

Regelflächen mit oskulierendem Striktionsband

Von

Walter Wunderlich (Wien)

(Vorgelegt in der Sitzung der math.-nat. Klasse am 11. Oktober 1979)

1. Problemstellung

Zur Veranschaulichung einer *windschiefen Regelfläche* Φ des dreidimensionalen euklidischen Raumes mag man nach dem Vorgang von R. Sauer [9] ein differenzengeometrisches Modell heranziehen, indem man aus der stetigen Geradenschar von Φ eine diskrete Folge von Erzeugenden $\dots, e_{-1}, e_0, e_1, e_2, \dots$ herausgreift, die etwa durch geeignete gegeneinander fixierte Stäbe materialisiert werden können. Sucht man dann zu je zwei Nachbarerzeugenden e_i, e_{i+1} das Gemeinlot f_i auf, so erhält man ein zweites Stabmodell, das mit dem ersten in austauschbarer Beziehung steht, weil jede Gerade e_i das Gemeinlot von f_{i-1} und f_i ist. Bei zunehmender Verdichtung der Geradenfolgen konvergieren die erste gegen die Fläche Φ , die zweite gegen ihr sogenanntes *Striktionsband* Φ^* . Die Menge der Treffpunkte strebt dabei gegen die beiden Flächen gemeinsame *Striktions-* oder *Kehllinie* k , längs der einander die Flächen im allgemeinen berühren [7]. Die Ausartungsfälle der aufrechten Konoiden Φ (die aus Normalen einer Geraden k bestehen) sowie der abwickelbaren Flächen (Zylinder, Kegel und Tangentflächen einer Raumkurve k) sollen von vornherein außer Betracht bleiben.

Differentialgeometrisch ist der *Kehl-* oder *Zentralpunkt* Z einer

Erzeugenden e von Φ dadurch gekennzeichnet, daß die als *Zentralebene* bezeichnete Tangentialebene daselbst normal zur asymptotischen Ebene ist, also der zum Fernpunkt von e gehörigen Tangentialebene. Die e in Z rechtwinklig schneidende Flächentangente f heißt *Zentraltangente* von Φ ; sie ist Erzeugende des Striktionsbandes Φ^* , dessen Zentralebene mit jener von Φ zusammenfällt und welches seinerseits e zur Zentraltangente hat.

Die vorliegende Untersuchung befaßt sich nun mit solchen Regelflächen Φ , die von ihrem Striktionsband Φ^* längs der gemeinsamen,

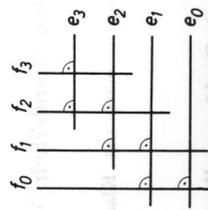


Abb. 1

von den Zentralpunkten Z erfüllten Kehlkurve k nicht bloß berührt, sondern sogar *oskuliert* werden. Ein differenzengeometrisches Modell derartiger Flächen kann, wie gelegentlich bereits in [12] ausgeführt wurde, folgendermaßen gewonnen werden: Ausgehend von einem rechtwinklig schneidenden Geradenpaar e_0, f_0 wähle man eine zu e_0 benachbarte Normale e_1 von f_0 , anschließend eine zu f_0 benachbarte und e_0 treffende Normale f_1 von e_1 , hierauf eine zu e_1 benachbarte Normale e_2 von f_1 , dann wieder eine zu f_1 benachbarte und e_1 treffende Normale f_2 von e_2 usw. (Abb. 1). Jede so bestimmte Gerade f_i ist dann Gemeinlot von e_i und e_{i+1} und trifft für $i \geq 1$ überdies e_{i-1} , während ebenso e_i für $i \geq 1$ jeweils Gemeinlot von f_i und f_{i-1} ist und außerdem f_{i+1} trifft. — Wählt man die Normale e_{i+1} von f_i stets so, daß sie f_{i-1} schneidet, dann gelangt man sogar zu einem Modell für ein *hyperoskulierendes* Flächenpaar, weil jeder Stab der einen Schar von vier aufeinanderfolgenden Stäben der anderen Schar getroffen wird (vgl. Abschnitt 8).

2. Konstruktive Behandlung

Die von den Zentralebenen eingehüllte *Zentraltrorse* Γ ist den Flächen Φ und Φ^* längs der Striktionslinie k berührend angeschrieben. Ihre Erzeugende t' in einem Punkt Z von k ist daher konjugiert zur Tangente t von k . Weil die zur Erzeugenden e von Φ normale Zentraltangente f im Falle eines oskulierenden Striktionsbandes Φ^* Schmiegtangente von Φ ist, liegen dann die Geraden t und t' spiegelbildlich bezüglich e (und f).

Werden bei der *Vererbung* der Zentraltrorse Γ die Erzeugenden e

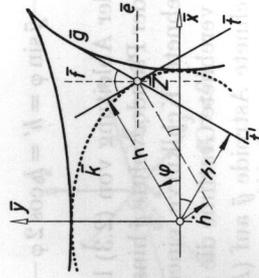


Abb. 2

von Φ mitgenommen, so gehen sie nach einem bekannten Satz von G. Darboux [2, 6, 7] in die Strahlen \bar{e} eines *Parallelenbüschels* über, ebenso natürlich auch die Erzeugenden f von Φ^* . Macht man nun die in orthogonalen Richtungen liegenden Fernscheitel der beiden Büschel zu den absoluten Punkten einer *pseudoeuklidischen Metrik* mit dem Bogen-elementquadrat $d\bar{s}^2 = d\bar{x} \cdot d\bar{y}$ [12], so sind die Geraden \bar{t} und \bar{t}' als „pseudonormal“ anzusprechen, und die Vererbene \bar{g} der Gratlinie g von Γ kann als die „Pseudoevolvente“ der vererbneten Kehlkurve \bar{k} angesehen werden (Abb. 2).

Nimmt man also in der Ebene ein derartiges Kurvenpaar \bar{g}, \bar{k} an, so gelangt man durch *beliebige Verbiegung* der Ebene längs der Tangenten von \bar{g} zu Regelflächen $\Phi(e)$ mit oskulierendem Striktionsband $\Phi^*(f)$, indem man die in \bar{k} angehefteten, zu den absoluten Punkten zielenden Linienelemente (\bar{Z}, \bar{e}) bzw. (\bar{Z}, \bar{f}) mitnimmt.

Die Kurve \bar{k} mag mit Hilfe ihrer Stützfunktion $h(\varphi)$ durch ihre Tangentenschar

$$\bar{x} \cos \varphi + \bar{y} \sin \varphi = h \tag{2.1}$$

angesetzt werden. Für den Kurvenpunkt Z findet man aus (2.1) und der Ableitung nach φ die Koordinaten

$$\bar{x} = h \cos \varphi - \dot{h} \sin \varphi, \quad \bar{y} = h \sin \varphi + \dot{h} \cos \varphi \tag{2.2}$$

Für die zugehörige Pseudonormale ergibt sich dann die Darstellung

$$\bar{x} \cos \varphi - \bar{y} \sin \varphi = h' = h \cos 2\varphi - \dot{h} \sin 2\varphi \tag{2.3}$$

Unter Heranziehung der Ableitung von (2.3) ließe sich leicht auch die Parameterdarstellung der Pseudoevolvente \bar{g} hinschreiben. — Wählt man beispielsweise als verebene Kehlkurve einen euklidischen Kreis \bar{k} ($h = \text{const}$), so tritt als verebene Gratlinie die durch die Stützfunktion $h' = h \cos 2\varphi$ gekennzeichnete Astroide \bar{g} auf (Abb. 2 ist affin zu dieser Annahme, während Abb. 5 eine diskretisierte Ausführung zeigt).

