

Sitzung der mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse
vom 26. Juni 1980

Sonderabdruck aus dem Anzeiger der math.-naturw. Klasse der
Österreichischen Akademie der Wissenschaften, Jahrgang 1980, Nr. 5

(Seite 82 bis 87)

Das wirkl. Mitglied Walter Wunderlich übersendet eine
von ihm selbst verfaßte kurze Mitteilung:

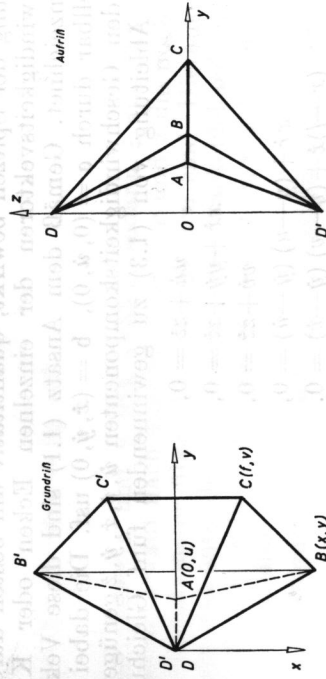
„Wackelige Doppelpyramiden.“

1. Angeregt durch eine Arbeit von W. Blaschke [1] über
Wackeloktaeder und neuerdings durch einen Artikel von M.
Goldberg [2] über verschiedenartige Wackelstrukturen hat
der Verfasser eine Reihe von einschlägigen Untersuchungen
angestellt [3—9]. Ergänzend hierzu werden jetzt *Doppelpyra-*
miden mit zwei Symmetrieebenen betrachtet, die bei bestimmten
Abmessungen eine infinitesimale Beweglichkeit aufweisen.

Es handelt sich zunächst um Doppelpyramiden mit einem
achsensymmetrischen *Basistrapez* $ABCC'B'$ und einem bezüg-
lich der Basisebene spiegelbildlichen Spitzenpaar D, D' . In einem
diesem Dekaeder gemäß Abb. 1 angepaßten kartesischen Koordi-
natensystem $(O; x, y, z)$ können die sieben Ecken angesetzt werden
mit

- (1.1) $A(0, u, 0), B(x, y, 0), B'(-x, y, 0),$
 $C(f, v, 0), C'(-f, v, 0), D(0, 0, z), D'(0, 0, -z).$

Abb. 1: Wackeldekaeder.



Für die Kantenlängen

$$(1.2) \quad \begin{aligned} AD=AD' &= a, & BD=BD' &= B'D=B'D'=b, \\ CD=CD' &= C'D=C'D'=c, & AB=AB' &= d, & BC=BC' &= e, \\ CC' &= 2f \end{aligned}$$

bestehen dann die Formeln

$$(1.3) \quad \begin{aligned} w^2+z^2 &= a^2, \\ x^2+y^2+z^2 &= b^2, \\ v^2+z^2 &= c^2-f^2, \\ x^2+(y-u)^2 &= d^2, \\ (x-f)^2+(y-v)^2 &= e^2. \end{aligned}$$

Nach Vorgabe der sechs Kantenlängen a bis f lassen sich aus diesen fünf (quadratischen) Gleichungen die fünf Formparameter u, v, x, y, z berechnen, wodurch die Gestalt des Dekaeders bestimmt ist, wenn auch nicht eindeutig und nicht unbedingt reell. Diese Formbestimmung aus den Kantenlängen erweist sich, wie nicht näher ausgeführt werden soll, als Problem 4. Grades.

2. Sind zwei der vier möglichen Formen einer solchen Doppelpyramide nicht allzu verschieden, so kann ein entsprechendes Karton- oder Stabmodell mit gelenkig ausgeführten Verbindungen zum *Umknippen* von der einen Form in die andere gebracht werden.

Rücken die beiden erwähnten Formen zusammen, so hat man ein infinitesimal bewegliches „*Wackeldekaeders*“, dessen Wackeligkeit am Modell überaus deutlich zu merken ist. Bei festgehaltenem Achsenkreuz $(O; x, y, z)$ wird die Wackelbewegung, die eine infinitesimale Verformung der Pyramidenbasis und eine Abstandsänderung der Spitzen bewirkt, quantitativ am besten durch die Geschwindigkeitsvektoren der einzelnen Ecken oder Knoten gekennzeichnet. Gemäß dem Ansatz (1.1) sind diese Vektoren darstellbar durch $\mathbf{a} = (0, \dot{u}, 0)$, $\mathbf{b} = (\dot{x}, \dot{y}, 0)$ usw. Die dabei auftretenden Geschwindigkeitskomponenten $\dot{u}, \dot{v}, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ genügen den durch Ableitung von (1.3) zu gewinnenden fünf Gleichungen

$$(2.1) \quad \begin{aligned} u\dot{u} + z\dot{z} &= 0, \\ x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z} &= 0, \\ v\dot{v} + z\dot{z} &= 0, \\ x\dot{x} + (y-u)(\dot{y}-\dot{u}) &= 0, \\ (x-f)\dot{x} + (y-v)(\dot{y}-\dot{v}) &= 0. \end{aligned}$$

