

Dreidimensionale graphische Fahrpläne

Von Walter Wunderlich

Inhalt

- 1 Einleitung
 - 2 Minimalabstände
 - 3 Verfolgungsprobleme
 - 4 Laufzeitminima
 - 5 Optische Aufgaben
- Literatur
Anmerkungen

1 Einleitung

Durchläuft ein Punkt A eines bewegten Objekts eine wohldefinierte Bahn, dann wird der von einer bestimmten Bahnmarke aus gemessene *Weg* s eine eindeutige Funktion der von einem bestimmten Augenblick an gezählten *Zeit* t sein: $s = f(t)$. Die Menge der in einem ebenen rechtwinkligen Koordinatensystem eingetragenen Punkte $\bar{A}(s, t)$ erfüllt dann eine gewisse Linie, die als *Zeit-Weg-Diagramm* vollständigen Aufschluß über den Bewegungsablauf gibt. Insbesondere liefert ihr Anstieg über $v = ds/dt = \dot{f}(t)$ die zur *Zeit* t vorhandene *Momentangeschwindigkeit* v . Liegt speziell eine gleichförmige Bewegung $s = s_0 + c(t-t_0)$ mit der konstanten Geschwindigkeit $v = c$ vor, so ist das Schaubild eine Gerade.

Die Verwendung derartiger *graphischer Fahrpläne* ist im Eisenbahnwesen durchaus geläufig und dient dort dazu, eine klare Übersicht über den Zugverkehr auf einer bestimmten Strecke zu schaffen, die aus der entsprechenden Seite des Kursbuches nicht unmittelbar zu gewinnen ist.

In ähnlicher Weise mag man verfahren, um Bewegungsvorgänge geometrisch zu veranschaulichen, die sich in einer *Ebene* abspielen. Durchläuft ein beweglicher Punkt A in der xy -Ebene π_0 eine Bahn a , beschreibbar durch das Gleichungspaar $x = x(t)$, $y = y(t)$, so trage man in seinem jeweiligen Standort $A(x, y)$ senkrecht zu π_0 die *Zeit* t – oder besser die dazu proportionale Strecke $z = ct$ – auf (Abb. 1).

Die Menge der so erhaltenen Punkte $\bar{A}(x, y, z)$ erfüllt dann eine räumliche Diagrammkurve \bar{a} mit der Parameterdarstellung $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = ct$. Diese „*Schicksals-*

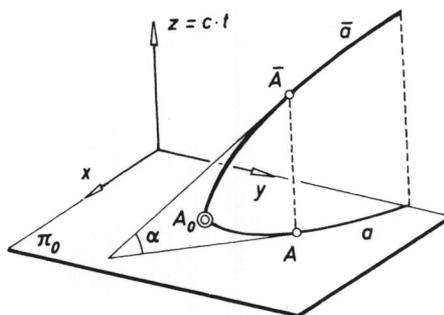


Abb. 1

linie“ \bar{a} gibt vollständigen Aufschluß über die Ortsveränderung des beweglichen Punktes A, also über sein „Schicksal“. Ihr Grundriß \bar{a}' deckt sich mit der Bahn a, und ihr Anstieg $\operatorname{tg} \alpha = \dot{z} / \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = c/v$ an irgendeiner Stelle ist umgekehrt proportional zur momentanen Bahngeschwindigkeit v.

Ist die Bewegung insbesondere *gleichförmig* ($v = \text{const.}$), so tritt als Schicksalslinie des Punktes eine Kurve konstanter Steigung auf, also eine *Böschungslinie*. Erfolgt die Bewegung überdies *geradlinig*, dann ist die Schicksalslinie eine *Gerade* (um so flacher, je größer die Geschwindigkeit ist).

Die zeichnerische Auswertung solcher „dreidimensionalen Fahrpläne“ erfordert den Einsatz von Verfahren der Darstellenden Geometrie, der sich damit ein anregendes Betätigungsfeld eröffnet. Dies soll an einigen typischen Beispielen dargelegt werden, für deren gelegentlich etwas unseriösen Charakter um freundliche Nachsicht gebeten wird.

2 Minimalabstände

Aufgabe 1 Zwei Schiffe A und B fahren mit konstanten Geschwindigkeiten auf vorgeschriebenen geradlinigen Kursen. Wann sind sie einander am nächsten und wie groß ist der Minimalabstand?

Daß die Meeresfläche in dem betrachteten Gebiet als eben angenommen und die Schiffe durch Punkte idealisiert werden, ist wohl verständlich. Die Kurse a und b seien durch die Positionen A_0 und B_0 zur Zeit $t_0 = 0$ sowie A_1 und B_1 zur Zeit t_1 (vielleicht 10 min) festgelegt. Hierdurch sind die beiden Schicksalsgeraden \bar{a} und \bar{b} bestimmt, die im allgemeinen windschief sein werden, so daß kein Zusammentreffen erfolgt (Abb. 2).

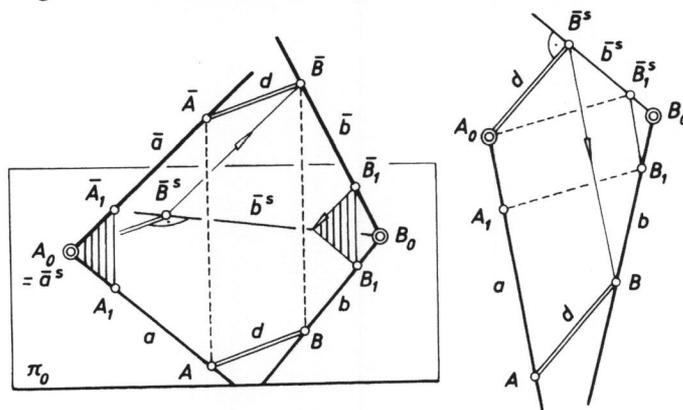


Abb. 2

Da zu jeder Zeit die Entfernung AB gleich dem Abstand der zugehörigen Diagrammpunkte \bar{A}, \bar{B} ist, geht es darum, zwischen die Geraden \bar{a} und \bar{b} die kürzeste horizontale Strecke einzuspannen. Zu diesem Zwecke denke man sich das Raumdigramm durch Parallelprojektion $X \rightarrow X^s$ in der Richtung von \bar{a} auf die Grundebene π_0 abgebildet. Die Gerade \bar{a} wird dabei in den Punkt $\bar{a}^s = A_0$ projiziert, die Gerade \bar{b} hingegen in eine leicht angebbare Gerade $\bar{b}^s = B_0\bar{B}_1^s$. Da bei der vorgenommenen Projektion waagerechte Strecken unverzerrt bleiben, ist lediglich aus A_0 das Lot auf \bar{b}^s zu fällen, dessen Fußpunkt \bar{B}^s dann nach \bar{B} auf \bar{b} zurückgeführt werden kann. Die Lotstrecke $A_0\bar{B}^s$ gibt bereits Betrag und Richtung des gesuchten Minimalabstandes an, während der gefragte Zeitpunkt mit der Höhe des Punktes \bar{B} auf der Zeitskala abgelesen oder durch Vergleich der Wegstrecken B_0B und B_0B_1 ermittelt werden kann.

Aufgabe 2 Ein Schiff A verfolgt mit konstanter Geschwindigkeit v_1 einen geraden Kurs a . Welchen Kurs b hat ein in B_0 stationiertes Wachboot B mit der Geschwindigkeit $v_2 > v_1$ zu nehmen, um das Schiff ohne Umweg zu erreichen?