Eine Sonderstellung kommt dem Auftreten einer *konischen* oder *zylindrischen Zentraltorse* Γ zu. Hier ist \bar{g} auf einen eigentlichen bzw. uneigentlichen Punkt zusammengeschrumpft. Dies bedingt, daß als verebene Kehlkurve \bar{k} ein *Pseudokreis* (repräsentiert durch eine gleichseitige Hyperbel) bzw. eine *Gerade* erscheint. Durch Aufbiegen der Ebene längs der Strahlen des Büschels \bar{g} ergeben sich wieder einschlägige Regelflächen mit oskulierendem Striktionsband (s. Abschnitt 6 und 7).

3. Analytischer Ansatz

Gemäß dem von G. Sannia (1925) und E. Kruppa (1949) entwickelten Konzept zur Differentialgeometrie der Regelflächen [2, 6] wird mit jeder Erzeugenden e ein im Kehlpunkt Z angebrachtes orthonomiertes *Dreibein* verknüpft, bestehend aus dem Erzeugendenvektor e_1 , der Flächennormale e_2 und der Zentraltangente e_3 (Abb. 3). Für die Ableitungen nach der Bogenlänge s der Striktionslinie k

gelten dann Formeln von Frenetschem Muster:

$$e_1' = \alpha e_2, \quad e_2' = -\alpha e_1 + \tau e_3, \quad e_3' = -\tau e_2. \tag{3.1}$$

Die Bewegungsinvarianten α und τ werden als (natürliche) *Krümmung* bzw. *Torsion* der Fläche Φ bezeichnet, die in Parameterform durch

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(s, t) = \beta(s) + t \cdot e_1(s) \tag{3.2}$$

beschrieben wird, wobei $\beta = \beta(s)$ die Striktionslinie darstellt.

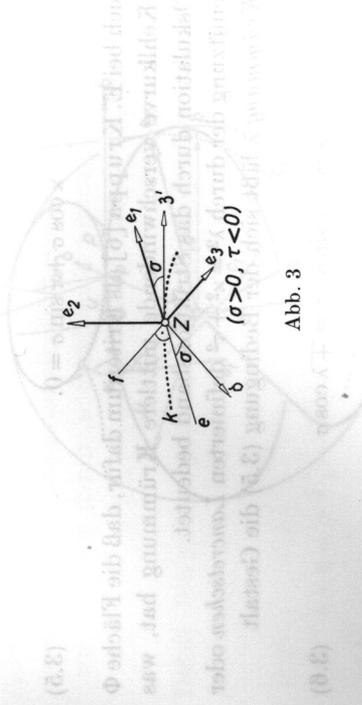


Abb. 3

Nach Einführung des *Striktionswinkels* $\sigma = \sphericalangle e_1 e_3$, unter welchem die Erzeugende von der Kehllinie abweicht, läßt sich deren Tangentenvektor zerlegen in

$$\beta' = e_1 \cos \sigma + e_3 \sin \sigma. \tag{3.3}$$

Durch Vorgabe der drei Funktionen $\alpha(s)$, $\tau(s)$ und $\sigma(s)$ ist die Fläche Φ bis auf Bewegungen, also der Gestalt nach festgelegt. Dies leuchtet unmittelbar ein, denn das Weiterrücken des Dreibeins wird durch (3.1) und (3.3) zwangsläufig gesteuert¹. Die üblichen Festsetzungen $\alpha \geq 0$ und $-\pi/2 < \sigma \leq \pi/2$ sind dabei ohne Belang, ja manchmal eher störend, etwa beim Studium von Regelflächen im Großen, insbesondere algebraischen (vgl. dazu die Beispiele in Abschnitt 5, 6, 7).

¹ Mit $\sigma \equiv 0$ läßt sich die Theorie der Raumkurven jener der Regelflächen unterordnen; die Formeln (3.1) sind dann die geläufigen Frenetschen Ableitungsgleichungen.

Die Erzeugende der von der Zentralebene $(x-3) e_2 = 0$ umhüllten Zentraltorse Γ hat die Richtung

$$d = e_2 \times e_2' = \tau e_1 + z e_3. \tag{3.4}$$

Mit Hilfe dieses „Darbouxschen Drehvektors“ lassen sich die Ableitungsgleichungen (3.1) zusammenfassen durch $e_i' = d \times e_i$. Im Falle einer Regelfläche Φ mit *oskulierendem Striktionsband* Φ^* liegen zufolge Abschnitt 2 die durch β' (3.3) und d (3.4) angezeigten Richtungen spiegelbildlich zu e_1 . Dies führt auf die für solche Flächen maßgebende *Bedingung*

$$x \cos \sigma + \tau \sin \sigma = 0. \tag{3.5}$$

Sie findet sich bei E. Kruppa [6] als Kriterium dafür, daß die Fläche Φ längs der Kehlcurve verschwindende mittlere Krümmung hat, was natürlich Oskulation durch das Striktionsband bedeutet.

Mit Benützung der durch $\lambda^2 = x^2 + \tau^2$ definierten *Lancretschen* oder „ganzen“ Krümmung λ läßt sich der Bedingung (3.5) die Gestalt

$$x = \pm \lambda \sin \sigma, \quad \tau = \mp \lambda \cos \sigma \tag{3.6}$$

geben. Hieraus ist zu ersehen, daß die Lancretische Krümmung den die Verwindung der Flächenstreifen längs der Erzeugenden messenden *Drall*

$$d = \sin \sigma / x = \pm 1/\lambda, \quad d^* = \cos \sigma / \tau = \mp 1/\lambda \tag{3.7}$$

von Φ bzw. Φ^* festlegt. Oskulierende Flächenpaare Φ, Φ^* sind mithin dadurch charakterisiert, daß längs entsprechender Erzeugenden entgegengesetzt gleiche Drallwerte auftreten: $d^* = -d$.

Für die *konische Krümmung* der Fläche Φ (und ihres Richtkegels) gilt zufolge (3.6): $\tau/x = -\cot \sigma$. Flächen mit gegen eine Bezugsebene gleich geneigten Erzeugenden besitzen konstante konische Krümmung und eine zylindrische Zentraltorse [6, 7]; diejenigen unter ihnen, die von ihrem Striktionsband oskuliert werden, sind demnach und im Einklang mit Abschnitt 2 durch $\sigma = \text{const}$ gekennzeichnet (vgl. Abschnitt 7).

4. Flächen mit vorgeschriebenem Richtkegel der Zentraltorse

Wird das begleitende Dreibein $(Z; e_1, e_2, e_3)$ einer Regelfläche Φ in den Ursprung O verlegt, so führt es dort eine *Bündelbewegung* aus, wenn der Zentralpunkt Z die Kehlcurve k durchläuft. Die Endpunkte der in O angebrachten Dreibeinvektoren beschreiben dabei auf der Einheitskugel der Reihe nach das sphärische Erzeugendenbild e_1 :

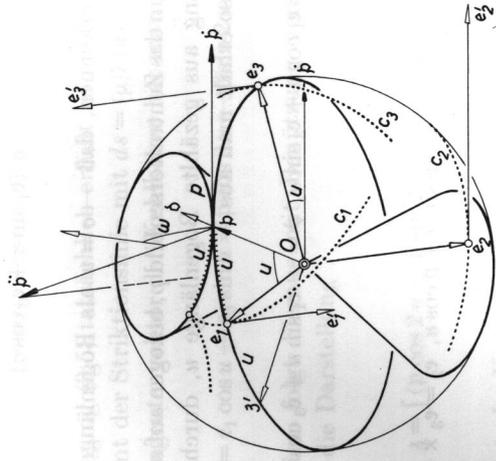


Abb. 4

$e_1 = e_1(s)$, das sphärische Zentralnormalenbild $e_2: e_2 = e_2(s)$ und das sphärische Zentraltangentenbild $e_3: e_3 = e_3(s)$. Bei dieser Bewegung um O fungiert der Darboux'sche Drehvektor d (3.4) als *Momentanachse*.

