Österreichische Akademie der Wissenschaften

Sitzung der mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse vom 6. März 1980

Sonderabdruck aus dem Anzeiger der math.-naturw. Klasse der Österreichischen Akademie der Wissenschaften, Jahrgang 1980, Nr. 2

(Seite 28 bis 33)

Das wirkl. Mitglied Walter Wunderlich übersendet eine von ihm selbst verfaßte kurze Mitteilung:

„Neue Wackelikosaeder".

1. Unter einem *Ikosaeder* sei hier ein von 20 Dreiecken beliebiger Gestalt gebildetes Vielflach verstanden, bei welchem (wie bei dem bekannten Platonischen Körper) von jeder der 12 Ecken fünf der insgesamt 30 Kanten ausgehen. Betrachtet werden allerdings bloß Ikosaeder mit *drei paarweise orthogonalen Symmetrieebenen*. Es besitzt dann einen Mittelpunkt O, und die zwölf Ecken verteilen sich auf drei Rechtecke $ADA'D'$, $BEB'E'$ und $CFC'F'$, die unter Verwendung eines ihnen angepaßten kartesischen Koordinatensystems $(O;\ x,\ y,\ z)$ festgelegt werden können durch

(1.1) $A(a,y,0),\ B(0,b,z),\ C(x,0,c)$ mit $a,b,c>0$.

Die übrigen Ecken ergeben sich nach dem Muster von Abb. 1 durch Spiegelungen an den Koordinatenachsen.

Gibt man neben den bekannten Kantenlängen $AD' = A'D = 2a$, $BE' = B'E = 2b$ und $CF' = C'F = 2c$ noch die restlichen durch $AB = d$, $BC = e$ und $CA = f$ vor, so ist das *Netz* des Ikosaeders bestimmt, und es kann ein Karton- oder Stabmodell angefertigt werden. Durch das Netz ist aber die *Form* des Ikosaeders nicht unbedingt eindeutig festgelegt, denn die Ermittlung der noch fehlenden Formparameter x,y,z verlangt die Auflösung des Gleichungssystems

$$a^2+(y-b)^2+z^2=d^2,$$
$$x^2+b^2+(z-c)^2=e^2, \qquad (1.2)$$
$$(x-a)^2+y^2+c^2=f^2.$$

Diese Aufgabe kann als Frage nach den Schnittpunkten $P(x,y,z)$ von drei Drehzylindern gedeutet werden und ist daher von 8. *Grad*[1]). Grundsätzlich sind demnach acht Formen des Ikosaeders zu erwarten, die aber natürlich nicht durchwegs reell zu sein brauchen.

2. Sind zwei reelle der acht Lösungen nicht allzusehr verschieden, so kann das Ikosaedermodell dank der Elastizität des Materials zwischen den beiden Positionen umspringen, wenn die Verbindungen der Modellelemente (Dreiecke bzw. Stäbe) gelenkig ausgeführt wurden. „Kipp-Ikosaeder“ solcher Art wurden in [5] behandelt.

Rücken die beiden Positionen zusammen, so hat man ein *Wackelikosaeder* mit infinitesimaler Beweglichkeit, die jedoch praktisch deutlich merkbar ist. Die parallelen Gegenkanten AD' und $A'D$ erfahren dabei Verschiebungen $\pm dx$ in x-Richtung, die Kanten BE' und $B'E$ Verschiebungen $\pm dy$ in y-Richtung, die Kanten CF' und $C'F$ Verschiebungen $\pm dz$ in z-Richtung (Abb. 1). Für diese Verrückungen gilt zufolge (1.2):

$$\begin{aligned} (y-b)\,dy + z\cdot dz &= 0, \\ x\cdot dx \quad + (z-c)\,dz &= 0, \\ (x-a)\,dx + y\cdot dy \qquad &= 0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Damit diese linear-homogenen Gleichungen eine nichttriviale Lösung besitzen, muß ihre Koeffizientendeterminante verschwinden. Die Formparameter x,y,z müssen daher die *Wackelbedingung*

$$xyz + (x-a)\,(y-b)\,(z-c) = 0 \tag{2.2}$$

erfüllen. Sie können sonach angesetzt werden durch

[1]) Beachtet man, daß die acht Schnittpunkte einer angebbaren Kugel angehören, deren Gleichung sich als Summe der drei Zylindergleichungen (1.2) einstellt, so eröffnet sich ein bequemer graphischer Lösungsweg: Man konstruiert nach geläufigen Regeln der darstellenden Geometrie etwa den Grundriß der Durchdringungsquartik der Kugel mit dem ersten Zylinder und schneidet dann die Bildkurve 4. Ordnung mit dem Basiskreis des dritten Zylinders. — Zur numerischen Auswertung berechne man für ein gewähltes z aus den ersten beiden Gleichungen y und x; anschließend verbessere man z zo lange, bis die zugehörigen Werte von x und y auch die dritte Gleichung befriedigen.

