

W. WUNDERLICH

Zur projektiven Invarianz von Wackelstrukturen

Die Tatsache, daß die infinitesimale Beweglichkeit von Ausnahmestabwerken oder -polyedern gegenüber projektiven Transformationen invariant ist, wird auf einem natürlichen Weg bewiesen, der geeignete Geschwindigkeitsdiagramme benützt. Geschwindigkeitstransformationen, die mit der auf eine Wackelstruktur ausgeübten Affinität oder Kollineation verträglich sind, werden explizit angegeben.

The fact that the infinitesimal deformability of exceptional bar linkages or polyhedra is invariant under projective transformations is proved in a natural way by means of adequate velocity diagrams. Velocity transformations which are compatible with the affinity or homography applied to a shaky structure are presented in explicit form.

Тот факт, что бесконечно малое деформирование особых стержневых конструкций или многогранников инвариантно относительно проективных преобразований, доказывается естественным путём с использованием подходящих диаграмм скоростей. Преобразования скоростей, которые совместимы с аффинным преобразованием или коллинеацией шаткой конструкции, даются в явном виде.

1. Wackelige Stabwerke

Ein *räumliches Stabwerk*, bestehend aus n Stäben, die in insgesamt m Knoten gelenkig verbunden sind, besitzt hinsichtlich einer Deformation im allgemeinen den *Freiheitsgrad*

$$f_3 = 3m - n - 6. \quad (1.1)$$

Man kann nämlich über sechs Knotenkoordinaten geeignet verfügen, indem man etwa einen Knoten in den Ursprung, einen zweiten auf die x_1 -Achse und einen dritten in die x_1x_2 -Ebene verlegt; den restlichen $3m - 6$ Koordinaten sind dann durch die Stablängen n Bedingungen auferlegt. Für $f_3 \leq 0$, also $n \geq 3m - 6$, wird das Stabwerk für gewöhnlich starr sein. — Für ein *ebenes Stabwerk* beträgt auf Grund analoger Überlegungen der Deformations-Freiheitsgrad

$$f_2 = 2m - n - 3. \quad (1.2)$$

Die Auflösung der n (quadratischen) Gleichungen für die $3m - 6 \leq n$ bzw. $2m - 3 \leq n$ unbekannten Knotenkoordinaten wird, sofern sie keinen Widerspruch enthalten, im allgemeinen mehrere Lösungen liefern. Dies bedeutet dann, daß das Stabwerk verschiedene Formen annehmen kann. Weichen zwei derselben nicht allzu stark voneinander ab, so ist bei elastischem Material ein *Kippen* zwischen den beiden Positionen zu erzwingen [11, 12, 19, 21]. Man denke etwa an ein sehr flaches Tetraeder ($m = 4$, $n = 6$; $f_3 = 0$), das zwei bezüglich der festgehaltenen Basis spiegelbildliche Formen annehmen kann.

Rücken die erwähnten Positionen zusammen, so liegt ein *wackeliges Stabwerk* mit „infinitesimaler“ Deformabilität vor, die praktisch durchaus merkbar ist. Als Beispiel mag das zu einer ebenen Struktur ausgeartete Tetraeder dienen: Werden drei Knoten fixiert, dann wird der vierte noch ein Spiel normal zur festen Dreiecksebene gestatten. Derartige Wackelstrukturen, die aus statischen Rücksichten grundsätzlich zu vermeiden sind, haben wiederholt das Interesse der Konstrukteure und Mathematiker erregt [2, 7, 8, 9, 11, 12, 19, 20, 22]. Ihre Bedeutung für Fragestellungen des Vermessungswesens, sogenannte „gefährliche Anordnungen“ betreffend, wurde unlängst hervor- gehoben [15].

Eine ausgezeichnete Rolle kommt dem seltenen Fall zu, daß das genannte Gleichungssystem eine stetige Schar von Lösungen besitzt: Das Stabwerk gestattet dann eine *stetige Deformation* und ist deshalb für die Getriebelehre von Wichtigkeit. Hier wären zu nennen die berühmten Gelenkokaeder von R. BRICARD [3, 4, 11], das Isogramm von G. T. BENNETT [1, 4, 12] und andere geschlossene Gelenkketten [4, 5, 10, 13, 14, 18], ferner das zum Trilaterationsproblem bei komplanaren Standpunkten gehörige Stabwerk [16, 17].

Die *Wackeligkeit* einer Struktur ist immer durch spezielle Abmessungen bedingt und daher ihrem Wesen nach im Grunde eine metrische Angelegenheit. Umso erstaunlicher ist daher die Tatsache, daß sie eine *projektive Eigenschaft* darstellt, d. h. daß eine Wackelstruktur bei beliebiger affiner oder sogar kollinearer Transformation wieder in eine Wackelstruktur übergeht. Zur Erläuterung sei das folgende klassische Beispiel angeführt: Ein durch seine drei Hauptdiagonalen ergänztes ebenes Gelenksechseck ist im allgemeinen starr ($m = 6$, $n = 9$; $f_2 = 0$); liegen die sechs Knoten jedoch auf einem Kegelschnitt (der auch in ein Geradenpaar zerfallen darf), dann ist es zumindest wackelig [9, 15/I], unter Umständen sogar stetig beweglich [13]. Diese Kennzeichnung wird offenbar durch eine Affinität oder Kollineation (Parallel- bzw. Zentralprojektion) nicht zerstört.