Zur Fixierung der Vorstellung sei im folgenden $-\pi/2 < \sigma < 0, x > 0$ und $\lambda > 0$ vorausgesetzt; in den Gleichungen (3.6) und (3.7) ist dann das untere Vorzeichen zu nehmen. Der Drehvektor wird demnach durch

$$p = d/\lambda = e_1 \cos \sigma - e_3 \sin \sigma \tag{4.1}$$

auf Einheitsbetrag normiert. Sein Endpunkt durchläuft das sphärische Zentraltorsenbild $p: p = p(s)$. Gemäß den Elementen der Bündelkline

matik kann die genannte Bewegung um O als *Rollung* der von \mathbf{e}_1 und \mathbf{e}_3 aufgespannten Ebene auf dem Richtkegel Op der Zentraltorse Γ aufgefaßt werden (Abb. 4). Die Bahnkurven c_1 und c_3 erscheinen dabei als sphärische Evoluten der Rastpolkurve p , die im Sinne der Kugelgeometrie polar zu c_2 ist. Die Ableitung von (4.1) lautet mit Beachtung von (3.5)

$$\mathbf{p}' = -\sigma'(\mathbf{e}_1 \sin \sigma + \mathbf{e}_3 \cos \sigma) \quad (4.2)$$

und läßt daher erkennen, daß $-\sigma = u$ als Bogenlänge auf p dienen kann.

Gibt man nun das Zentraltorsenbild p , bezogen auf seine von einem passenden Anfang aus gezählte Bogenlänge u , durch $\mathbf{p} = \mathbf{p}(u)$ mit $p^2 = \mathbf{p}^2 = 1$ vor, so erhält man aus

$$\mathbf{p} = \mathbf{e}_1 \cos u + \mathbf{e}_3 \sin u, \quad \mathbf{p}' = -\mathbf{e}_1 \sin u + \mathbf{e}_3 \cos u \quad (4.3)$$

die Vektoren

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{p} \cos u - \mathbf{p}' \sin u, \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{p} \sin u + \mathbf{p}' \cos u, \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{p}' \times \mathbf{p}. \quad (4.4)$$

Für die Ableitungen nach u gilt:

$$\dot{\mathbf{e}}_1 = -(\mathbf{p} + \mathbf{p}') \sin u, \quad \dot{\mathbf{e}}_2 = \mathbf{p}' \times \mathbf{p}, \quad \dot{\mathbf{e}}_3 = (\mathbf{p} + \mathbf{p}') \cos u. \quad (4.5)$$

Man überprüft unschwer, daß $\mathbf{p} + \mathbf{p}'$ die Richtung der Flächennormale \mathbf{e}_2 hat, wie es sein muß. Setzt man also

$$\mathbf{p} + \mathbf{p}' = -\mu \mathbf{e}_2, \quad (4.6)$$

so hat man

$$\dot{\mathbf{e}}_1 = \mu \sin u \cdot \mathbf{e}_2, \quad \dot{\mathbf{e}}_2 = -\mu \sin u \cdot \mathbf{e}_1 + \mu \cos u \cdot \mathbf{e}_3, \quad \dot{\mathbf{e}}_3 = -\mu \cos u \cdot \mathbf{e}_2. \quad (4.7)$$

Aus $\dot{\mathbf{e}}_2 = \mu \cdot \mathbf{p}'$ folgt, daß μ die *konische Krümmung der Zentraltorse* Γ (und

ihres Richtkegels Op) bedeutet. Sie läßt sich berechnen mit

$$\mu = (\mathbf{p}, \mathbf{p}', \mathbf{p}). \quad (4.8)$$

Ein Vergleich von (4.7) mit den Ableitungsgleichungen (3.1) lehrt ferner mit Beachtung von $\dot{\mathbf{e}}_i = s \mathbf{e}_i'$:

$$s x = \mu \sin u, \quad s \tau = \mu \cos u, \quad s \lambda = \mu, \quad (4.9)$$

so daß die Bedingung (3.5) tatsächlich erfüllt ist; überdies ergibt sich das Bogenelement der Striktionslinie mit $ds = (\mu/\lambda) du$.

Für den Tangentenvektor der Kehlkurve hat man zufolge (3.3):

$$\mathbf{s}' = \mathbf{e}_1 \cos u - \mathbf{e}_3 \sin u = \mathbf{p} \cos 2u - \mathbf{p}' \sin 2u. \quad (4.10)$$

Durch Integration folgt hieraus mit Benützung von (4.8) für die *Striktionslinie* k die Darstellung

$$\mathbf{s} = \int (\mathbf{p} \cos 2u - \mathbf{p}' \sin 2u) (\mathbf{p}, \mathbf{p}', \mathbf{p}) \frac{du}{\lambda}, \quad (4.11)$$

wobei die Lancrettsche Krümmung $\lambda(u)$ noch beliebig vorgeschrieben werden darf.

Speziell für $\lambda = \text{const}$ erhält man wegen (3.7) Regelflächenpaare Φ, Φ^* *konstanter Dralls* $d = -d^* = -1/\lambda$, für $\mu = \text{const}$ solche mit einer *Zentraltorse konstanter Böschung*, und schließlich für $\lambda/\mu = \gamma = \text{const}$ Flächen mit einer *Kehlkurve fester geodätischer Krümmung* γ ; letzteres folgt aus der Krümmungsformel $\gamma = -\sigma'$ [6].

5. Pillweinsche Flächen mit oskulierendem Striktionsband

Besondere Beachtung verdienen jene Flächen Φ , für welche sowohl $\lambda = \text{const}$ als auch $\mu = \text{const}$ ist, weil bei ihnen alle drei zuletzt genannten Eigenschaften vorhanden sind. Sie fallen unter eine jüngst von G. Pillwein [8] untersuchte Kategorie, welche die Regelflächen fester Lancrettscher Krümmung mit einer Böschungstorse als Zentral-

torse und einer Kehlcurve konstanter geodätischer Krümmung betraf. Flächen konstanten Dralls unter ihnen wurden wohl erwähnt, jedoch ohne Hinweis auf die bei ihnen bestehende Oskulation durch das Striktionsband.