$$x = \frac{a}{1+\lambda},\quad y = \frac{b}{1+\mu},\quad z = \frac{c}{1+\nu} \quad \text{mit } \lambda\mu\nu = 1. \tag{2.3}$$

Für die Verschiebungsbeträge besteht dann die Proportion

$$dx : dy : dz = \frac{1+\lambda}{a} : \lambda\frac{1+\mu}{b} : \frac{1+\nu}{\nu c}. \tag{2.4}$$

3. Mit der einfachsten Annahme $\lambda = \mu = \nu = 1$ gelangt man zu Wackelikosaedern mit sechs paarweise parallelen Hohlkanten AD' und $A'D$, BE' und $B'E$, CF' und $C'F$, deren Zentralabstände durch $x = a/2$, $y = b/2$, $z = c/2$ bestimmt sind. Diese Zwanzigflache sind affin zu der hochsymmetrischen, durch $a = b = c$ gekennzeichneten Normalform, deren Wackeligkeit von M. Goldberg [1] bemerkt wurde; die 24 schrägen Kanten haben hierbei die gemeinsame Länge $d = e = f = a\sqrt{3/2}$.

Die genannte Normalform gehört zu den merkwürdigen, von B. Jessen [2] entdeckten *orthogonalen Ikosaedern*, deren Seitenflächen längs aller 30 Kanten rechtwinklig zusammenstoßen. Wie der Verfasser in [4] zeigen konnte, sind sämtliche orthogonalen Ikosaeder mit Mittelpunkt (die eine ausgedehnte Familie bilden und stets einer Kugel eingeschrieben sind) wackelig. Allgemeiner besteht Wackeligkeit bei allen Ikosaedern mit Mittelpunkt, die dadurch ausgezeichnet sind, daß die Ebenen der drei Seitenflächen, die von den Kanten eines Oberflächendreiecks ausgehen, jeweils ein Prisma bilden. Die zwölf Ecken eines solchen Ikosaeders liegen stets auf einer Mittelpunktsquadrik; ist diese ein Ellipsoid, so ist das Ikosaeder affin zu einem orthogonalen.

Im übrigen sind auch alle zu den erwähnten Ikosaedern kollinearen wackelig, weil nach H. Liebmann [3] die Wackeligkeit eines Polyeders eine *projektive Eigenschaft* ist.

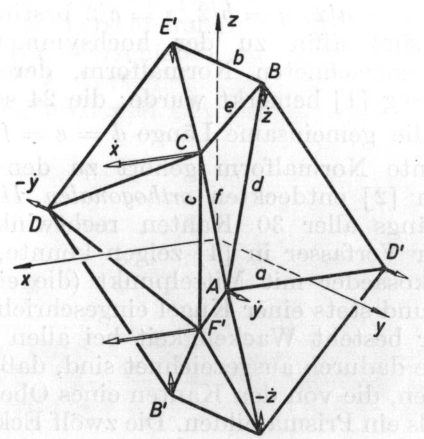
4. Für andere Wertetripel λ, μ, ν ergeben sich vermöge (2.3) *neue Wackelikosaeder*, die zu den vorhin aufgezählten nicht affin sind. So erhält man beispielsweise mit $\lambda = 4$, $\mu = \nu = -\frac{1}{2}$ und $a = b = c = 5$ das in Abb. 1 dargestellte Ikosaeder mit zehn Hohlkanten. Die Formparameter betragen gemäß (2.3) $x = 1$, $y = z = 10$; die schrägen Kanten haben gemäß (1.2) die Längen

$$d = 5\sqrt{6} = 12{,}25,\quad e = \sqrt{51} = 7{,}14,\quad f = \sqrt{141} = 11{,}87. \tag{4.1}$$

Die Verschiebungen verhalten sich zufolge (2.4) wie $dx : dy : dz = 5 : 2 : -1$.[2])

Ein angefertigtes Stabmodell (aus Plastik-Trinkhalmen, die mittels durchgezogener Zwirnsfäden verknüpft wurden) wies nun neben der vorhergesehenen Wackelbewegung noch eine weitere Deformabilität auf: In einer Position mit etwa doppeltem Betrag von x — die das Modell theoretisch eigentlich gar nicht einnehmen durfte — zeigte sich eine unverkennbare Wackelbewegung, bei welcher die Stäbe CF' und $C'F$ entgegengesetzt gerichtete Verlagerungen parallel zur z-Achse ausführten. Dieses unerwartete Verhalten soll im nächsten Abschnitt geklärt werden.

