke $A_1B_2$ der Achsen EE' und FF' geht durch die Spiegelungen ein geschlossenes Sechseck $A_1B_2A_3B_1A_2B_3$ mit der Seitenlänge a hervor, dessen Diagonalen $A_1B_1$, $A_2B_2$ und $A_3B_3$ einander aus Symmetriegründen in einem Punkt O der z-Achse begegnen; dieser Punkt wird im folgenden als Koordinatenursprung benützt.

Zur quantitativen Analyse der Bewegung sei der Neigungswinkel der Gelenkachse EE' gegen die xy-Ebene mit $\varphi$ bezeichnet, jener von FF' mit $\varphi'$ (Abb.2). Einheitsvektoren in den Achsenrichtungen können dann angesetzt werden mit

$$(2.1)\qquad \begin{aligned} \underline{e} &= (\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\cos\varphi,\ -\tfrac{1}{2}\cos\varphi,\ -\sin\varphi),\\ \underline{e}' &= (\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\cos\varphi',\ \tfrac{1}{2}\cos\varphi',\ \sin\varphi'). \end{aligned}$$

Die Orthogonalität EE' ⊥ FF' liefert über $\underline{e}\cdot\underline{e}' = 0$ die Relation

$$(2.2)\qquad \operatorname{tg}\varphi\cdot\operatorname{tg}\varphi' = \tfrac{1}{2}.$$

Sind r und r' die Beträge der Ortsvektoren $\underline{r} = OA_1$ bzw. $\underline{r}' = OB_2$, ferner $\psi$ bzw. $\psi' = -\psi$ deren Neigungswinkel gegen die xy-Ebene, so werden diese Vektoren dargestellt durch

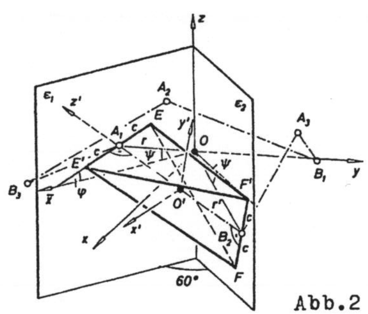

Abb.2

---

1) eine allgemeinere, gleichfalls zwangläufige Kette würde entstehen, wenn der Spiegelungsprozess auf ein beliebiges, in das Ebenenpaar eingepasstes Tetraeder angewendet würde. Hier ist das Bricardsche Kriterium dann nicht mehr erfüllt, weil benachbarte Gelenkachsen nicht orthogonal sind.

$$\underline{r} = \frac{r}{2}(\sqrt{3}\cos\psi,\ -\cos\psi,\ 2\sin\psi),$$
(2.3)
$$\underline{r}' = \frac{r'}{2}(\sqrt{3}\cos\psi,\ \cos\psi,\ -2\sin\psi).$$

Die vorhandenen rechten Winkel $EE' \perp A_1B_2 \perp FF'$ führen dann über $\underline{e}(\underline{r}'-\underline{r}) = \underline{e}'(\underline{r}'-\underline{r}) = 0$ auf die Beziehungen

(2.4) $$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2r-r'}{2(r+r')}\cot\psi,\quad \operatorname{tg}\varphi' = \frac{2r'-r}{2(r+r')}\cot\psi.$$

Die Länge $A_1B_2 = a$ liefert ferner über $(\underline{r}'-\underline{r})^2 = a^2$ die Bedingung

(2.5) $$(r+r')^2 = 3rr'\cos^2\psi + a^2.$$

Das Produkt der Formeln (2.4) ergibt mit Rücksicht auf (2.2):

(2.6) $$2(r+r')^2 = 9rr'\cos^2\psi.$$

Die Elimination von $\psi$ aus (2.5) und (2.6) zieht schließlich die Konstanz der Diagonalenlänge

(2.7) $$d = r+r' = a\sqrt{3}$$

nach sich -- ein merkwürdiger Umstand, der schon in [5] bemerkt wurde und die allgemeine Untersuchung [7] von windschiefen Gelenksechsecken mit schneidenden Diagonalen anregte.