Bezeichnet ω den halben Öffnungswinkel des Richtdrehkegels der Zentraltorse Γ (mit $0 < \omega < \pi/2$), so gelangt man zu den in Rede stehenden Flächen gemäß Abschnitt 4 durch den Ansatz

$$\mathbf{p} = \left(n \cos \frac{u}{n}, n \sin \frac{u}{n}, m \right) \quad \text{mit} \quad n = \sin \omega, m = \cos \omega \quad (5.1)$$

für den Kreis p . Die konische Krümmung von Γ hat den Wert $\mu = m/n = \cot \omega$. Für den Tangentenvektor $\mathbf{z}' = (z'_1, z'_2, z'_3)$ der Kehlcurve findet man über (4.10) die Darstellung

$$\begin{aligned} z'_1 &= \frac{1+n}{2} \cos \frac{1-2n}{n} u - \frac{1-n}{2} \cos \frac{1+2n}{n} u, \\ z'_2 &= \frac{1+n}{2} \sin \frac{1-2n}{n} u - \frac{1-n}{2} \sin \frac{1+2n}{n} u, \\ z'_3 &= m \cos 2u. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Wird die konstante Lancretsche Krümmung mit $\lambda = 1$ normiert, was im Hinblick auf die Maßstabfreiheit statthaft ist, so ergibt sich die Kehlcurve k über (4.10) für $n \neq 1/2$ mit:

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{m}{2} \left(\frac{1+n}{1-2n} \sin \frac{1-2n}{n} u - \frac{1-n}{1+2n} \sin \frac{1+2n}{n} u \right), \\ z_2 &= -\frac{m}{2} \left(\frac{1+n}{1-2n} \cos \frac{1-2n}{n} u - \frac{1-n}{1+2n} \cos \frac{1+2n}{n} u \right), \\ z_3 &= \frac{m^2}{2n} \sin 2u. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Man stellt fest — am besten mittels der komplexen Zusammenfassung $z_1 + iz_2$ [10] — daß diese Kurve im Grundriß (d. h. in der Normalprojek-

ktion auf die Grundebene $z_3 = 0$) als *Radlinie* der Familie $(1-2n):(1+2n)$ erscheint, und zwar als Epitrochoide für $n < 1/2$, als Hypotrochoide für $n > 1/2$. Sie verläuft überdies auf der *Drehquadrik*

$$z_1^2 + z_2^2 + \frac{4n^2 z_3^2}{4n^2 - 1} = \left(\frac{3mn}{4n^2 - 1} \right)^2; \quad (5.4)$$

diese ist ein einschaliges Hyperboloid für $n < 1/2$, ein Ellipsoid für $n > 1/2$.

Für rationale Werte $n \neq 1/2$ stellen sich *rational-algebraische Kehlcurven* ein. Ihre Ordnung beträgt, wenn man $n = \alpha/\beta$ als gekürzten Bruch natürlicher Zahlen anschreibt:

$$M = 2\alpha + \beta, \text{ falls } \beta \text{ gerade; } M = 4\alpha + 2\beta, \text{ falls } \beta \text{ ungerade.} \quad (5.5)$$

Bei der zurückgestellten Annahme $n = 1/2$ ist die Kehlcurve transzendent; sie verläuft auf einem z_1 -parallelen parabolischen Zylinder und erscheint im Grundriß als gestreckte Zykloloide.

Wird die durch (4.4) bestimmte Flächennormale $\mathbf{e}_2 = \dot{\mathbf{p}} \times \mathbf{p} = (m \cos(u/n), m \sin(u/n), -n)$ in die Gleichung $(\mathbf{p} - \mathbf{3}) \cdot \mathbf{e}_2 = 0$ der Zentralebene eingetragen, so ergibt dies ausgeführt:

$$y_1 \cos \frac{u}{n} + y_2 \sin \frac{u}{n} - \frac{y_3}{m} = a \sin 2u \quad \text{mit} \quad a = \frac{3m}{2(4n^2 - 1)}. \quad (5.6)$$

Hieraus ist abzulesen, daß die von den Zentralebenen umhüllte *Zentraltorse* Γ eine der von W. Kautny [4] untersuchten *Umschwingtorse* ist: Sie wird ja von einer Ebene erzeugt, welche gleichförmig um die y_3 -Achse rotiert und gleichzeitig eine harmonische Schwingung mit der Frequenz $2n$ und der Amplitude a längs dieser Achse vollführt. Die Gratlinie g , dargestellt durch

$$\begin{aligned} y_1 + iy_2 &= ina e^{iu/n} [(1-2n) e^{2iu} + (1+2n) e^{-2iu}], \\ y_3 &= \frac{ma}{n} (4n^2 - 1) \sin 2u, \end{aligned} \quad (5.7)$$

ist demnach Böschungslinie auf einer Drehquadratik und erscheint im Grundriß als Epi- oder Hypozykloide, je nachdem ob $n < 1/2$ oder $n > 1/2$; im Übergangsfall $n = 1/2$ ist g Böschungslinie auf einem parabolischen Zylinder und bildet sich im Grundriß auf eine gemeine Zyklode ab. — Im algebraischen Fall ($n = \alpha/\beta \neq 1/2$) hat die Torse Γ die Klasse $\max(2\alpha, \beta)$, falls β gerade ist; andernfalls ist sie doppelt so groß. Die Gratlinie g hat die Ordnung M (5.5).

Bei der Verebnung der Zentraltorse geht die Kehlcurve k wegen ihrer konstanten geodätischen Krümmung $\gamma = \lambda/\mu = n/m$ in einen Kreis \bar{k} mit dem Radius $r = 1/\gamma = m/n$ über. Hier handelt es sich also gerade um das in Abschnitt 2 erwähnte Beispiel, bei welchem festgestellt wurde, daß als verebnete Gratlinie \bar{g} eine *Astroide* (vierspitziige Hypozykloide) auftritt, die \bar{k} zum Scheitelkreis hat. — Damit bietet sich eine einfache Möglichkeit für die Herstellung eines *Modells*: Man schneide aus steifem Karton einen Sektor aus, der von einem in Spitzen endenden Astroidenbogen \bar{h} und dessen Evolute \bar{g} berandet ist, und markiere auf ihm den die Spitzen verbindenden Kreisquadranten \bar{k} . Wird der Karton dann längs der vorgeritzten Tangenten von \bar{g} verbogen, so entsteht eine Zentraltorse Γ samt der auf ihr verlaufenden Kehlcurve k einer Regelfläche mit oskulierendem Striktionsband. Das Flächenpaar selbst kann durch dünne Holzstäbe oder Strohhalm sichtbar gemacht werden, die in einzelnen Punkten von k mit einem Tropfen Klebstoff zu befestigen sind. Wird die Verbiegung derart vorgenommen, daß die Randcurve h eben bleibt (etwa durch Aufsetzen auf eine Tischplatte), dann gelangt man zu einer Umschwungstorse Γ und damit zu den hier behandelten Pillweinschen Flächen. — In geringfügiger Abwandlung nach differenzengeometrischem Vorbild mag man folgendermaßen vorgehen (Abb. 5): Man teile den Kreisquadranten \bar{k} etwa in zwölf gleiche Teile und ziehe durch die Teilpunkte Z_i ($i = 0, 1, \dots, 12$) Parallelen \bar{e}_i bzw. \bar{f}_i in Richtung der Endtangente. Die durch zwei Nachbarpunkte Z_i und Z_{i+1} laufenden Geradenpaare bilden ein Rechteck, dessen zweite Diagonale als Kante eines Ersatzpolyeders für die Torse Γ dienen soll; auch diese Diagonalen sind Tangenten einer Astroide, die sich nur wenig von \bar{g} unterscheidet. Zum Aufkleben der Stäbe e_i und f_i stehen jetzt die ganzen Diagonalenstrecken der genannten Rechtecke zur Verfügung. Da jeder Stab der einen Schar von

drei aufeinanderfolgenden Stäben der anderen Schar getroffen wird, liegt ein (deformierbares) Modell von der in Abschnitt 1 geschilderten Art vor. Die Facetten des Torsenpolyeders mögen wie in Abb. 5 als schmale gleichschenklige Dreiecke ausgebildet werden, doch genügen auch die gestrichelt angedeuteten Teilvierecke, auf welche die Stäbe der beiden Scharen zu verschiedenen Seiten angebracht werden können.