Damit dieses linear-homogene Gleichungssystem ein nicht-triviales Lösungstupel liefert, muß seine Koeffizienten-determinante verschwinden, was dann die maßgebende, den Formparametern auferlegte „Wackelbedingung“ ergibt. Bequemer als die Auswertung der fünfzeiligen Determinante ist die direkte Auflösung des Gleichungssystems (2.1). Die erste und die dritte Gleichung erlauben den Ansatz

$$(2.2) \quad \dot{u} = \lambda v, \quad \dot{v} = \lambda u, \quad \dot{z} = -\lambda uv/z \quad \text{mit } \lambda \neq 0.$$

Hieraus folgt dann weiter

$$(2.3) \quad \dot{x} = \lambda(u-y)^2 v/ux, \quad \dot{y} = \lambda(2u-y)v/u$$

und nach Eintragen dieser Ausdrücke in die noch nicht benutzte letzte Gleichung (2.1) schließlich die gesuchte *Wackelbedingung*:

$$(2.4) \quad x(u-v)(2uv-uy-vy) = fv(u-y)^2.$$

Man beachte, daß z in ihr nicht auftritt.

3. Nach Übergang zu den dimensionslosen Größen

$$(3.1) \quad \xi = x/f, \quad \eta = y/v, \quad \tau = u/v$$

nimmt die Wackelbedingung (2.4) die nachstehende Gestalt an:

$$(3.2) \quad (1-\tau)(\eta+\tau\eta-2\tau)\xi = (\eta-\tau)^2.$$

Man kann also etwa τ und η frei wählen, sodann ξ aus (3.2) linear berechnen, worauf nach Annahme von f, v und z die noch fehlenden Formparameter über (3.1) zu ergänzen sind. Hieraus ist zu erkennen, daß unter den ∞^5 existierenden Wackeldekaedern jeweils die ∞^3 zum selben Ausgangswertepaar τ, η gehörigen untereinander *affin* sind.

Die Wahl geeigneter, überschlagene Basisfünfecke vermeidender Kennwerte τ, η wird durch eine nach dem Muster von

Die zur Anfertigung eines Modells benötigten Kantenlängen sind jeweils mittels der Formeln (1.3) zu berechnen. Die Wackelrichtungen der Knoten (1.1) sind durch ihre Komponenten (2.2) und (2.3) bestimmt.

4. Der Grenzfall von *Wackeloktaedern* läßt sich mit der Annahme $f = 0$ unterordnen; durch Zusammenrücken der Ecken C und C' reduziert sich das ursprüngliche Basisfünfeck auf ein Deltoid $ABCB'$. Die Wackelbedingung (2.4) lautet nun (unter Ausschluß der Ausartung $u = v$):

$$(4.1) \quad (u+v)y = 2uv,$$

bzw. in dimensionsloser Form:

$$(4.2) \quad (\tau+1)\eta = 2\tau.$$

Geometrisch bedeutet die Bedingung (4.1), daß die Ecken A und C das Gemeinlot der Diagonalen BB' und DD' harmonisch teilen (Abb. 3). In *projektiver Verallgemeinerung* — für die merkwürdige, jedoch bekannte Invarianz der Wackeligkeit einer Struktur gegenüber Affinitäten und Kollineationen hat der Verfasser kürzlich in [9] einen neuen Beweis geliefert — erhält man daher ein Wackeloktaeder der vorliegenden Bauart, wenn man von einem beliebigen windschiefen Viereck $BDB'D'$ ausgeht und auf einer Treffgeraden der Diagonalen BB' und DD' ein die Treffpunkte harmonisch trennendes Eckenpaar A, C hinzufügt. Dies sind allerdings nicht die allgemeinsten Wackeloktaeder, die in [1] und [3] behandelt wurden.

Abb. 3: Wackeloktaeder.