### 3. Knotenbahn

Mit (2.7) folgt aus (2.6) die wichtige Abhängigkeit

(3.1) $$r(d-r)\cos^2\psi = \frac{2}{9}d^2.$$

Sie beschreibt in Polarkoordinaten $r,\psi$ die Bahn $k_o$, welche der "Knotenpunkt" $A_1$ in der Ebene $\varepsilon_1$ bei der Umwendung der Tetraederkette durchläuft. Geht man in $\varepsilon_1$ zu kartesischen Koordinaten $\bar{x} = r\cos\psi$, $z = r\sin\psi$ über, so gelangt man zur Gleichung

(3.2) $$(\bar{x}^2 + z^2)(\bar{x}^2 + \frac{2}{9}d^2)^2 = d^2\bar{x}^4.$$

Bei der Knotenbahn $k_o$ handelt es sich mithin um eine doppelt symmetrische, monozirkulare Kurve 6.Ordnung (Sextik), die aus zwei kongruenten Ovalen besteht (Abb.3) und in O einen isolierten Doppelpunkt hat.

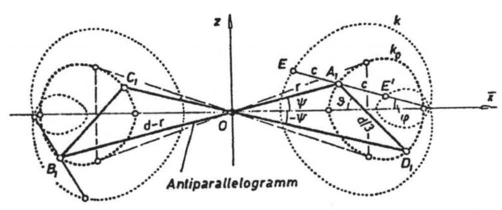


Abb.3



Wie aus der Polargleichung (3.1) zu entnehmen ist, wird die Sextik $k_o$ nicht bloss vom Knoten $A_1(r,\psi)$ durchlaufen, sondern gleichzeitig auch von den Punkten $B_1(d-r,\psi+\pi)$, $C_1(r,\pi-\psi)$ und $D_1(d-r,-\psi)$. Man rechnet leicht nach, dass auch Konstanz der Entfernungen $A_1D_1 = B_1C_1 = d/3$ besteht. Die vier Punkte bilden daher ein Antiparallelogramm $A_1B_1C_1D_1$ mit dem Seitenverhältnis 3:1. Für den Neigungswinkel $\vartheta$ der kürzeren Seiten gegen die xy-Ebene liest man aus Abb.3 die Relation

(3.3) $$\sin\vartheta = 3\sin\psi$$

ab. Daneben gilt noch die aus (3.1) oder anschaulicher durch Projektion des Antiparallelogramms auf die $\bar{x}$-Achse folgende Formel

(3.4) $$r = \frac{d}{2} - \frac{d}{6}\cdot\frac{\cos\vartheta}{\cos\psi}.$$

Der Winkel $\vartheta$ eignet sich gut als Bewegungsparameter und erlaubt mit (3.3) auch eine bequeme konstruktive Behandlung.

In der Ausgangslage $\vartheta = 0$ ($\psi = \varphi = 0$, $r = d/3$) der Tetraederkette liegt die Gelenkachse EE' in der xy-Ebene, während FF' normal dazu ist. Das Knotensechseck $A_1B_2A_3B_1A_2B_3$ erscheint zu einem gleichseitigen Dreieck $B_1B_2B_3$ mit der Seitenlänge 2a gestreckt. Damit einander die Tetraeder nicht gegenseitig behindern, muss also $c \leqq d/3 = a/\sqrt{3}$ sein. Für die in Abschnitt 2 erwähnte Kantenlänge b ist daher $b > c\sqrt{5}$ zu fordern; aus regulären Tetraedern ($b = 2c$) lässt sich demnach keine umwendbare Kette bilden. -- In der Mittelstellung $\vartheta = \pi/2$ ($\psi_{max} = \arcsin(1/3) = 19{,}47^o$, $r = d/2$) haben alle Gelenkachsen dieselbe Neigung $\varphi = \varphi' = \operatorname{arctg}(1/\sqrt{2}) = 35{,}26^o$; sie bilden sechs Kanten eines Würfels, dem auch das Knotensechseck angehört. -- Nach halber Umwendung $\vartheta = \pi$ ($\psi = 0$, $\varphi = \pi/2$, $r = 2d/3$) steht die Gelenkachse EE' normal zur xy-Ebene, während FF' in ihr liegt; das Knotensechseck ist neuerlich zu einem gleichseitigen Dreieck $A_1A_2A_3$ entartet.