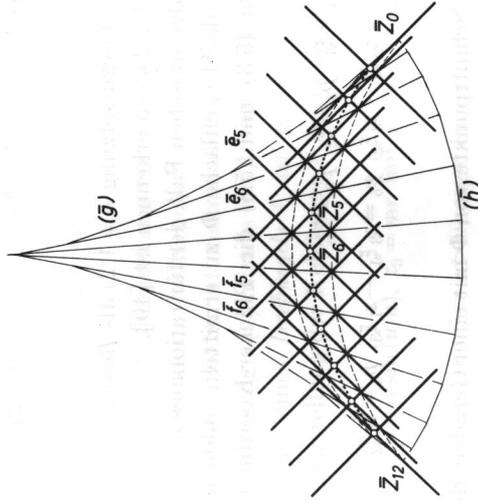


Abb. 5

Abschließend ist noch die genauere Besprechung der vorliegenden *Regelflächen* Φ nachzutragen. Mit Benützung des durch (4.4) erklärten Erzeugendenvektors $e_1 = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ mit

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{1+n}{2} \cos \frac{1-n}{n} u - \frac{1-n}{2} \cos \frac{1+n}{n} u, \\ \xi_2 &= \frac{1+n}{2} \sin \frac{1-n}{n} u - \frac{1-n}{2} \sin \frac{1+n}{n} u, \\ \xi_3 &= m \cos u \end{aligned} \quad (5.8)$$

sowie der Koordinaten z_i des Kehlpunktes Z (5.3) ließe sich gemäß (3.2) eine Parameterdarstellung $x_i = z_i + t \xi_i$ ($i = 1, 2, 3$) sofort hinschreiben.

Hier soll aber lediglich der *Grundschnitt* $x_3 = 0$ der Fläche Φ bestimmt werden, der sich — nach Abspaltung der zu $\cos u = 0$ gehörenden Erzeugenden — für $t = -z_3/\xi_3 = -(m/n)\sin u$ ergibt. Man gelangt so in komplexer Darstellung zu der Kurve

$$x_1 + ix_2 = \frac{im}{4n} \left(2 \frac{e^{iu/n}}{1-2n} - \frac{1+n}{1-2n} e^{(1-2m)iu/n} - \frac{1-n}{1+2n} e^{(1+2m)iu/n} \right), \quad (5.9)$$

die (unter der Voraussetzung $n \neq 1/2$) als *Radlinie 3. Stufe* der Familie $(1-2n): 1:(1+2n)$ zu erkennen ist [10].

Um im algebraischen Fall, der für rationales $n = \alpha/\beta \neq 1/2$ eintritt, den *Grad* N der Regelfläche Φ zu ermitteln, bilde man unter Verwendung von (5.3) und (5.8) die Plücker-Koordinaten der Erzeugenden:

$$\begin{aligned} p_1 &= \xi_1, & p_2 &= \xi_2, & p_3 &= \xi_3, & (5.10) \\ p_4 &= z_2 \xi_3 - z_3 \xi_2, & p_5 &= z_3 \xi_1 - z_1 \xi_3, & p_6 &= z_1 \xi_2 - z_2 \xi_1. \end{aligned}$$

Nun sind die Schnittpunkte von Φ mit einer Geraden allgemeiner Lage abzuzählen, was auf die Auflösung einer Gleichung der Bauart $\sum a_i p_i = 0$ nach u hinausläuft. Mittels der Substitution $e^{iu/n} = v$ ergibt sich eine algebraische Gleichung in v , deren Grad festzustellen ist; man findet so:

$$N = 3\alpha + \beta, \text{ falls } \beta \text{ gerade; } N = 6\alpha + 2\beta, \text{ falls } \beta \text{ ungerade.} \quad (5.11)$$

Der niedrigste Wert stellt sich für $n = 1/4$ mit $N = 7$ ein. Diese Fläche, die eine Kehlcurve 6. Ordnung, einen Grundschnitt 6. Ordnung und eine Zentralse 4. Klasse besitzt, weist eine Fernkurve 5. Ordnung auf und ist zu ihrem Striktionsband kongruent.

6. Flächen mit konischer Zentralse

Wird die Spitze des *Zentralkegels* Γ als Koordinatenursprung O verwendet, dann fällt Γ mit dem Rechteck Op zusammen und kann

wie in Abschnitt 4 durch das auf die Bogenlänge $u = -\sigma$ bezogene sphärische Bild $p: p = p(u)$ festgelegt werden. Für die Striktionslinie k gilt nun eine Darstellung $\mathfrak{z} = r p$, und die Entfernung $OZ = r(u)$ des Kehlpoints Z genügt, wie durch Vergleich der proportionalen Tangentenvektoren $\mathfrak{z} = \dot{r} p + r \dot{p}$ und $\mathfrak{z}'(4.10)$ zu erkennen ist, der Differentialgleichung

$$\dot{r}/r = -\cot 2u. \quad (6.1)$$

Hieraus folgt

$$r^2 \sin 2u = a^2 = \text{const.} \quad (6.2)$$

im Einklang mit der Schlußbemerkung von Abschnitt 2, derzufolge die Kehlcurve k bei Abwicklung des Kegels Γ in eine *gleichseitige Hyperbel* $\bar{k}(2\bar{x}\bar{y} = a^2)$ übergeht. Die Striktionslinie k selbst ist wieder nach Wahl der Lancret-Krümmung $\lambda(u)$ mittels des Integrals (4.11) zu erhalten.

Bei Annahme eines *Drehkegels* Γ ist p wieder durch (5.1) anzusetzen. Die Darstellung der Kehlcurve k lautet dann zufolge $\mathfrak{z} = r p$:

$$z_1 = nr \cos(u/n), \quad z_2 = nr \sin(u/n), \quad z_3 = mr \text{ mit } r = a/\sqrt{\sin 2u}. \quad (6.3)$$

Für rationales $n = \alpha/\beta$ (mit $\beta > \alpha > 0$) ergeben sich wieder algebraische (diesmal jedoch nicht rationale) Kehlkurven; ihre Ordnung beträgt $M = 2\beta$, falls β gerade ist, sonst $M = 4\beta$.

Mit Benützung des Erzeugendenvektors $e_1 = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, der wieder durch (5.8) bestimmt ist, gelangt man über (3.2) zu einer Parameterdarstellung $x_i = z_i + t \xi_i$ ($i = 1, 2, 3$) der Regelfläche Φ . Nach Aufstellung der Plücker-Koordinaten (5.10) ihrer Erzeugenden, wobei jetzt die z_i aus (6.3) zu entnehmen sind, findet man im algebraischen Fall den Flächengrad mit $N = 3\alpha + 2\beta$, falls β gerade ist, sonst den doppelten Wert. — Als Grundschnitt $x_3 = 0$ von Φ ergibt sich über $t = -z_3/\xi_3 = -r/\cos u$ nach Abspaltung der zu $\sin u = 0$ gehörenden Erzeugenden die Kurve

$$x_1 = -R \sin(u/n), \quad x_2 = -R \cos(u/n) \quad \text{mit } 2R^2 = a^2 \text{tg } u. \quad (6.4)$$

Im algebraischen Fall hat sie die Ordnung $N' = \alpha + 2\beta$, falls β gerade ist, sonst die doppelt so hohe.

Das einfachste Beispiel bietet die Annahme $n = 1/2$: Φ ist hier eine Regelfläche 7. Grades mit einem Grundschnitt 5. Ordnung und einer Kehlcurve 4. Ordnung (I. Art), die aus dem Drehkegel $z_1^2 + z_2^2 = z_3^2/3$ durch den hyperbolischen Zylinder $4z_2z_3 = a^2\sqrt{3}$ ausgeschnitten wird.