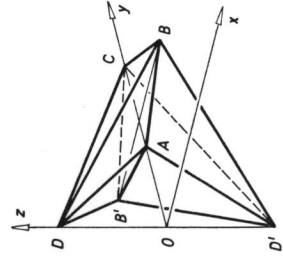
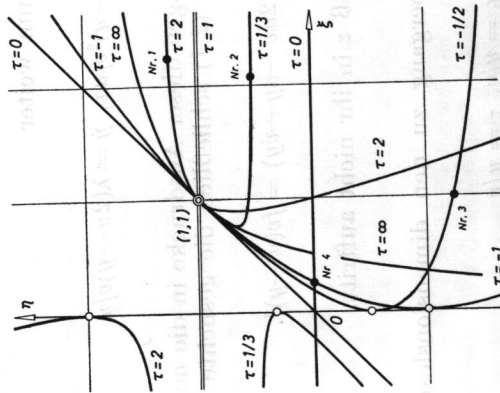


Abb. 2 angelegte *Kurventafel* erleichtert, welche eine Anzahl der durch (3.2) in der $\xi\eta$ -Ebene erklärten *Kegelechnitte* $\tau = \text{const}$ wiedergibt. Es handelt sich hierbei für gewöhnlich um Hyperbeln mit folgenden gemeinsamen Elementen: Dem Fernpunkt der ξ -Achse, dem eigentlichen Punkt $\xi = \eta = 1$ mit der festen Tangente $\xi = \eta$, und der eigentlichen Tangente $\xi = 0$ ¹⁾. Ausnahmen bilden die Parabel $\tau = -1$, das Geradenpaar $\tau = 0$ und die Doppelgerade $\tau = 1$.

Abb. 2: Kurventafel zur Wackelbedingung.



Nachstehend seien einige typische Beispiele angeführt; die zugehörigen Diagrammpunkte sind in Abb. 2 mit der entsprechenden Nummer vermerkt.

Nr.	τ	η	$\xi(3.2)$	f	$x = f/\xi$	v	$u = v\tau y = v\eta$	z (bel.)
1	2	5/4	9/4	4	9	8	16	12
2	1/3	14/27	25/12	12	25	27	9	14
3	-1/2	-5/4	1	4	4	4	-2	-5
4	-1	0	1/4	4	1	4	-4	0

¹⁾ Man gewinnt eine unmittelbare Vorstellung vom Aussehen des Basisfünfecks, wenn man den Berührungspunkt $(0, \tau)$ der Diagrammkurve mit der η -Achse als Ecke A auffaßt, den Diagrammpunkt (ξ, η) als Ecke B und den Fixpunkt $(1, 1)$ als Ecke C . Der Fußpunkt O der Höhe ist im Nullpunkt zu denken.

Dem in Abb. 3 dargestellten Wackeloktaeder liegt die Annahme $\tau = 1/2$ zugrunde, zu der laut (4.2) der Wert $\eta = 2/3$ gehört. Ein passendes Quintupel von Formparametern lautet: $u = 3$, $v = 6$, $x = 3$, $y = 4$, $z = 3$. Die Kantenlängen betragen gemäß

$$(1.3): a = 3\sqrt{2} = 4,24, b = \sqrt{34} = 5,83, c = 3\sqrt{5} = 6,71, d = \sqrt{10} = 3,16, e = \sqrt{13} = 3,61.$$

Literatur

- [1] Blaschke, W.: Wackelige Achtefläche. *Math. Z.* 6 (1920), 85—93.
 [2] Goldberg, M.: Unstable polyhedral structures. *Math. Magaz.* 51 (1978), 165—170.
 [3] Wunderlich, W.: Starre, kippende, wackelige und bewegliche Achtefläche. *Elem. Math.* 20 (1965), 25—32.
 [4] Wunderlich, W.: Starre, kippende, wackelige und bewegliche Gelenkvierecke im Raum. *Elem. Math.* 26 (1971), 73—83.
 [5] Wunderlich, W.: Snapping and shaky antiprisms. *Math. Magaz.* 52 (1979), 235—236.
 [6] Wunderlich, W.: Wackelkosaeder. *Geometriae dedicata* (im Druck).
 [7] Wunderlich, W.: Neue Wackelkosaeder. *Anz. Österr. Akad. Wiss.* 117 (1980), 28—33.
 [8] Wunderlich, W.: Kipp- und Wackeldodekaeder. *Praxis Math.* (im Druck).
 [9] Wunderlich, W.: Zur projektiven Invarianz von Wackelstrukturen. *Z. angew. Math. Mech.* (im Druck).