Ohne auf Einzelheiten einzugehen, sei noch mitgeteilt, dass die gemeinsame, ebenfalls in der Ebene $\varepsilon_1$ verlaufende Bahn k der Tetraederecken E und E' eine aus Abb.3 ersichtliche Schleifenform hat; sie erinnert etwas an eine Pascalschnecke, ist aber Bestandteil einer aus zwei solchen Schleifen bestehenden algebraischen Kurve 12.Ordnung.

## 4. Schüttelmaschine

Die von P.SCHATZ entwickelte Schüttelmaschine "Turbula" der Schweizer Firma W.A.Bachofen [2,5] beruht auf der hier betrachteten Würfelkette. Jetzt ist jedoch die Symmetrieebene $\varepsilon_1$ fest zu denken und in ihr die beiden Knoten $A_1$ und $B_2$, die ja den unveränderlichen Abstand d haben. Verwendet wird nur die halbe Kette $A_1B_2A_3B_1$, deren Mittelglied $B_2A_3$ das Schüttelgut trägt. Der Antrieb erfolgt in der Weise, dass das Zylindergelenk bei $A_1$ um eine zu $\varepsilon_1$ normale Achse gedreht wird (Abb.4).

Um eine allgemeine Position des Getriebes zu gewinnen, mag man von einer beliebigen Stellung des Antiparallelogramms $A_1B_1C_1D_1$ ausgehen. Die zu seiner in $\varepsilon_1$ verlaufenden Symmetrieachse z durch $A_1$ gelegte Normalebene $\alpha$ enthält auch die Knoten $A_2$ und $A_3$, deren gemeinsame Normalprojektion auf $\varepsilon_1$ in die Mitte zwischen $C_1$ und z fällt, weil $A_1A_2A_3$ ein gleichseitiges Dreieck ist; ihr Abstand von $\varepsilon_1$ ergibt sich aus dem Umstand,

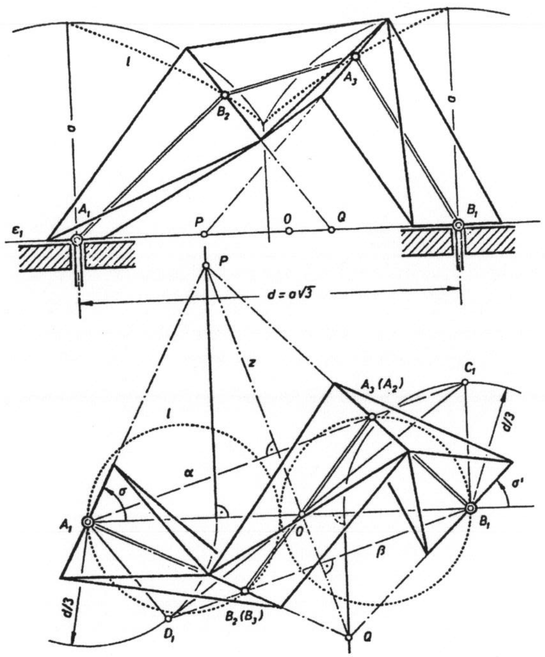


Abb.4

dass sie von $B_1$ die Entfernung $a = d/\sqrt{3}$ haben, also auf einer bekannten Kugel liegen. In analoger Weise sind die Knoten $B_2$ und $B_3$ zu finden.

Im Hinblick darauf, dass die Projektion des Punktes $B_2$ auf $\varepsilon_1$ durch eine zentrische Ähnlichkeit mit dem Zentrum $B_1$ und dem



Faktor 3:4 aus $D_1$ hervorgeht, erscheint der Bildpunkt von $B_2$ an einen zum Bahnkreis von $D_1$ ähnlichen Kreis mit dem Radius d/4 gebunden. Hieraus folgt, dass der Knoten $B_2$ selbst auf einer sphärischen Raumkurve l wandert (Abb.4).