Die Frage, welche Gestalt der Zentralkegel Γ haben muß, damit die Regelfläche Φ konstante Lancrettsche Krümmung λ und damit *konstanten Drall* aufweist, ist nicht elementar zu beantworten. Zufolge (4.9) besteht zwischen λ und der konischen Krümmung μ des Kegels Γ die Beziehung $\mu/\lambda = s = r/\sin 2u$; es gilt also

$$\mu = \lambda a / \sqrt{\sin^3 2u}. \quad (6.5)$$

Diese Relation kann bei vorgeschriebenem $\lambda = \text{const}$ als „natürliche Gleichung“ des sphärischen Bildes p von Γ aufgefaßt werden, da μ die geodätische Krümmung von p bedeutet, die hier in ihrer Abhängigkeit von der Bogenlänge u zur Verfügung steht und damit die Kurve p bis auf Bewegungen festlegt.

7. Flächen mit zylindrischer Zentraltorsor

Die Annahme eines *Zentralzylinders* Γ bedeutet Unveränderlichkeit des Drehvektors p , der mit $p = (0, 0, 1)$ festgesetzt werden mag. Sie zieht zufolge (4.2) *Konstanz des Striktionswinkels* σ nach sich, der wieder auf das Intervall $-\pi/2 < \sigma < 0$ eingeschränkt sei. Mit Hilfe des Drehwinkels φ können die Dreibeinvektoren dann angesetzt werden durch

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= (a \cos \varphi, a \sin \varphi, b), & \mathbf{e}_2 &= (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0), \\ \mathbf{e}_3 &= (-b \sin \varphi, -b \cos \varphi, a) & \text{mit } a &= -\sin \sigma, b = \cos \sigma. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Die Regelfläche Φ besitzt als Richtkegel einen Drehkegel mit dem halben Öffnungswinkel $|\sigma|$, also die konstante konische Krümmung b/a .

Die *Striktionslinie* k hat gemäß (3.3) den normierten Tangentenvektor

$$\mathbf{s}' = b \mathbf{e}_1 - a \mathbf{e}_3 = (2ab \cos \varphi, 2ab \sin \varphi, b^2 - a^2). \quad (7.2)$$

Sie ist also — in Einklang mit der Schlußbemerkung in Abschnitt 2,

wonach k bei Verebnung des Zylinders Γ in eine Gerade \bar{k} übergeht — im allgemeinen eine *Böschungslinie* mit dem Steigungswinkel $(\pi/2) + 2\sigma$, die sich jedoch für $a = b$ ($\sigma = -\pi/4$) zu einer ebenen Kurve abflacht. Einschlägige Modelle lassen sich nach dem Vorbild in Abb. 5 leicht anfertigen.

Wird die (zu \mathbf{e}_2 normale) Zentralebene durch

$$z_1 \sin \varphi - z_2 \cos \varphi = q \quad \text{mit } q = q(\varphi) \quad (7.3)$$

festgelegt, so hat der Zentralzylinder die in der Grundebene $z_3 = 0$ verlaufende und durch ihre Stützfunktion $q(\varphi)$ erfaßte *Basiscurve*

$$z_1 = q \sin \varphi + \dot{q} \cos \varphi, \quad z_2 = -q \cos \varphi + \dot{q} \sin \varphi. \quad (7.4)$$

Dieselbe stellt bereits den Grundriß der Kehlcurve k dar, sodaß man durch Vergleich von $z_1 = (q + \dot{q}) \cos \varphi$ mit der entsprechenden Komponente $z_1' = \dot{z}_1/s$ aus (7.2) für das Bogenelement von k den Ausdruck

$$ds = \frac{q + \dot{q}}{2ab} d\varphi \quad (7.5)$$

gewinnt. Damit errechnet sich die noch fehlende dritte Koordinate des Kehlpunktes zu:

$$z_3 = \frac{b^2 - a^2}{2ab} (\dot{q} + \int q d\varphi). \quad (7.6)$$

Ferner findet man über $\dot{\mathbf{e}}_i = s' \mathbf{e}_i'$ für die Krümmung und die Torsion der Fläche Φ die Werte

$$\kappa = a\lambda, \quad \tau = b\lambda \quad \text{mit } \lambda = 1/s = 2ab/(q + \dot{q}). \quad (7.7)$$

Nimmt man beispielsweise für Γ einen *Drehzylinder* an, so ergibt sich mit $q = \text{const}$ für die Kehlcurve k im allgemeinen eine *Schraublinie*

$$z_1 = q \sin \varphi, \quad z_2 = -q \cos \varphi, \quad z_3 = \frac{b^2 - a^2}{2ab} q \varphi, \quad (7.8)$$

die sich bloß im Falle $a = b$ auf einen Kreis reduziert. Abgesehen von diesem Sonderfall, in welchem sich die Regelfläche Φ und ihr Striktionsband Φ^* in einem einschaligen Drehhyperboloid mit rechtem Öffnungswinkel vereinigen, sind Φ und Φ^* windschiefe *Regelschraubflächen* — übrigens die einzigen hier einschlägigen Flächen mit *konstantem Drall* ($d = -1/\lambda = -q/2ab = q/\sin 2\sigma$). Aus Symmetriegründen besteht zwischen Φ und Φ^* sogar *Hyperoskulation* (vgl. Abschnitt 8).

Interessanter ist die Annahme eines Zentralzylinders Γ mit *Zykloidenbasis*, die sich für

$$q = c \cdot \sin n\varphi \quad \text{mit } 0 < n \neq 1 \tag{7.9}$$

einstellt. Hier wird die Striktionslinie k gemäß (7.4) und (7.6) in komplexer Zusammenfassung durch

$$z_1 + iz_2 = \frac{c}{2} [(1+n)e^{(1-n)i\varphi} - (1-n)e^{(1+n)i\varphi}], \tag{7.10}$$

$$z_3 = \frac{b^2 - a^2}{2ab} \cdot \frac{n^2 - 1}{n} c \cos n\varphi$$

dargestellt. Abgesehen wieder von dem Sonderfall $a = b$, in welchem sie sich auf eine der Grundebe $z_3 = 0$ angehörende Epi- oder Hypozykloide reduziert (je nachdem ob $n < 1$ oder $n > 1$), verläuft sie als Böschungslinie auf einer Drehquadratik

$$z_1^2 + z_2^2 + \frac{4n^2 a^2 b^2 z_3^2}{(1-n^2)(a^2 - b^2)^2} = c^2. \tag{7.11}$$

Die zugehörigen Regelflächen Φ , darstellbar durch

$$x_1 + ix_2 = z_1 + iz_2 + at e^{i\varphi}, \quad x_3 = z_3 + bt, \tag{7.12}$$

fallen unter eine von G. Pillwein in [8] erwähnte Grenzform seiner Flächen, welche auch schon in einer Arbeit von W. Jank [3] auftauchte, ohne jedoch im allgemeinen durch ein oskulierendes Strik-

tionsband ausgezeichnet zu sein. Der sich für $t = -z_3/b$ ergebende Grundschnitt $x_3 = 0$ wird beschrieben durch

$$x_1 + ix_2 = \frac{c}{4nb^2} [A e^{(1-n)i\varphi} + B e^{(1+n)i\varphi}] \quad \text{mit} \tag{7.13}$$

$$A = (n+1)(n-a^2+b^2), \quad B = (n-1)(n+a^2-b^2)$$

und erweist sich damit als Epi- oder Hypotrochoide, je nachdem ob $n < 1$ oder $n > 1$. Voraussetzung ist dabei allerdings, daß keiner der beiden Koeffizienten A oder B verschwindet, was mit $n = \pm \cos 2\sigma$ durchaus eintreten kann. In einem solchen Fall reduziert sich der Grundschnitt auf einen Kreis. — Die übrigen Schichtenlinien $x_3 = \text{const}$ von Φ sind im allgemeinen Fall $AB \neq 0$ Radlinien 3. Stufe der Familie $(1-n):1:(1+n)$, weil in (7.13) noch ein drittes Glied $(ax_3/b)e^{i\varphi}$ hinzutritt. In den Sonderfällen $A = 0$ bzw. $B = 0$ sind die Schichtenlinien bloß Radlinien 2. Stufe der Familien $(1+n):1$ bzw. $(1-n):1$.