Hier ist die Schicksalsgerade \bar{a} durch A_0, a und v_1 bestimmt, während man von der Schicksalsgeraden \bar{b} vorläufig nur weiß, daß sie einem gewissen *Drehkegel* Δ mit der Spitze B_0 und lotrechter Achse angehört, dessen Steigung durch v_2 festgelegt ist. Da \bar{a} von \bar{b} getroffen werden soll, läuft die Aufgabe auf die Ermittlung der Schnittpunkte von \bar{a} mit Δ hinaus. Zur Durchführung wird die Gerade \bar{a} mit der Kegelspitze B_0 durch eine Hilfsebene ϵ verbunden, welche dann aus dem Kegel Δ die Erzeugende \bar{b} herausschneidet. In der zu einem passend gewählten Zeitpunkt t_1 (vielleicht 5 min) gehörigen Schichtenebene verläuft die zur Grundspur $e_0 = A_0B_0$ parallele Hauptlinie \bar{e}_1 von ϵ durch \bar{A}_1 sowie der Parallelkreis \bar{k}_1 von Δ mit dem Radius $v_2 t_1$ (Abb. 3).

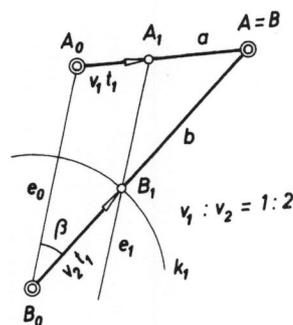


Abb. 3

Im Grundriß ist der A_0 näher gelegene Schnittpunkt B_1 von e_1 und k_1 zu verwenden; durch ihn geht die gesuchte Bahngerade b . Aus der Zeichnung ist nun der Vorhaltwinkel $\beta = \sphericalangle bB_0A_0$ sowie der Ort $A = B$ des Zusammentreffens zu entnehmen¹. Vergleich der Laufstrecken B_0B und B_0B_1 ergibt die Laufzeit t .

Die Voraussetzung $v_2 > v_1$ sichert ein Zusammentreffen. Ist hingegen $v_2 \leq v_1$, so kann der Fall eintreten, daß die Gerade \bar{a} am Kegel Δ vorbeiläuft. Dann kann der Verfolger B das Ziel A nie erreichen, und es stellt sich die

Aufgabe 3 Welchen Kurs muß das Wachboot B aus Aufgabe 2 im Falle $v_2 < v_1$ einschlagen, um dem unerreichbaren Schiff A möglichst nahe zu kommen?

Im Raumdiagramm läuft diese Frage darauf hinaus, zwischen der Schicksalsgeraden \bar{a} und dem Drehkegel Δ die kürzeste waagrechte Strecke einzuspannen; diese wird offensichtlich einen Parallelkreis von Δ rechtwinklig treffen. Hier wird man wie bei Aufgabe 1 wieder die Parallelprojektion $X \rightarrow X^s$ in der Richtung von \bar{a} heranziehen. Das System der Parallelkreise des Kegels bildet sich dabei auf eine Ähnlichkeitsschar von Kreisen ab, die zwei gemeinsame, von B_0 ausgehende Tangenten berühren. Auf die dem Bildpunkt $\bar{a}^s = A_0$ näher gelegene Tangente \bar{b}^s ist daher aus A_0 das Lot $A_0\bar{B}^s$ zu fallen, das dann den gesuchten Minimalabstand AB der Größe und Richtung nach angibt; er fällt in die Fortsetzung des Verfolgerkurses (Abb. 4).

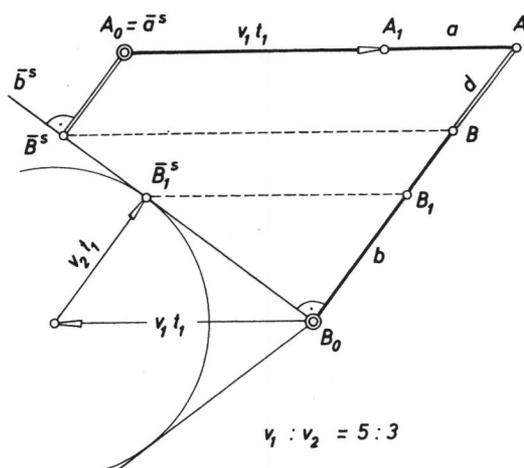


Abb. 4

Weitere Aufgaben ähnlicher Art, zum Teil aus [3] entnommen, findet man in [6].

3 Verfolgungsprobleme

In einem amerikanischen Buch über Unterhaltungsmathematik [1] findet sich die nachstehende, im ersten Moment unlösbar erscheinende

Aufgabe 4 Ein Fahndungsboot A (Geschwindigkeit v_1) verfolgt ein langsames Schuggelschiff B (Geschwindigkeit $v_2 < v_1$), dem es noch vor der Ergreifung gelingt, in eine Nebelbank zu entweichen. Wie hat sich der Verfolger zu verhalten, um den Flüchtigen im Nebel doch noch zu erreichen, wenn angenommen wird, daß dieser unmittelbar nach dem Verschwinden einen geradlinigen Kurs neuer, aber unbekannter Richtung einschlägt?

Die Antwort ist mittels des räumlichen Fahrplandiagramms zu finden. Seien A_0 und B_0 die Positionen im Augenblick des Verschwindens von B (Abb. 5).

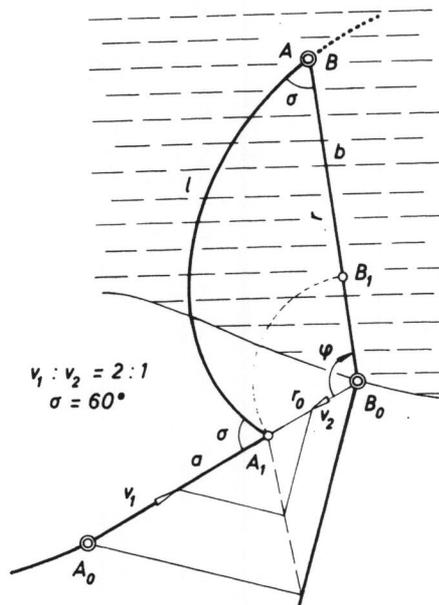


Abb. 5

Die Schicksalsgerade \bar{b} von B gehört dann einem bekannten Drehkegel Δ mit der Spitze B_0 an. Der Verfolger A muß daher trachten, mit seiner Schicksalsgeraden \bar{a} möglichst rasch den Kegel Δ zu erreichen und anschließend von der betreffenden Position A_1 aus eine solche Bahn 1 einzuhalten, daß die entsprechende Schicksalslinie $\bar{1}$ auch auf Δ bleibt. Als Böschungslinie auf dem Böschungskegel Δ durchsetzt $\bar{1}$ die Kegelerzeugenden unter einem konstanten Winkel, ist also eine *Drehkegelloxodrome*; sie bildet sich im Grundriß auf eine Isogonaltrajektorie des Strahlbüschels B_0 ab, also auf eine *logarithmische Spirale* 1 [8/II, S. 202ff]. Eine solche Spirale, in Polarkoordinaten r, φ dargestellt durch

$$r = r_0 \cdot e^{q\varphi} \quad (\text{mit } r_0 = B_0A_1), \quad (3.1)$$

ist durch ihren konstanten Schnittwinkel σ mit den Büschelstrahlen gekennzeichnet, der durch

$$\cot \sigma = \frac{dr}{r d\varphi} = q \quad (3.2)$$

bestimmt ist. Wie der Vergleich entsprechender Wegelemente $ds = v_1 dt$ und $dr = v_2 dt = ds \cdot \cos \sigma$ lehrt, hängt σ vermöge

$$\cos \sigma = v_2/v_1 \quad (3.3)$$

nur vom Geschwindigkeitsverhältnis ab. Damit ist die von A_1 ausgehende Bahnspirale 1 vollkommen festgelegt.