Der Triederscheitel P, in welchem die Gelenkachsen von $A_1$, $A_2$ und $A_3$ zusammenlaufen, variiert auf einer zu $A_1B_1$ normalen Geraden, welche von der Strecke $A_1B_1 = d$ ein Drittel abschneidet (Abb.4). Der Beweis dafür ist elementar und kann mit Hilfe von Peripheriewinkelsätzen im Kreis $A_1PB_1Q$ geführt werden. Analog wandert auch der Scheitel Q des Achsentrieders von $B_1, B_2, B_3$ auf einer Normalen zu $A_1B_1$. Hieraus ist unmittelbar abzulesen, dass die Gelenkachsen von $A_1$ und $B_1$ zwei projektive Strahlbüschel in $\varepsilon_1$ durchlaufen; zwischen dem Antriebswinkel $\sigma$ und dem Abtriebswinkel $\sigma'$ besteht die Relation

$$\text{(4.1)} \qquad \operatorname{tg}\sigma \cdot \operatorname{tg}\sigma' = 2.$$

## 5. Relativbewegung gegenüberliegender Kettenglieder

Für ein weitergehendes Studium der Bewegung eines Kettengliedes gegenüber dem ruhenden System (O;x,y,z) wird ein mit dem Tetraeder EE'FF' fest verbundenes Gangkreuz (O';x',y',z') einzuführen sein. Unter Anpassung an die Symmetrien des Tetraeders mag man den Ursprung O' in der Mitte der Strecke $A_1B_2$ annehmen (Abb.2) und die Achsenrichtungen durch die in (1.1) vermerkten Einheitsvektoren $\underline{e}$ und $\underline{e}'$ festsetzen, ergänzt durch $\underline{e}'' = \underline{e} \times \underline{e}' = (\underline{r}-\underline{r}')/a$. Drückt man hierbei die auftretenden Winkelfunktionen durch den Parameter r aus, so erhält man über (2.3), (2.7) und (3.1) für O' die Koordinaten

$$\text{(5.1)} \qquad x_o = \frac{d^2}{2\sqrt{6r(d-r)}}, \quad y_o = \frac{d(d-2r)}{6\sqrt{2r(d-r)}}, \quad z_o = \frac{(2r-d)\sqrt{(3r-d)(2d-3r)}}{6\sqrt{r(d-r)}},$$

ferner mit Benützung von (2.4) für die Richtungsvektoren die Komponentendarstellungen

$$\text{(5.2)} \qquad \underline{e} = \left(\sqrt{\frac{2d-r}{2(d-r)}}, -\sqrt{\frac{2d-3r}{6(d-r)}}, -\sqrt{\frac{3r-d}{3(d-r)}}\right),$$

$$\text{(5.3)} \qquad \underline{e}' = \left(\sqrt{\frac{3r-d}{2r}}, \sqrt{\frac{3r-d}{6r}}, \sqrt{\frac{2d-3r}{3r}}\right),$$

$$\text{(5.4)} \qquad \underline{e}'' = \left(\frac{2r-d}{\sqrt{2r(d-r)}}, -\frac{d}{\sqrt{6r(d-r)}}, \sqrt{\frac{(3r-d)(2d-3r)}{3r(d-r)}}\right).$$

Der Übergang vom Gangsystem zum Rastsystem vollzieht sich dann mittels der Transformation

(5.5) $\qquad \underline{x} = \underline{x}_o + x'\underline{e} + y'\underline{e}' + z'\underline{e}''$,

wobei $\underline{x} = (x,y,z)$ und $\underline{x}_o = (x_o, y_o, z_o)$.

Ein bemerkenswertes Resultat stellt sich beispielsweise bei der Untersuchung der Relativbewegung zweier gegenüberliegenden Kettenglieder ein. Da etwa das Tetraeder EE'FF' und sein Gegenüber stets spiegelbildlich zur festen yz-Ebene liegen (Abb.1), so ist deren Relativbewegung eine "symmetrische Rollung", bei welcher die von der Wälzebene $x = 0$ eingehüllte Torse $\Theta$ auf einer kongruenten rollt.