Im *algebraischen Fall*, der bei rationalem $n = \alpha/\beta$ vorliegt, findet man durch Beurteilung der Plücker-Koordinaten

$$p_1 = 4nab \cos \varphi, \quad p_4 = c[A \sin(1-n)\varphi + B \sin(1+n)\varphi],$$

$$p_2 = 4nab \sin \varphi, \quad p_5 = -c[A \cos(1-n)\varphi + B \cos(1+n)\varphi], \tag{7.14}$$

$$p_3 = 4nb^2, \quad p_6 = 4nabc \sin n\varphi$$

als Ordnung der Fläche Φ unter der Voraussetzung $AB \neq 0$ den Wert $N = 2(\alpha + \beta)$, der auch noch für $A = 0$ gilt, für $B = 0$ hingegen durch $N = 2 \max(\alpha, \beta)$ zu ersetzen ist.

Die vorhin erwähnten *Sonderfälle* $a^2 = b^2 = \pm n$ sind in mancher Hinsicht bemerkenswert. Zunächst einmal erweist sich die Quadratik (7.11) als Kugel, d. h. es tritt eine *sphärische Kehlkurve* auf. Vor allem wäre aber hervorzuheben, daß die Regelfläche Φ eine einfache *kinematische Erzeugung* gestattet, nämlich durch eine Planetenbewegung mit der Übersetzung $(1 \pm n):1$. Hierbei rollt auf einem festen Drehzylinder ein anderer unter Mitnahme der Flächenerzeugenden ab; das Radienverhältnis ist durch $\varepsilon = R/r = (2a^2 - 1)/2a^2 = (1 - \cot^2 \sigma)/2$ bestimmt, wobei $\varepsilon < 0$ bedeutet, daß die beiden Zylinder durch die

Tangentialebene längs der Wälzerzeugenden getrennt werden, für $\varepsilon > 0$ hingegen nicht. Unter dieser Übereinkunft gilt demnach: *Rollt ein Drehzylinder vom Radius r auf einem festen Drehzylinder vom Radius $R = \varepsilon r$ ab, so überstreicht eine mitgenommene Gerade, welche seine Achse unter dem Winkel $\sigma = \operatorname{arccot} \sqrt{1 - 2\varepsilon}$ trifft, eine Regelfläche mit oskulierendem Striktionsband.* — Zur Illustration seien die folgenden Beispiele angeführt:

$\varepsilon = -1$ ($|\sigma| = \pi/6$, $n = 1/2$, $B = 0$). Hier rollt ein Drehzylinder auf einem kongruenten und erzeugt eine Regelfläche Φ 4. Grades (V. Art nach Sturm, [7]) mit Pascalschnecken als Schichtenlinien und einer Doppelgeraden. Dies ist vorläufig das (nicht ausgeartete) Beispiel niedrigster Ordnung. Ob es kubische Regelflächen mit oskulierendem Striktionsband gibt, ist nicht bekannt.

$\varepsilon = 1/3$ ($|\sigma| = \pi/3$, $n = 1/2$, $A = 0$). Hier rollt um einen Drehzylinder ein dreimal so dicker umschließend ab und erzeugt eine Regelfläche 6. Grades. Es handelt sich dabei um jene, die in [11] als Hauptnormalenfläche einer Raumkurve 6. Ordnung mit fester ganzer Krümmung aufgetreten ist. Ohne Beweis sei mitgeteilt, daß eine Regelfläche mit oskulierendem Striktionsband und zylindrischer Zentraltorse genau dann *Hauptnormalenfläche* einer Raumkurve l ist, wenn der Zylinder Zykloldenbasis hat und $n = b$ ist; nach einem Satz von A. Mannheim hat die Kurve l dann stets konstante ganze Krümmung [12].

8. Regelflächen mit hyperoskulierendem Striktionsband

Das im vorigen Abschnitt angeführte Beispiel der Regelschraubflächen, die von ihrem Striktionsband hyperoskuliert werden, legt die Frage nach einer Kennzeichnung der allgemeinsten Flächen Φ mit dieser Eigenschaft nahe. Die das Striktionsband Φ^* bildenden Zentraltangenten müssen dann Φ (mindestens) vierpunktig berühren, sind also „Wendehaupttangenten“ [7]. Die Striktionslinie k wird daher gleichzeitig eine *Fleknodalcurve* von Φ (und Φ^*) sein.

Zur Ermittlung der Fleknodalpunkte der Regelfläche Φ (3.2) wird zunächst die längs einer Erzeugenden e oskulierende *Schmiegequadrik* Ψ benötigt, die von den Schmiegtangenten der Punkte von e erfüllt wird.

Eine Flächenkurve $t = t(s)$ ist krumme Schmieglinie von Φ , wenn ihre Schmiegeebenen die Fläche berühren, d. h. wenn die Ableitungsvektoren \mathbf{x}' und \mathbf{x}'' mit dem Erzeugendenvektor \mathbf{e}_1 komplanar sind. Die entsprechende Bedingung ($\mathbf{e}_1, \mathbf{x}', \mathbf{x}'' = 0$) führt mit Benützung der Ableitungsgleichungen (3.1) über

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= \zeta' + t' \mathbf{e}_1 + t \mathbf{e}_1' = (t' + \cos \sigma) \mathbf{e}_1 + x t \mathbf{e}_2 + \sin \sigma \cdot \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{x}'' &= (t'' - \sigma' \sin \sigma - x^2 t) \mathbf{e}_1 + (2x t' + x' t + x \cos \sigma - \tau \sin \sigma) \mathbf{e}_2 + \\ &\quad + (x \tau t + \sigma' \cos \sigma) \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (8.1)$$

unter Beachtung von (3.5) auf

$$t' + \cos \sigma = (x^2 \tau t + x \sigma' \cos \sigma - x' \sin \sigma) t / 2x \sin \sigma, \quad (8.2)$$

und damit auf den Schmiegtangentenvektor

$$\mathbf{x}'' = \frac{x^2 \tau t + x \sigma' \cos \sigma - x' \sin \sigma}{2x \sin \sigma} t \mathbf{e}_1 + x t \mathbf{e}_2 + \sin \sigma \cdot \mathbf{e}_3. \quad (8.3)$$

Für die von den Schmiegtangenten längs einer Erzeugenden e ($s = \text{const}$) gebildete Regelfläche Ψ : $\eta = \zeta + t \mathbf{e}_1 + u \mathbf{x}'$ hat man also in dem lokalen, auf das Dreibein $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ bezogenen Koordinatensystem ($Z; \eta_1, \eta_2, \eta_3$) die Darstellung:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= t + (x^2 \tau t + x \sigma' \cos \sigma - x' \sin \sigma) t u / 2x \sin \sigma, \\ \eta_2 &= x t u, \\ \eta_3 &= u \sin \sigma. \end{aligned} \quad (8.4)$$

Durch Elimination der Parameter t und u gewinnt man dann die nachstehende Gleichung der Schmiegequadrik Ψ :

$$F(\eta_1, \eta_2, \eta_3) \equiv 2x \eta_1 \eta_3 - 2\eta_2 \sin \sigma + x \eta_2^2 \cot \sigma + \left(\frac{x'}{x} - \sigma' \cot \sigma \right) \eta_2 \eta_3 = 0 \quad (8.5)$$