Ein sehr altes Problem, welches auf *Bouguer*, vielleicht sogar auf *Leonardo da Vinci* zurückgeht [2/II, S. 241ff], betrifft die

Aufgabe 5 Ein Hund A (Geschwindigkeit v_1) läuft auf ein Fahrzeug B zu, das mit konstanter Geschwindigkeit $v_2 < v_1$ auf einer geraden Straße fährt. Auf was für einer Bahn a bewegt sich der Hund, wenn seine Laufrichtung stets auf den jeweiligen Standort des Fahrzeugs zielt, und wo erfolgt das Zusammentreffen?

Hierbei wird stillschweigend angenommen, daß sich der Hund seitab von der Straße auf ebenem Gelände befindet. Die infolge der sich ständig ändernden Laufrichtung krumme Verfolgungsbahn ist unter dem Namen „Hundekurve“ bekannt und hat für die Entwicklung zielsuchender Geschosse (Geräuschtorpedos, Flugzeugabwehrraketen etc.) Bedeutung erlangt.

Wird bei der Anlage des räumlichen Fahrplandiagramms die Zeitkote $z = v_1 t$ verwendet, so wird als Schicksalslinie \bar{a} des Verfolgers A eine unter 45° ansteigende Böschungslinie auftreten, während jene des bewegten Ziels B eine Gerade \bar{b} mit dem steileren Anstieg v_1/v_2 sein wird. Bei Zentralprojektion $X \rightarrow X^c$ aus einem Punkt $\bar{O} \in \bar{b}$ auf die Grundebene π_0 wird die Gerade \bar{b} auf ihren Spurpunkt $\bar{b}^c = B_0$ abgebildet, die zu einem Punkt $\bar{A} \in \bar{a}$ gehörige Tangente g hingegen auf eine Gerade g^c durch $\bar{A}^c \in \bar{a}^c$, die ihren Fluchtpunkt G auf dem Basiskreis f des von \bar{O} ausgehenden 45° -Böschungskegels Δ hat (Abb. 6).

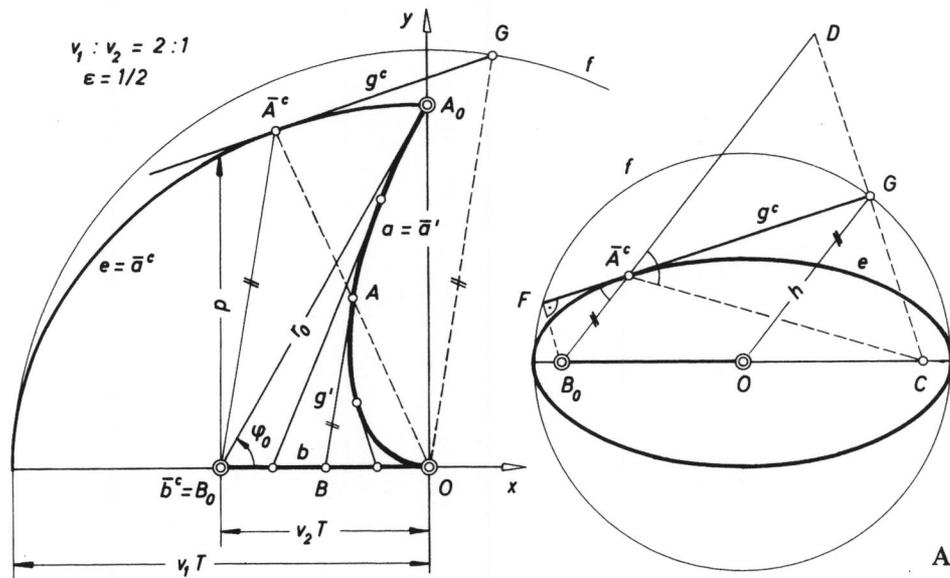


Abb. 6

Der Fluchtkreis f hat seinen Mittelpunkt im Grundriß O von \bar{O} und den Radius $h = \bar{O}\bar{O}$. Nachdem der Projektionsstrahl $\bar{O}G$ die Richtung der Tangente g hat und deren Grundriß g' voraussetzungsgemäß mit dem Peilstrahl $AB \parallel \bar{A}\bar{B}$ zusammenfällt, gilt $OG \parallel B_0\bar{A}^c$. Auf diese Weise wird jedem Punkt \bar{A}^c der Zeichenebene π_0 eine durch ihn gehende Gerade g^c zugeordnet, die den Endpunkt G des zu $B_0\bar{A}^c$ gleichsinnig-parallelen Halbmessers OG von f enthält. Das Problem besteht also darin, aus dem Vorrat solcher Linienelemente (\bar{A}^c, g^c) eine von A_0 ausgehende Kurve zu bilden, was analytisch auf die Lösung (Integration) einer gewöhnlichen Differentialgleichung 1. Ordnung hinausläuft. Die so gewonnene Kurve ist dann der Zentralriß \bar{a}^c der gesuchten Schicksalslinie \bar{a} .

Unter der Schar der unendlich vielen, im allgemeinen etwas komplizierten Integralkurven des Feldes der Linienelemente (\bar{A}^c, g^c) gibt es nun eine sehr einfache, nämlich die *Ellipse* e mit dem Brennpunkt B_0 und dem Hauptscheitelkreis f . Daß sie die Bedingung $OG \parallel B_0\bar{A}^c$ erfüllt, ist anhand der Nebenfigur in Abb. 6 leicht einzu-

sehen. Fällt man aus den Brennpunkten B_0 und C der Ellipse e die Lote auf eine Tangente g^c , so liegen deren Fußpunkte F und G bekanntlich auf dem Hauptscheitelkreis f . Spiegelt man ferner C an g^c nach D , so geht die Gerade B_0D wegen der Reflexionseigenschaft der Ellipse durch den Berührungspunkt \bar{A}^c von g^c . Aus der zentrischen Ähnlichkeit der Dreiecke COG und CB_0D folgt dann die behauptete Beziehung $OG \parallel B_0\bar{A}^c$.

Die durch B_0 und f bestimmte Ellipse e wird allerdings wohl nicht der Forderung genügen, die Ausgangsposition A_0 des Verfolgers A zu enthalten, wenn der Mittelpunkt O auf der Zielbahn b willkürlich angenommen wurde. Durch geeignete Wahl von $O \in b$ kann dies aber erzwungen werden. Hierzu beachte man, daß sich aus der bekannten Steigung der Geraden \bar{b} , nämlich $h/OB_0 = v_1/v_2$, für die numerische Exzentrizität $\epsilon = OB_0/h$ der Ellipse der Wert $\epsilon = v_2/v_1$ ergibt, der also zur Verfügung steht. Aufgrund der Apollonischen Eigenschaft der Ellipse verhalten sich die Abstände ihrer Punkte von einem Brennpunkt und der zugehörigen Leitgeraden wie $\epsilon : 1$. Mit Benützung des bekannten Anfangspunktes A_0 läßt sich daher zunächst die zum Brennpunkt B_0 gehörige Leitgerade $l \perp b$ im Abstand B_0A_0/ϵ angeben. Teilt man anschließend die Abstandsstrecke B_0l innerlich und äußerlich im Verhältnis $\epsilon : 1 = v_2 : v_1$, so hat man die Hauptscheitel der gewünschten Ellipse e , die den ausgezeichneten Zentralriß \bar{a}^c der Schicksalslinie \bar{a} darstellt.

Mit dem über dem Ellipsenzentrum O liegenden Punkt \bar{O} auf \bar{b} hat man, wie sich zeigen wird, den Diagrammpunkt des Treffereignisses gefunden.