Dieses abwickelbare Axoid $\Theta$ erscheint einem Beobachter im System $(O';x',y',z')$ zufolge (5.1-5) als Hüllgebilde der von $x = 0$ erzeugten Ebenenschar

(5.6) $\quad \sqrt{r(2d-3r)}\cdot x' + \sqrt{(d-r)(3r-d)}\cdot y' + (2r-d)\cdot z' + d^2/2\sqrt{3} = 0$

und ist demnach im Sinne der projektiven Geometrie dual zu der Raumkurve q mit der (kartesischen) Parameterdarstellung

(5.7) $\quad \xi = \sqrt{r(2d-3r)}, \quad \eta = \sqrt{(d-r)(3r-d)}, \quad \zeta = 2r-d.$

Drückt man hierin r durch $\zeta$ aus, so hat man

(5.8) $\quad r = \frac{1}{2}(d+\zeta), \quad 2d-3r = \frac{1}{2}(d-3\zeta), \quad d-r = \frac{1}{2}(d-\zeta), \quad 3r-d = \frac{1}{2}(d+3\zeta).$

Die Kurve q ist mithin der Schnitt zweier (kongruenter) elliptischer Zylinder

(5.9) $\quad 4\xi^2 + 3\zeta^2 + 2d\zeta = d^2, \quad 4\eta^2 + 3\zeta^2 - 2d\zeta = d^2,$

also eine Raumkurve 4.Ordnung (affin zur sogenannten "Tennisballkurve").

Für das Axoid $\Theta$ folgt hieraus, dass es eine Torse 4.Klasse ist. Bei Identifikation der Achsenkreuze $(\xi,\eta,\zeta)$ und $(x',y',z')$ wird der Zusammenhang zwischen q und $\Theta$ vermittelt durch das Polarsystem der nullteiligen Kugel $x'^2+y'^2+z'^2 + d^2/2\sqrt{3} = 0$. Den beiden elliptischen Trägerzylindern (5.9) von q entsprechen vermöge dieser Polarität zwei Doppelkegelschnitte von $\Theta$ in den Ebenen $y' = 0$ und $x' = 0$. Man findet hierfür zwei Kreise mit den Gleichungen

(5.1o) $\quad y' = 0, \; x'^2 + (z'+a/2)^2 = a^2; \quad x' = 0, \; y'^2 + (z'-a/2)^2 = a^2,$



wobei wieder $d = a\sqrt{3}$ gesetzt wurde. Dieses schon in [5] enthaltene Ergebnis ist nicht weiter erstaunlich, wenn man bedenkt, dass etwa der erste Kreis die Kante FF' zur Rotationsachse hat, daher durch den Punkt $A_3$ geht, dort die Gelenkachse und damit auch die Wälzebene $x = 0$ berührt. -- Das in Rede stehende Axoid $\Theta$ kann demnach als die die konvexe Hülle des Kreispaares (5.1o) begrenzende Verbindungstorse der beiden Kreise aufgefasst werden (Abb.5).

Unter den $\infty^1$ die Quartik q enthaltenden Flächen 2.Ordnung, die durch Linearkombination der Zylindergleichungen (5.9) zu gewinnen sind, ist das (abgeplattete) Drehellipsoid

(5.11) $\quad 2(\xi^2+\eta^2) + 3\zeta^2 = d^2$

hervorzuheben. Ihm entspricht in der Kugelpolarität das der Torse $\Theta$ berührend eingeschriebene (eiförmige) Drehellipsoid

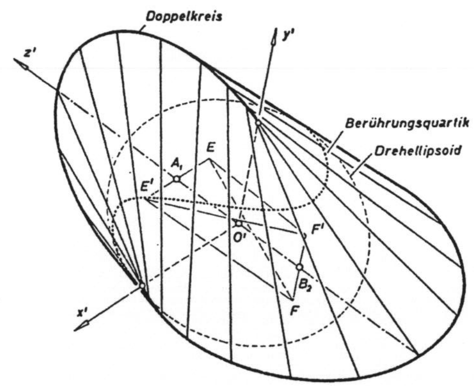

Abb.5

(5.12) $\qquad 6(x'^2+y'^2) + 4z'^2 = d^2,$

welches die Knoten $A_1$ und $B_2$ zu Brennpunkten hat, die Hauptachse d besitzt und die Wälzebene $x = 0$ im Zentralpunkt O berührt. Auch dieser Sachverhalt lässt sich elementar einsehen, wenn man das Antiparallelogramm $A_1B_2A_2B_1$ ins Auge fasst und die Konstanz der Streckensumme $A_1O + OB_2 = A_1O + OB_1 = A_1B_1 = d$ beachtet. -- Die Berührungslinie des Ellipsoids (5.12) mit der Torse $\Theta$ ist übrigens eine zu q und damit auch zur Tennisballkurve affine Raumquartik (Abb.5). Längs dieser Kurve wälzt sich das Ellipsoid auf dem zum Gegenglied gehörenden spiegelkongruenten Ellipsoid ab.