Abb. 1



5. Den zur y-Achse parallelen Kanten BE' und $B'E$ eines Ikosaeders von dem in Abschnitt 1 erklärten Typ werden jetzt x-parallele Verschiebungen $\pm du$ erteilt, den zur z-Achse parallelen Kanten CF' und $C'F$ hingegen z-parallele Verschiebungen $\pm dv$. Letztere übertragen sich auch auf die Punkte A und D bzw. A' und D' (Abb. 2); die Kanten AD' und $A'D$ verlieren dadurch ihre ursprünglich zur x-Achse parallele Lage. Die in (1.1) angegebenen Koordinaten Ecken A,B,C verändern sich infolge der Verlagerung zu

[2]) In Abb. 1 wurden die infinitesimalen Verschiebungen dx, dy, dz durch die entsprechenden Geschwindigkeitsvektoren $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ dargestellt.

(5.1) $\quad \tilde{A}(a,y,-dv),\ \tilde{B}(du,b,z),\ \tilde{C}(x,0,c-dv).$

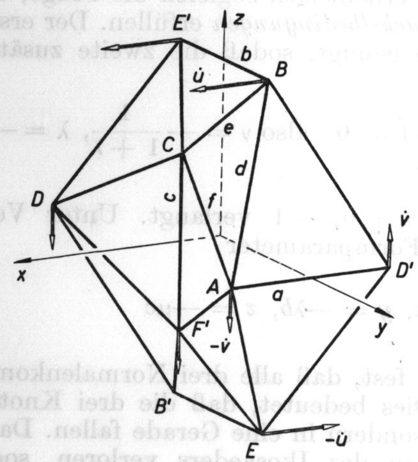
Sollen nun die durch (1.2) bestimmten Kantenlängen d,e,f stationär bleiben, so müssen die Beziehungen

(5.2) $\quad a{\cdot}du = z{\cdot}dv,\ x{\cdot}du = (z-c)dv$

erfüllt sein. Dies liefert die *Wackelbedingung*

(5.3) $\quad xz = a(z-c).$

Abb. 2



Für die Verrückungen gilt dann

(5.4) $\quad du : dv = z : a = (z-c) : x.$

Bei dem Modell aus Abb. 1 mit $a = b = c = 5$ liegen die Parameter $y = z = 10$ bereits fest, während die neue Wackelbedingung (5.3) jetzt $x = 2{,}5$ verlangt. Die schrägen Kanten haben demnach die Längen

(5.5) $\quad d = 5\sqrt{6} = 12{,}25,\ e = 15/2 = 7{,}50,\ f = 5\sqrt{21}/2 = 11{,}46.$

Vergleich mit den früheren Abmessungen (4.1) zeigt, daß d gleich geblieben ist und e und f sich nur geringfügig geändert haben.

Damit wird das unvorhergesehene Verhalten des Stabmodells verständlich. Die zugehörigen Verschiebungen verhalten sich gemäß (5.4) wie $du : dv = 2 : 1$.

Geometrisch bedeutet die Wackelbedingung (5.3), daß das Dreieck ABC parallel zur y-Achse liegt. Seine Normale hat nämlich aufgrund der Koordinaten (1.1) die Komponenten

$$X = yz + c(b - y),\quad Y = xz + a(c - z),\quad Z = xy + b(a - x), \tag{5.6}$$

deren zweite zufolge (5.3) verschwindet. Die fünf Ecken A, B, C, D, E' gehören mithin einer Ebene an, und Gleiches gilt für drei weitere Quintupel.

6. Natürlich erhebt sich sogleich die Frage, ob es Ikosaeder gibt, die *beide Wackelbedingungen* erfüllen. Der ersten wird durch den Ansatz (2.3) genügt, sodaß die zweite zusätzlich

$$(1+\lambda)\nu + 1 = 0,\quad \text{also } \nu = -\frac{1}{1+\lambda},\ \lambda = -\frac{1+\mu}{\lambda} \tag{6.1}$$

mit beliebigem $\lambda \neq 0, -1$ verlangt. Unter Verwendung der entsprechenden Formparameter

$$x = -\nu a,\quad y = -\lambda b,\quad z = -\mu c \tag{6.2}$$

stellt man leicht fest, daß alle drei Normalenkomponenten (5.6) verschwinden. Dies bedeutet, daß die drei Knoten A, B, C kein Dreieck bilden, sondern in eine Gerade fallen. Damit gehen aber acht Seitenflächen des Ikosaeders verloren, sodaß die aufgeworfene Frage *negativ* zu beantworten ist.

Literatur

[1] Goldberg, M.: *Unstable polyhedral structures.* Math. Magaz. *51* (1978), 165—170.

[2] Jessen, B.: *Orthogonal icosahedra.* Nordisk Mat. Tidsskr. *15* (1967), 90—96.

[3] Liebmann, H.: *Ausnahmefachwerke und ihre Determinante.* Sitzgsb. Bayer. Akad. Wiss. (1920), 197—227.

[4] Wunderlich, W.: *Wackelikosaeder.* Geometriae dedicata (im Druck).

[5] Wunderlich, W.: *Kipp-Ikosaeder.* Elem. Math. (im Druck).

Österreichische Staatsdruckerei. L61 33720