Unter Heranziehung der geläufigen, auf den Brennpunkt B_0 bezogenen Polargleichung

$$r = \frac{p}{1 - \epsilon \cos \varphi} \quad (3.4)$$

der Ellipse könnte man auch aus den bekannten Koordinaten r_0, φ_0 der Ausgangsposition A_0 des Verfolgers (Abb. 6) die benötigte Konstante

$$p = r_0(1 - \epsilon \cos \varphi_0) \quad \text{mit} \quad \epsilon = v_2/v_1 \quad (3.5)$$

berechnen. Damit sind dann die zu $\varphi_1 = 0$ und $\varphi_2 = 180^\circ$ gehörigen Scheiteldistanzen $r_1 = p/(1-\epsilon)$ und $r_2 = p/(1+\epsilon)$ bestimmt, was über die Hauptachsenlänge $r_1 + r_2 = 2v_1T$ die *Laufzeitformel*

$$T = \frac{p}{(1 - \epsilon^2)v_1} = \frac{r_0(v_1 - v_2 \cos \varphi_0)}{v_1^2 - v_2^2} \quad (3.6)$$

liefert. Die Treffpunktsentfernung beträgt mithin

$$B_0O = v_2T = \epsilon p/(1 - \epsilon^2). \quad (3.7)$$

Nachdem nunmehr in dem *quadratischen Kegel* Γ mit der bekannten Spitze $\bar{O} \in \bar{b}$ und der Basisellipse $e = \bar{a}^c$ eine Trägerfläche für die gesuchte Verfolger-Schicksalslinie \bar{a} zur Verfügung steht, ist noch diese selbst als unter 45° ansteigende und vom Basispunkt $A_0 \in e$ ausgehende Böschungslinie auf Γ anzulegen. Grundsätzlich ver-

langt das wieder die Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung 1. Ordnung. Bedingt durch den besonderen Umstand, daß der Trägerkegel $\Gamma = \bar{O}e$ den Tangentenrichtkegel $\Delta = \bar{O}f$ längs zweier Erzeugenden berührt, läßt sich das Integrationsproblem elementar bewältigen. Es existieren dann nämlich *stetige Gruppen von Affinitäten*, welche Γ und Δ in sich überführen, so daß sich die Böschungslinie \bar{a} als *Bahnkurve* einer solchen Gruppe gewinnen läßt.

Im kartesischen Koordinatensystem $(\bar{O}; x, y, z)$, dessen x-Achse die Richtung der Bahn b hat, werden die Kegel Γ und Δ beschrieben durch

$$y^2 = \lambda(z^2 - z^2) \quad \text{mit} \quad \lambda = 1 - \epsilon^2 \quad \text{bzw.} \quad 1. \quad (3.8)$$

Nach Übergang zu den an die Berührungserzeugenden $y = x \pm z = 0$ besser angepaßten affinen Koordinaten

$$X = x + z, \quad Y = y, \quad Z = z - x \quad (3.9)$$

lauten die Kegelgleichungen

$$Y^2 = \lambda XZ \quad \text{mit} \quad \lambda = 1 - \epsilon^2 \quad \text{bzw.} \quad 1. \quad (3.10)$$

Eine einparametrische Gruppe von Affinitäten, welche das Achsenkreuz $(\bar{O}; X, Y, Z)$ festlassen, kann angesetzt werden mit

$$X = u^\alpha \cdot X_0, \quad Y = u \cdot Y_0, \quad Z = u^\gamma \cdot Z_0. \quad (3.11)$$

Mit veränderlichem Parameter u stellt (3.11) auch schon die Bahnkurve dar, die ein Punkt (X_0, Y_0, Z_0) unter der Einwirkung der Affinitätsgruppe durchläuft. Die Kegel (3.10) bleiben invariant, wenn die konstanten Exponenten α, γ der Relation

$$\alpha + \gamma = 2 \quad (3.12)$$

genügen. Die Bahn des Punktes A_0 wird dann auf dem Kegel Γ verlaufen. Damit ihre durch die Ableitungen

$$\dot{X} = \alpha u^{\alpha-1} X_0 = \alpha X/u, \quad \dot{Y} = Y/u, \quad \dot{Z} = \gamma Z/u \quad (3.13)$$

bestimmten Tangentenvektoren nach Verlegung in den Ursprung dem Richtkegel Δ angehören, muß gemäß (3.10) $\dot{X}\dot{Z} = \dot{Y}^2$ gelten, also die Bedingung

$$\alpha\gamma = 1 - \epsilon^2 \quad (3.14)$$

erfüllt sein. Mit Rücksicht auf (3.12) hat man daher

$$\alpha = 1 \pm \epsilon, \quad \gamma = 1 \mp \epsilon. \quad (3.15)$$

Wie eine genauere Inspektion der Ausgangssituation lehrt, sind im vorliegenden Fall die unteren Vorzeichen zu nehmen. Mit Benützung der Umkehrformeln von (3.9) gelangt man so zur nachstehenden Parameterdarstellung der *Schicksalslinie* \bar{a} :

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} [(x_0 + z_0)u^{1-\epsilon} + (x_0 - z_0)u^{1+\epsilon}], \\ y &= y_0 u, \\ z &= \frac{1}{2} [(x_0 + z_0)u^{1-\epsilon} - (x_0 - z_0)u^{1+\epsilon}] \end{aligned} \quad (3.16)$$

mit $\epsilon = v_2/v_1$ und

$$x_0 = r_0 \cos \varphi_0 - v_2 T, \quad y_0 = r_0 \sin \varphi_0, \quad z_0 = -v_1 T, \quad (3.17)$$

wobei die Laufzeit T gemäß (3.6) zu berechnen ist. Der Parameter u variiert im Intervall $1 \geq u \geq 0$, wobei $u = 1$ zur Ausgangsposition und $u_1 = 0$ zum Trefferereignis gehört. Dieses wird im Diagramm durch die Kegelspitze $\bar{O}(0, 0, 0)$ repräsentiert; damit ist eine frühere Behauptung bestätigt. – Als Bahnkurve einer Affinitätsgruppe gehört die Schicksalslinie \bar{a} zu den sogenannten „W-Kurven“ nach *S. Lie* und *F. Klein*.

Die ersten beiden Gleichungen (3.16) beschreiben die gesuchte *Hundekurve* a . Sie mündet im Treffpunkt O berührend in die Zielbahngerade b ein. Ob sie sich über O hinaus analytisch fortsetzen läßt, hängt vom Geschwindigkeitsverhältnis ϵ ab und ist nur möglich, wenn die Potenz u^ϵ für $u < 0$ sinnvoll ist. Dies ist bloß für rationale Werte von ϵ der Fall, und dann ist die Kurve a sogar algebraisch. Für die der Abb. 6 zugrundeliegende Annahme $\epsilon = 1/2$ beispielsweise ist die Hundekurve von 3. Ordnung; es handelt sich um die bekannte *Tschirnhaus-Kubik* [2/I, S. 90ff]. – Variation von r_0 bei festem φ_0 ändert T, x_0, y_0, z_0 und damit auch x und y proportional. Hieraus folgt, daß alle zum selben Geschwindigkeitsverhältnis ϵ gehörigen Hundekurven untereinander *ähnlich* sind.