## L i t e r a t u r


[1] BENNETT G.T., The skew isogram mechanism. Proc.London Math.Soc., 13, 1913, 151-173.

[2] BRÁT V., A six-link spatial mechanism. J.Mechanisms, 4, 1969, 325-336.

[3] BRICARD R., Lecons de cinématique, II. Gauthier-Villars, Paris, 1927, p.316.

[4] GOLDBERG M., New five-bar and six-bar linkages in three dimensions. Bull.Amer.Math.Soc., 45, 1939, 666.

[5] KUNZE S., STACHEL H., Über ein sechsgliedriges räumliches Getriebe. Elem.Math., 29, 1974, 25-32.

[6] WUNDERLICH W., Starre, kippende, wackelige und bewegliche Gelenkvierecke im Raum. Elem.Math., 26, 1971, 73-83.

[7] WUNDERLICH W., Windschiefe Gelenksechsecke mit schneidenden Diagonalen. Rad Jugosl.Akad.Zagreb, 1979, 115-127.




WUNDERLICH W.

# UMWENDUNG EINER REGELMÄSSIGEN SECHSGLIEDRIGEN TETRAEDERKETTE

## Z u s a m m e n f a s s u n g


Betrachtet wird eine geschlossene räumliche sechsgliedrige Kette mit Zylindergelenken, deren Achsen Gemeinlote haben, welche ein windschiefes Sechseck $A_1B_2A_3B_1A_2B_3$ mit gleicher Seitenlänge a bilden. Unter der Voraussetzung, dass benachbarte Achsen orthogonal sind, laufen die sechs Achsen zu dreien in zwei Punkten P und Q zusammen und die Kette ist deformierbar (Abb.1).

Die drei Diagonalen $A_iB_i$ schneiden einander in einem Punkt O auf der Geraden PQ und haben konstante Länge $d = a\sqrt{3}$. Für einen Beobachter in O beschreiben die Punkte $A_1$ und $B_1$ gemeinsam eine zirkulare Sextik $k_o$ in der Symmetrieebene $A_1PQB_1$ (Abb.3). Die Relativbewegung zweier gegenüberliegenden Kettenglieder ist eine symmetrische Rollung mit kongruenten abwickelbaren Axoiden vierter Klasse, die je zwei kongruente Kreise verbinden (Abb.5).

Der halbe Teil $A_1B_2A_3B_1$ der Kette, drehbar gelagert in der festen Ebene $A_1PQB_1$, findet Anwendung bei einer Schüttelmaschine (Abb.4).


# MOTIONS OF A REGULAR SIX-LINK CHAIN OF TETRAHEDRA

## S u m m a r y


The paper deals with a closed spatial six-link chain with cylindrical joints, whose axes have common perpendiculars forming a skew hexagon $A_1B_2A_3B_1A_2B_3$ with sides of equal length a. Under the assumption that successive axes are orthogonal, the six axes concur three ba three in two points P and Q and the chain is deformable (Fig.1).

The three diagonals $A_iB_i$ meet in a point O on the line PQ and have constant length $d = a\sqrt{3}$. For an observer at O the points $A_1$ and $B_1$ simultaneously describe a circular sextic $k_o$ in the plane of symmetry $A_1PQB_1$ (Fig.3). The relative motion of two opposite chain links is a symmetric rolling with equal developable axoids of class 4, each one connecting two equal circles (Fig.5).

The half part $A_1B_2A_3B_1$ of the chain, with pivots at $A_1$ and $B_1$ in the fixed plane $A_1PQB_1$, is applied in a mixing machine (Fig.4).