Zu den beiden *Fleknodalpunkten* auf der Erzeugenden $e(s)$ gelangt man nun, wenn man die zu e gehörige Schmiegequadrak Ψ (8.5) mit einer Nachbarerzeugenden $\bar{e}(s+h)$ von Φ schneidet und die Grenzlage der Schnittpunkte für $h \rightarrow 0$ aufsucht. Zu diesem Zweck ist die Erzeugende $\bar{e}: \bar{x} = \bar{\beta}(s+h) + t\epsilon_1(s+h)$ oder $\eta = \bar{x} - \bar{\beta}(s) = \Delta\bar{\beta} + t(\epsilon_1 + \Delta\epsilon_1)$ nach gehöriger Potenzreihenentwicklung im lokalen Koordinatensystem in der Form $\eta_i = a_i + \alpha_i t$ ($i = 1, 2, 3$) darzustellen. Eintragung dieser Ausdrücke in (8.5) führt dann auf eine quadratische Gleichung in t , von der gefordert wird, daß eine Lösung mit $h \rightarrow 0$ gegen Null streben soll. Dies läuft auf die Bedingung hinaus, daß $F(a_1, a_2, a_3) = 0$ bis zu den Gliedern dritter Ordnung in h erfüllt sein muß. Wie man sieht, benötigt man also bloß die a_i , d. h. die Potenzreihenentwicklung von

$$\Delta\bar{\beta} = h\bar{\beta}' + \frac{h^2}{2}\bar{\beta}'' + \frac{h^3}{6}\bar{\beta}''' + \dots \quad (8.6)$$

Gestützt auf die Zerlegung (3.3) von $\bar{\beta}' = \epsilon_1 \cos \sigma + \epsilon_3 \sin \sigma$ erhält man mit Hilfe der Ableitungsgleichungen (3.1) und unter Beachtung von (3.5) die Darstellungen

$$\begin{aligned} \bar{\beta}'' &= -\sigma' \sin \sigma \cdot \epsilon_1 + 2x \cos \sigma \cdot \epsilon_2 + \sigma' \cos \sigma \cdot \epsilon_3, \\ \bar{\beta}''' &= -(2x^2 \cos \sigma + \sigma'' \sin \sigma + \sigma'^2 \cos \sigma) \epsilon_1 + \\ &\quad + (2x' \cos \sigma - 3x \sigma' \sin \sigma - \tau \sigma' \cos \sigma) \epsilon_2 + \\ &\quad + (2x \tau \cos \sigma + \sigma'' \cos \sigma - \sigma'^2 \sin \sigma) \epsilon_3. \end{aligned} \quad (8.7)$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} a_1 &= h \cos \sigma - \frac{h^2}{2} \sigma' \sin \sigma - \dots, \\ a_2 &= h^2 x \cos \sigma + \frac{h^3}{6} (2x' \cos \sigma - 3x \sigma' \sin \sigma - \tau \sigma' \cos \sigma) + \dots, \\ a_3 &= h \sin \sigma + \frac{h^2}{2} \sigma' \cos \sigma + \dots \end{aligned} \quad (8.8)$$

Man stellt nun fest, daß damit die Bedingung $F(a_1, a_2, a_3) = 0$ bis zu den Gliedern zweiter Ordnung bereits erfüllt ist, was wegen der Oskulation

von Φ und Ψ zu erwarten war. Der geforderte Fortfall der Glieder dritter Ordnung verlangt dann — nach Kürzung durch die Faktoren $\sin \sigma$ und $\cos \sigma$, deren dauerndes Verschwinden mit den Torsen bzw. Binormalenflächen keine brauchbaren Lösungen liefern würde — die Bedingung

$$x' + \sigma' \tau = 0. \quad (8.9)$$

Mit Rücksicht auf $\tau = -x \cot \sigma$ bedeutet dies $x'/x = \sigma' \cot \sigma$, was nach Integration auf

$$x/\sin \sigma = 1/d = \text{const} \quad (8.10)$$

führt. Damit ist unter Bezug auf (3.7) erkannt: *Unter den Regelflächen mit oskulierendem Striktionsband sind jene mit hyperoskulierendem Striktionsband durch konstanten Drall, also auch feste Lancrettsche Krümmung gekennzeichnet.*

Dies bestätigt nicht bloß die einschlägige Eigenschaft der Regelschraubflächen aus Abschnitt 7, sondern lehrt nachträglich, daß auch die in Abschnitt 5 behandelten (speziellen) Pillweinschen Flächen ein hyperoskulierendes Striktionsband besitzen. Damit ist gleichzeitig eine bemerkenswerte Kategorie der im Anschluß an J. Krames [7, 5] speziell von H. Brauner [1] ausgiebig untersuchten konstant gedrahten Regelflächen gewonnen; die repräsentativen Beispiele hierzu dürften auch sonst willkommen sein.

Literatur

- [1] Brauner, H.: Über Strahlflächen von konstantem Drall, Monatsh. Math. **63** (1959), 101—111. — Eine einheitliche Erzeugung konstant gedrahter Strahlflächen, Monatsh. Math. **65** (1961), 301—314. — Neuere Untersuchungen über windschiefe Flächen, J.-ber. Dtsch. Math. Ver. **70** (1967), 61—85.
 [2] Hoschek, J.: Liniengeometrie (Hochschulskr. Bd. 733), Mannheim, 1971.
 [3] Jank, W.: Flächen mit kongruenten Fallparabeln, Sitzgsber. Österr. Akad. Wiss. **181** (1973), 49—70.
 [4] Kautny, W.: Über die durch harmonischen Umschwung erzeugbaren Strahlflächen, Monatsh. Math. **63** (1959), 169—188.
 [5] Krames, J.: Über windschiefe Flächen mit konischer Zentraltorse, Monatsh. Math. **65** (1961), 337—350. — Über die konstant gedrahten windschiefe Fläche dritten Grades, Sitzgsber. Österr. Akad. Wiss. **187** (1978), 297—312.

- [6] Kruppa, E.: Zur Differentialgeometrie der Strahlflächen und Raumkurven, Sitzsber. Akad. Wiss. Wien **157** (1949), 125—158. — Analytische und konstruktive Differentialgeometrie, Wien, 1957.
- [7] Müller, E., und J. Krames: Konstruktive Behandlung der Regelflächen (Vorlesungen über Darstellende Geometrie, Bd. III), Leipzig/Wien, 1931.
- [8] Pillwein, G.: Die Regelflächen konstanter Lancret-Krümmung mit einer Böschungstorse als Zentraltorse und einem geodätischen Kreis als Striktionslinie, Diss. TU Wien, 1979.
- [9] Sauer, R.: Streifenmodelle und Stangenmodelle zur Differentialgeometrie der Drehflächen, Schraubenflächen und Regelflächen, Math. Z. **48** (1942), 455—466. — Differenzengeometrie, Berlin, 1970.
- [10] Wunderlich, W.: Höhere Radlinien, Österr. Ing.-Archiv **1** (1947), 277—296. — Ebene Kinematik (Hochschultaschenb. Bd. 447), Mannheim, 1970.
- [11] Wunderlich, W.: Kurven konstanter Krümmung und fester Hauptnormalenrichtung, Monatsh. Math. **77** (1973), 158—171.
- [12] Wunderlich, W.: Raumkurven konstanter Krümmung und Regelflächen mit oskulierendem Striktionsband, Demonstr. Math. **6** (1973), 407—417.

II. Institut für Geometrie, Technische Universität, Gußhausstraße 27, A-1040 Wien, Österreich.