Aus bestimmten Gründen hat sich die Kriegsmarine für verallgemeinerte Verfolgungskurven interessiert, bei welchen die Laufrichtung des Torpedos A von der Peilrichtung AB um einen konstanten „Schielwinkel“ σ abweicht; die klassischen Hundekurven ordnen sich offenbar mit $\sigma = 0$ ein. Unter Voraussetzung eines gleichförmig und geradlinig wandernden Ziels B läßt sich auch dieses allgemeinere Problem mit der hier auseinandergesetzten Methode behandeln [7]. Die Verfolger-Schicksalslinie \bar{a} erweist sich wieder als Böschungslinie auf einem quadratischen Kegel Γ , der vom Tangentenrichtkegel Δ längs zweier Erzeugenden berührt wird, die einander allerdings nicht mehr gegenüberliegen. Die Kurve \bar{a} kann ebenfalls als Bahnkurve einer einparametrischen Affinitätsgruppe gewonnen werden, ist also auch eine W-Kurve. Das Zusammentreffen des Verfolgers A mit dem Ziel B in O erfolgt jedoch nicht mehr tangentiell.

4 Laufzeitminima

Aufgabe 6 Ein Pionier A soll einen mit konstanter Geschwindigkeit c zwischen geradlinig parallelen Ufern fließenden Strom in einem Kahn überqueren, der bloß eine

– Die der geringsten Abtrift entsprechende Schicksalslinie \bar{a}_2 ist Umrißerzeugende für den Kegelgrundriß; der zugehörige Hyperbelpunkt \bar{A}_2 besitzt eine lotrechte Tangente. Die entsprechende Steuerlage, angezeigt durch die \bar{a}_2 treffenden Parallelkreisradien, ist normal zur Bahn a_2 . – Der zur Frage c) gehörige Hyperbelpunkt \bar{A}_3 ist jener, in welchem die Tangente \bar{b}_3 die der Laufgeschwindigkeit v entsprechende Steigung $-c/v$ aufweist.

Abb. 7 zeigt das Fahrplandiagramm in Grund- und Aufriß für alle drei Teilfragen. Die den vermerkten Angabedaten entsprechenden Zeiten t_i für die Überfuhr sowie die Gesamtzeiten T_i sind auf der angelegten Zeitskala abzulesen, die Abtriften $s_i = B_0 A_i$ ($i = 1, 2, 3$) können mittels des auf der Strombreite ersichtlichen Längemaßstabes beurteilt werden. Im Grundriß wurden überdies die Bootslagen und -stellungen von Minute zu Minute eingetragen.

Aufgabe 7 Ein am Strand in A_0 postierter Aufseher bemerkt einen im Wasser an der Stelle B_1 in Not befindlichen Badegast. Auf welchem Weg kann er am raschesten zu Hilfe kommen, wenn seine Geschwindigkeit zu Lande den Betrag v_1 und im Wasser den Betrag v_2 hat, und die Uferlinie gerade verläuft?

Daß der Retter sowohl im (als eben und hindernisfrei angenommen) Gelände als auch im Wasser nach Möglichkeit gerade Wege einschlagen wird, versteht sich von selbst; die Frage ist also bloß, an welcher Stelle P des Ufers g der Wechsel vom Laufen zum Schwimmen erfolgen soll. Seine Schicksalslinie wird aus zwei Strecken $A_0 \bar{P}$ und $\bar{P} \bar{B}_1$ mit bekannten Steigungen c/v_1 bzw. c/v_2 bestehen. Die erste Teilstrecke gehört dem oberen Teil eines Drehkegels Δ_1 mit der Spitze A_0 an, die zweite dem unteren Teil eines Drehkegels Δ_2 , dessen Spitze \bar{B}_1 sich in noch unbekannter Höhe $Z = cT$ über B_1 befindet. Diese Kegel schneiden aus der längs g errichteten Vertikalebene γ zwei Hyperbeläste g_1 bzw. g_2 aus (Abb. 8).

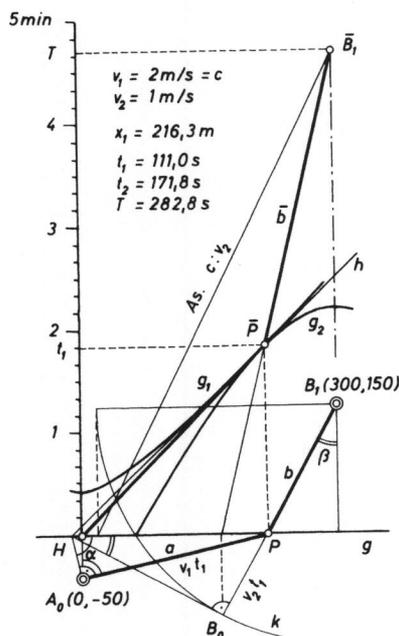


Abb. 8

Sollten dieselben einander überlappen, so könnte durch Verringerung der Höhe Z die Zeit T vermindert werden. Die Grenze dieser Maßnahme, die eine Verschiebung von g_2 bewirkt, ist offenbar erreicht, wenn zwischen g_1 und g_2 *Berührung* herrscht. Im Gegensatz zu den vorhergehenden Aufgaben ist die vorliegende nicht mit Lineal und Zirkel zu lösen, weil sie auf eine Gleichung 4. Grades führt.

Die gemeinsame Tangente h im Berührungspunkt \bar{P} der Hyperbeln g_1 und g_2 verläuft in der Vertikalebene γ sowie in den zu \bar{P} gehörigen Tangentialebenen τ_1 und τ_2 der Kegel Δ_1 und Δ_2 . Sucht man nun von den Ebenen τ_1 und τ_2 , welche die Kegel längs der Erzeugenden $A_0\bar{P}$ bzw. $\bar{B}_1\bar{P} = \bar{B}_1B_0$ berühren, die Grundspuren $A_0H \perp A_0P$ und $B_0H \perp B_0B_1$ auf, so müssen dieselben einander im Spurpunkt H von h auf g treffen (Abb. 8). Die konstruktive Lösung der Aufgabe verlangt demnach, zwei rechtwinklige Dreiecke HA_0P und HB_0P mit gemeinsamer Hypotenuse HP auf g zu ermitteln, die folgende Bedingungen erfüllen: die Verlängerung der Kathete B_0P muß durch B_1 gehen, und die Längen der Katheten A_0P und B_0P sollen sich wie $v_1 : v_2$ verhalten. Ein solches Dreieckspaar ist nach wenigen Versuchen gefunden, und der Punkt P bezeichnet dann die Uferstelle, an welcher der Übertritt ins Wasser zu erfolgen hat.

Bedeutet α und β die Winkel, um welche die Laufstrecke A_0P bzw. die Schwimmstrecke PB_1 von der Ufernormale abweichen, so liest man aus den rechtwinkligen Dreiecken HA_0P und HB_0P die Relation

$$\sin \alpha : \sin \beta = v_1 : v_2 \quad (4.1)$$

ab. Dieses grundlegende, von der Lage der Punkte A_0 und B_1 unabhängige *Brechungsgesetz* würde den Ansatz für eine iterative numerische Lösung der Aufgabe bieten.

5 Optische Aufgaben

Ein *Lichtstrahl* kann im Sinne der Korpuskulartheorie als Bahn eines Teilchens aufgefaßt werden, das gemäß dem Fermatschen Prinzip seinen Weg in *minimaler Laufzeit* bewältigt; die Geschwindigkeit $v = c/n$ ist dabei an jeder Stelle umgekehrt proportional zur (örtlichen) *Brechzahl* n des durchlaufenen Mediums und hat im Vakuum ($n = 1$) den Betrag $c = 300\,000$ km/s. Hieraus folgt zunächst einmal die Geradlinigkeit der Lichtstrahlen im homogenen Medium ($n = \text{const.}$).

Grenzen hingegen zwei (homogene) Medien längs einer Trennfläche aneinander, dann erfährt ein Lichtstrahl beim Übertritt eine als *Brechung* bezeichnete Richtungsänderung. Ist die Trennfläche γ eben, so liegen in jeder zu γ normalen Ebene π_0 die Verhältnisse von Aufgabe 7 vor. Die dort aus der Forderung minimaler Laufzeit abgeleitete Relation (4.1) ist nichts anderes als das Brechungsgesetz von *Snellius*, welches

besagt, daß die von der Flächennormale aus gemessenen Einfallswinkel α, β der Bedingung

$$\sin \alpha : \sin \beta = n_2 : n_1 \quad (5.1)$$

genügen. Im Falle einer *Reflexion* ist wegen $\beta = -\alpha$ bloß $n_2 = -n_1$ zu nehmen.

Beschränkt man sich auf optische Vorgänge in einer Ebene π_0 — was häufig geschieht, z.B. bei Linsensystemen mit gemeinsamer Rotationsachse, wo der Strahlengang in einer Achsenebene entscheidend ist —, so können räumliche Fahrplandiagramme gute Dienste leisten. Dies hat *A. Reuschel* in einer kurzen Note [5] angedeutet. Unter Verwendung der Lichtgeschwindigkeit c im Vakuum als Proportionalitätsfaktor bedeutet die Höhenkote $z = ct$ die sogenannte „optische Länge“.

Aufgabe 8 Welche Eigenschaften hat das Raumdiagramm der von einer punktförmigen Lichtquelle A_0 ausgehenden Lichtstrahlen in einer Ebene, wenn sie an der Grenzlinie g zweier homogenen Medien gebrochen werden?

Ist n_1 die Brechzahl des die Lichtquelle A_0 umgebenden Mediums, dann bilden die Schicksalsgeraden \bar{a} aller gleichzeitig von A_0 ausgehenden Korpuskel die Erzeugenden der oberen Hälfte eines Drehkegels Δ_1 mit der Spitze A_0 und zur waagrecht gedachten Grundebene π_0 normaler, also lotrechter Achse („Böschungskegel“); die Steigung beträgt $c/v_1 = n_1$. Sei P der Punkt, in welchem ein Lichtstrahl a die Grenzlinie g trifft, und b seine Fortsetzung nach erfolgter Brechung (deren Gesetz noch zu klären ist). Nach dem Fermatschen Prinzip soll die Laufzeit zwischen A_0 und irgendeinem Punkt $B \in b$ minimal sein. Hält man B fest, so liegt nur insofern eine Verallgemeinerung der Aufgabe 7 vor, als jetzt die Grenzlinie g nicht gerade zu sein braucht; die Überlegungen sind jedoch ganz analog. Die Schicksalsstrecke \bar{PB} des Wegabschnitts PB wird der unteren Hälfte eines zweiten Böschungskegels Δ_2 angehören, dessen Steigung durch die Brechzahl n_2 des zweiten Mediums gegeben ist, dessen Spitze \bar{B} sich aber in noch unbekannter Höhe über B befindet. Errichtet man nun über g den *Vertikalzylinder* Γ , so schneiden ihn die Kegel Δ_1 und Δ_2 nach zwei Raumkurven g_1 und g_2 , die an die Stelle der beiden Hyperbeln von Aufgabe 7 treten. Sollten einander die Kurven g_1 und g_2 überlappen, dann ließe sich durch Verringerung der Höhe \bar{BB} die Gesamtlaufzeit herabsetzen, und das Minimum wird wieder erreicht, wenn g_1 und g_2 einander in einem Punkt \bar{P} berühren. Aus dem Umstand, daß die gemeinsame Tangente h an der Berührungsstelle \bar{P} der Tangentialebene γ von Γ sowie jenen beiden Tangentialebenen τ_1 und τ_2 angehört, welche Δ_1 längs \bar{a} bzw. Δ_2 längs \bar{b} berühren, läßt sich in gleicher Weise wie in Abb. 8 wieder die Gültigkeit des *Snelliusschen* Brechungsgesetzes (4.1) oder (5.1) folgern.

Bringt man nun in \bar{P} einen zu Δ_2 kongruenten Böschungskegel δ_2 an, dann wird er Δ_2 längs der Erzeugenden \bar{b} berühren (Abb. 9). Wird dieser Kegel δ_2 mit seiner Spitze \bar{P} entlang der Kurve g_1 verschoben, so erzeugt er eine Hüllfläche Θ , die er längs der Erzeugenden \bar{b} berührt, denn die zur Bahntangente h von \bar{P} parallelen Fortschreitrichtungen aller Punkte von \bar{b} verlaufen tangentiell zu δ_2 . Hieraus ist zu erkennen, daß die Fläche Θ eine die Diagrammgeraden \bar{b} enthaltende *Regelfläche*

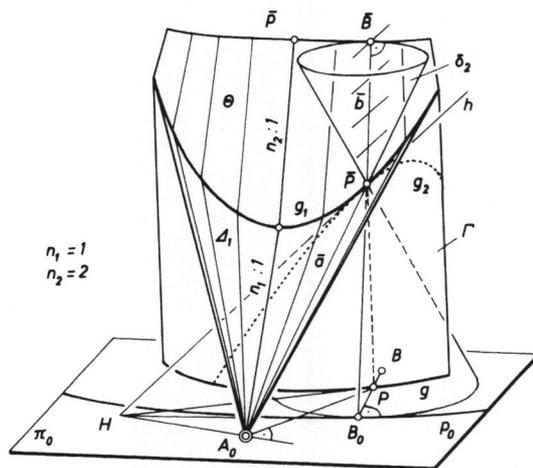


Abb. 9

ist; sie ist überdies *abwickelbar*, weil sie längs jeder Erzeugenden \bar{b} von ein und derselben Tangentialebene τ_2 berührt wird. Es handelt sich mithin um eine *Böschungstorse* mit der Steigung n_2^2 . – Die Antwort auf die in Aufgabe 8 gestellte Frage lautet demnach: Die zu den von einem Zentrum A_0 ausgehenden Lichtstrahlen a gehörigen Diagrammgeraden \bar{a} bilden einen Böschungskegel Δ_1 mit der Steigung n_1 , die den an einer Grenzlinie g gebrochenen Lichtstrahlen b entsprechenden Diagrammgeraden \bar{b} eine Böschungstorse Θ mit der Steigung n_2 durch die Schnittkurve g_1 von Δ_1 mit dem Vertikalzylinder Γ über der Basis g .

Die Erzeugenden \bar{b} bilden die *Falllinien* auf der Böschungstorse Θ , d.h. die Linien stärksten Gefälles³. Die Horizontalschnitte $z = \text{const}$, also die *Schichtenlinien* \bar{p} von Θ , treffen sämtliche Erzeugenden \bar{b} unter rechtem Winkel. Ihre Grundrisse p durchsetzen das System der gebrochenen Lichtstrahlen b orthogonal und könnten wegen $z = ct$ als „Isochronen“ $t = \text{const}$ angesprochen werden; sie stellen daher bei wellentheoretischer Auffassung die *Wellenfronten* der Lichtausbreitung im zweiten Medium dar⁴.

Die obigen, von einem Lichtstrahlbüschel ausgehenden Betrachtungen könnten auf ein beliebiges Strahlensystem erweitert werden, das als Normalenschar einer gegebenen Wellenfront p_0 im ersten Medium anzunehmen wäre. Statt des Drehkegels Δ_1 müßte lediglich die durch p_0 legbare Böschungstorse mit der Steigung n_1 verwendet werden. Unter fortgesetzter Wiederholung kann so der Strahlengang durch ein aus beliebig vielen brechenden oder spiegelnden Elementen bestehendes optisches System im Raumdiagramm verfolgt werden.

Aufgabe 9 Es ist das Profil eines rotationssymmetrischen Linsenkörpers zu ermitteln, der die von einem Achsenpunkt A_0 ausgehenden Lichtstrahlen a) wieder in einem Achsenpunkt B_1 sammelt; b) parallel zur Achse ablenkt.

Es genügt, die Verhältnisse in einer Achsenebene π_0 zu betrachten, die wieder waagrecht gedacht wird. Die den von A_0 ausgehenden Lichtstrahlen a entsprechenden Diagrammgeraden \bar{a} bilden die obere Hälfte eines Drehkegels Δ_1 mit der Spitze A_0 und der Steigung n_1 ; ist das A_0 umgebende Medium etwa Luft, so kann $n_1 = 1$ ge-

nommen werden (genauer 1,0003). Sollen die gebrochenen Lichtstrahlen b ebenfalls ein Bündel bilden, dann ist die von den zugehörigen Diagrammgeraden \bar{b} gebildete Böschungfläche Δ_2 im Fall a) ein Drehkegel mit der Spitze \bar{B}_1 über B_1 , im Fall b) eine Ebene, weil die alle b orthogonal durchsetzenden Wellenfronten q kreisförmig bzw. gerade sind; die Steigung n_2 hat bei Glas einen Wert um 1,5. Das gesuchte Linsenprofil g ergibt sich nun einfach als Grundriß der Schnittkurve \bar{g} von Δ_1 und Δ_2 .

Im Fall a) ist \bar{g} als Durchdringungskurve zweier Drehkegel eine *Raumkurve 4. Ordnung*, die nach passend gewählter Höhe Z von \bar{B}_1 über B_1 mittels geläufiger Verfahren der darstellenden Geometrie punkt- und tangentialweise leicht zu konstruieren ist [8/I, S. 168]. So mag man etwa Hilfsebenen ϵ durch die Verbindungsgerade $A_0\bar{B}_1$ der Kegelspitzen legen. Eine solche Ebene, festgelegt durch ihre parallelen Schichtenlinien e_0 in π_0 (durch A_0) und \bar{e}_1 in π_1 (durch \bar{B}_1), schneidet die beiden Kegel nach Erzeugenden \bar{a} und \bar{b} , deren gemeinsame Punkte \bar{P} der Raumkurve \bar{g} angehören (Abb. 10).

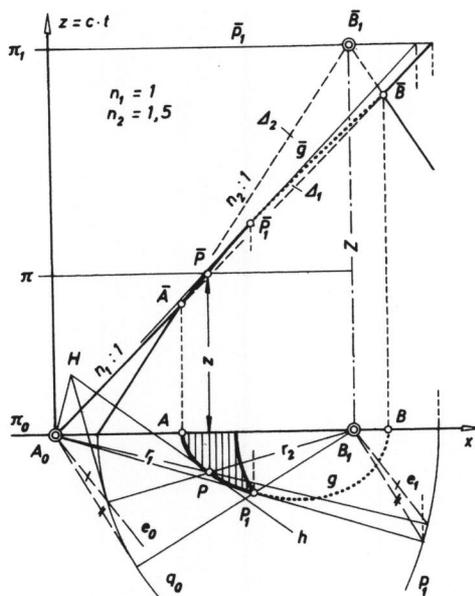


Abb. 10

Die zugehörige Tangente h ist als Schnittgerade der Tangentialebenen τ_1 und τ_2 hinzuzufügen, die Δ_1 längs \bar{a} bzw. Δ_2 längs \bar{b} berühren. Die den Basiskreis q_0 von Δ_2 berührende Grenzlage von e_0 liefert den letzten brauchbaren Profilpunkt P_1 ; hier könnte die asphärische Linse auf der Rückseite durch eine Kugelfläche um B_1 abgeschlossen werden. – Nach einer anderen Methode mag man Schichtenebenen $\pi \parallel \pi_0$ heranziehen, die die Kegel nach Parallelkreisen \bar{p} und \bar{q} schneiden; deren gemeinsame Punkte \bar{P} sind wieder Punkte von \bar{g} . Bezeichnen r_1 und r_2 die Radien der Schichtenkreise \bar{p} bzw. \bar{q} , dann gilt für die Höhenkote z von π die Beziehung $z = r_1 n_1 = Z - r_2 n_2$. Hieraus folgt für alle Punkte P des Linsenprofils g , daß ihre Abstände r_1 und r_2 von den „Brennpunkten“ A_0 bzw. B_1 der Relation

$$n_1 r_1 + n_2 r_2 = Z = \text{const} \quad (5.2)$$

genügen. Die durch eine solche lineare Gleichung in „bipolaren Koordinaten“ r_1, r_2 gekennzeichneten Kurven 4. Ordnung sind als *Cartesische Ovale* bekannt [2/I, S. 174ff]; auszunehmen sind lediglich die Annahmen $Z = 0$ oder $n_1 n_2 = 0$ (Kreise) sowie $n_1 \pm n_2 = 0$ (Hyperbeln bzw. Ellipsen).

Im Falle der Aufgabe 9b) ist der Drehkegel Δ_1 mit einer Ebene Δ_2 zu schneiden, die unter der Voraussetzung $n_2 > n_1$ steiler als Δ_1 verläuft und daher eine *Hyperbel* \bar{g} liefert. Das gesuchte Linsenprofil g ist mithin ebenfalls eine Hyperbel (Abb. 11).

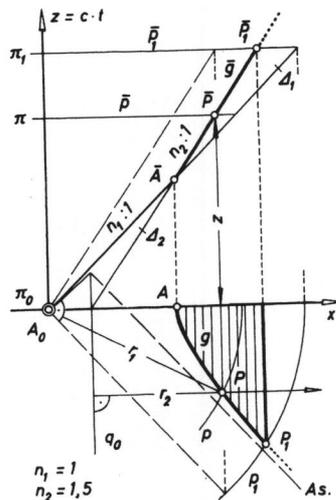


Abb. 11

Werden Profilverpunkte $P \in g$ wieder mit Hilfe von Schichtenebenen $\pi \parallel \pi_0$ konstruiert, so findet man zwischen der Höhenkote z und dem Radius $r_1 = A_0 P$ des aus Δ_1 ausgeschnittenen Parallelkreises \bar{p} bzw. dem Abstand $r_2 = q_0 P$ von der Grundspur q_0 der Ebene Δ_2 die Abhängigkeit $z = r_1 n_1 = r_2 n_2$. Die daraus folgende Relation

$$r_1 : r_2 = n_2 : n_1 \quad (5.3)$$

kennzeichnet nach *Apollonius* neuerlich das Profil g als *Hyperbel* mit dem Brennpunkt A_0 , der zugehörigen Leitlinie q_0 und der numerischen Exzentrizität $\epsilon = n_2/n_1 > 1$ [8/I, S. 83]. Daß die asphärische Linse rückseitig durch eine achsennormale Ebene abzuschließen ist, versteht sich von selbst.

Aufgabe 10 Es ist das Profil der sogenannten Schmidtschen Korrekionsplatte zu ermitteln, die dazu dient, ein Lichtbündel A_0 nach Reflexion an einem sphärischen Hohlspiegel durch eine plankonkave Linse in ein Parallelenbündel zu verwandeln.

Ein Parabolspiegel würde alle vom Brennpunkt A_0 ausgehenden Lichtstrahlen exakt achsenparallel zurückwerfen. Wird jedoch die Meridianparabel durch ihren Scheitelkrümmungskreis ersetzt, so muß die durch den entsprechenden sphärischen Spiegel hervorgerufene Konvergenz der reflektierten Lichtstrahlen mittels einer Zerstreulinse korrigiert werden. In einer Achsenebene π_0 liegt also ein spiegelnder Kreis g_1 vor, dessen Radius OA_1 durch die Lichtquelle A_0 halbiert wird. Im zugehörigen Raumdiagramm ist mithin der von A_0 ausstrahlende *Böschungskegel* Δ_1 (Steigung

$n_1 = 1$) mit dem über g_1 errichteten Drehzylinder Γ zu schneiden, was eine Raumkurve 4. Ordnung \bar{g}_1 liefert (Abb. 12).

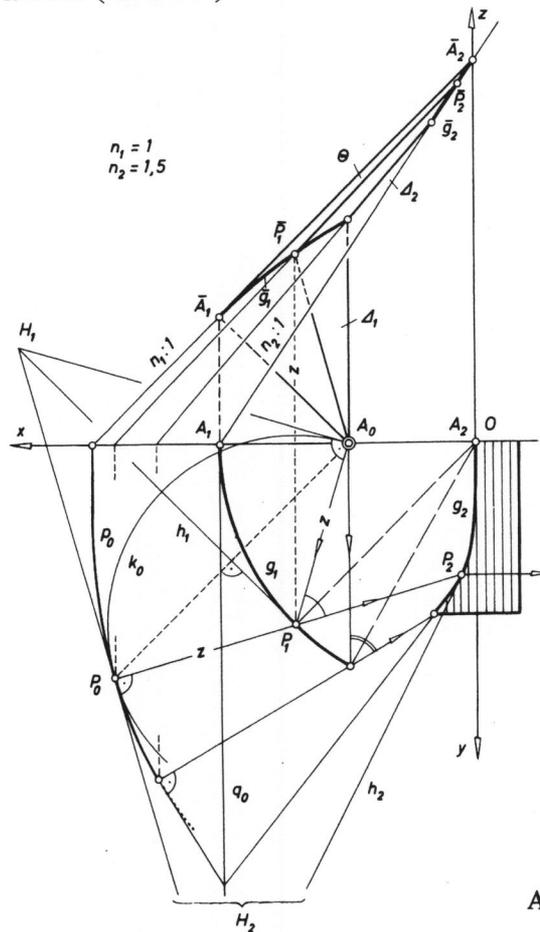


Abb. 12

Anschließend ist durch \bar{g}_1 die von Δ_1 verschiedene *Böschungstorse* Θ derselben Steigung zu legen; sie ist Einhüllende der in den Punkten $\bar{P}_1 \in \bar{g}_1$ angebrachten Böschungskegel δ_1 , deren Basiskreise k_0 durch A_0 gehen. Die Basiskurve p_0 von Θ ist daher die Einhüllende der auf g_1 zentrierten Kreise k_0 , wobei der jeweilige Berührungspunkt P_0 das Spiegelbild von A_0 bezüglich der Kreistangente h_1 in P_1 ist⁵.

Die so festgelegte, das System der an g_1 reflektierten Strahlen repräsentierende Torse Θ ist jetzt nur noch mit der das Parallelenbündel im Glas darstellenden *Ebene* Δ_2 zu schneiden, die mit der Steigung $n_2 = 1,5$ an passender Stelle anzunehmen ist. Der Grundriß der Schnittkurve \bar{g}_2 gibt dann das gesuchte Profil g_2 der Korrektionslinse an. Man konstruiert zunächst einzelne Punkte P_2 von g_2 , indem man Torsenerzeugende $P_0\bar{P}_1$ mit Δ_2 schneidet (Abb. 12). Die zugehörige Profiltangente $h_2 = P_2H_2$ ergibt sich als Grundriß der Schnittgerade von Δ_2 mit jener Tangentialebene, die Θ längs $P_0\bar{P}_1$ berührt. — Auf analytischem Weg läßt sich zeigen, daß das Profil g_2 eine algebraische *Kurve 10. Ordnung* ist.

Es ist nicht zu bestreiten, daß das auseinandergesetzte konstruktive Verfahren den hohen Genauigkeitsansprüchen der Optik nicht genügen kann, doch liefert es rasch und

bequem eine gute Übersicht, die unbrauchbare Konzepte sofort zu verwerfen gestattet. Überdies haben die praktischen Erfahrungen von A. Reuschel bei den Optischen Werken C. Reichert in Wien gezeigt, daß die unerläßliche Durchrechnung des Strahlenganges durch ein optisches System besonders klar und zweckmäßig verläuft, wenn sie von den geometrischen Vorstellungen eines Raumdiagramms geleitet wird.

Literatur

- [1] *Graham, L.A.*: Ingenious mathematical problems and methods. New York: Dover Publ. 1959.
- [2] *Loria, G., Schütte, F.*: Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven I, II. (2. Aufl.) Leipzig/Berlin: Teubner 1910.
- [3] *Meusemann, K., Stange, K.*: Mathematik und Marine (Math.-phys. Bibl., Reihe I, Bd. 89). Leipzig/Berlin: Teubner 1936.
- [4] *Müller, E., Krames, J.*: Die Zyklographie (Vorlesungen über Darstellende Geometrie, Bd. II). Leipzig/Wien: Deuticke 1929.
- [5] *Reuschel, A.*: Über ein dreidimensionales Verfahren zur Behandlung optischer Probleme. Optik 10 (1953), 470–475.
- [6] *Wunderlich, W.*: Über fünf Aufgaben der Seetaktik. Z. math. natw. Unterr. 72 (1941), 97–102.
- [7] *Wunderlich, W.*: Über die Hundekurven mit konstantem Schielwinkel. Monatsh. Math. 61 (1957), 227–311.
- [8] *Wunderlich, W.*: Darstellende Geometrie I, II (Hochschultaschenb., Bd. 96 u. 133). Mannheim: Bibliogr. Inst. 1966/67.

Anmerkungen

- 1 Im Ausnahmefall lotrechter Stellung der Ebene ϵ , die bei übereinstimmenden Bahngeraden $a = b$ auftritt (vgl. Aufgabe 4), wird man diese Ebene umklappen oder, wenn man mit der kotierten Projektion auskommen will, durch \bar{a} und \bar{b} zwei verschiedene Hilfsebenen legen; deren Schnittgerade geht dann durch den gesuchten Diagrammpunkt $\bar{A} = \bar{B}$ des Treffereignisses (\bar{A}_1 in Abb. 5).
- 2 Die einschlägigen Überlegungen bei A. Reuschel [5] sind nicht schlüssig, weil die gemeinsame Steigung n_2 aller Erzeugenden \bar{b} noch nicht die Abwickelbarkeit der Regelfläche Θ bedingt.
- 3 Man könnte zeigen, daß die Erzeugenden \bar{b} der Böschungstorse Θ im allgemeinen die Tangenten einer gewissen Raumkurve konstanter Steigung n_2 sind, doch ist dies für das Folgende unerheblich.
- 4 Eine dem Wellencharakter des Lichtes angepaßte Herleitung der Böschungstorsen im Raumdiagramm vermittelt die *Zyklographie* [4, § 47]. Hierbei repräsentieren die oben eingeführten Böschungskegel δ_2 die Huygensschen Elementarwellen.
- 5 Die Basiskurve p_0 läßt sich kinematisch als Bahn des Punktes P_0 erzeugen, wenn dieser beim Rollen des zu g_1 bezüglich h spiegelbildlichen Kreises auf g_1 mitgenommen wird [4, S. 271]; diese Radlinie 4. Ordnung ist als „Pascalschnecke“ bekannt [2/I, S. 147].

Anschrift des Verfassers

Prof. Dr. W. Wunderlich
Alserstr. 69
A-1080 Wien
dienstl.:
Technische Universität
A-1040 Wien, Gußhausstr. 27