Nach dem Gesagten wird auch eine stetig bewegliche Struktur vermöge projektiver Transformationen zu wenigstens wackeligen Strukturen führen. Die Erhaltung der endlichen Deformabilität darf allerdings nicht erwartet werden, obwohl es auch dafür Beispiele gibt. So wurde gezeigt [16, 17]: Werden beliebig viele Punkte eines Kegelschnitts mit beliebig vielen beliebig im Raum verteilten Punkten durch Stäbe gelenkig verbunden, so entsteht immer ein stetig bewegliches Stabwerk. Betrachtet man hingegen etwa jene ebenen Neun- oder Zwölfstabgetriebe, deren Bauart als Parallelprojektion eines dreiseitigen Prismas bzw. eines Würfels erklärbar ist [10], so bleibt deren endliche Beweglichkeit zwar bei Ausübung einer Affinität erhalten, nicht mehr jedoch bei Anwendung einer Kollineation.

Die *projektive Invarianz* der Wackeligkeit einer Struktur wurde erstmals von H. LIEBMANN [8] erkannt. Sein Beweis stützt sich allerdings auf die einschränkende Voraussetzung, daß das Stabwerk wenigstens ein unveränderliches Dreieck enthält (S. 215). In der vorliegenden Arbeit wird nun ein relativ durchsichtiger Beweis vorgeführt, der keine Einschränkung benötigt. Er beruht auf der Verwendung von Geschwindigkeitsdiagrammen, die die (infinitesimale) Wackelbewegung auch quantitativ kennzeichnen und der Denkweise des Technikers entgegenkommen dürften.

2. Hodographen

Die Lage eines Stabwerkknötens X wird durch seine (inhomogenen) kartesischen Koordinaten x_1, x_2, x_3 beschrieben, die zu einer Spaltenmatrix $\mathbf{x}$ zusammengefaßt werden. Die Länge s eines Stabes XY ist dann bestimmt durch

$$s^2 = \sum_{i=1}^3 (x_i - y_i)^2 = (\mathbf{x} - \mathbf{y})^T (\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (2.1)$$

wobei der Zeiger T die Transposition der Spaltenmatrix zur Zeilenmatrix bedeutet.

Bei Verlagerung der Knoten sind deren Koordinaten als Funktionen eines Zeitparameters t anzusehen. Der momentane Geschwindigkeitsvektor ist durch die Ableitung $\dot{\mathbf{x}} = d\mathbf{x}/dt$ gegeben, die einen Punkt $\dot{X}$ festlegt. Die Gesamtheit der Punkte $\dot{X}, \dot{Y}, \dots$ bildet ein *Geschwindigkeitsdiagramm*, kurz „Hodograph“ genannt. Soll die Knotenstanz $s = XY$ (in erster Ordnung) unverändert bleiben, so gilt wegen $\dot{s} = 0$ zufolge (2.1):

$$(\mathbf{x} - \mathbf{y})^T (\dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{y}}) = 0. \quad (2.2)$$

Dies bedeutet, daß die Strecke $\dot{X}\dot{Y}$ des Hodographen zum Stab XY *orthogonal* verläuft. Anders ausgedrückt (Bild 1): Für die Enden eines Stabes müssen die Geschwindigkeitskomponenten in Stabrichtung übereinstimmen.

Bei *starrer Verlagerung des ganzen Stabwerks* (also ohne Deformation) erfolgt dieselbe nach dem Fundamentalsatz der räumlichen Kinematik in jedem Augenblick wie bei einer Schraubung. Da sich eine solche Momentanschraubung aus einer Momentandrehung um eine Achse und einer Momentanschiebung in Achsenrichtung zusammensetzt, so hat man in einem solchen Fall einen *ebenen Hodographen* in einer zur Momentanachse normalen Ebene; seine Gestalt ist *ähnlich zum Normalriß des Stabwerks* in Achsenrichtung. Existiert nun ein *von dieser Ausartung verschiedener Hodograph*, der die Orthogonalitätsbedingung $\dot{X}\dot{Y} \perp XY$ für sämtliche Stäbe erfüllt, dann ist dies ein Kennzeichen für (zumindest) *Wackeligkeit*. Hinreichend ist also bereits das Vorhandensein eines nicht ebenen Hodographen, doch ist dies keineswegs unbedingt notwendig (vgl. [22]). Speziell bei ebenen Stabwerken ist für die Wackeligkeit entscheidend, daß der (naturgemäß ebenfalls ebene) Hodograph nicht zum Stabwerk ähnlich ist (Bild 2).

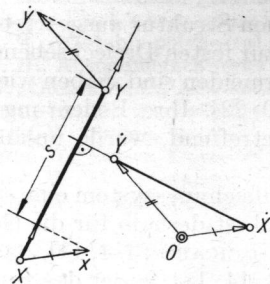


Bild 1

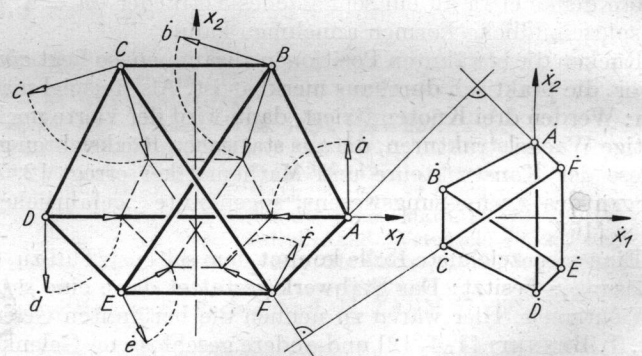


Bild 2

Zu bemerken wäre, daß der Hodograph eines wackeligen (oder beweglichen) Stabwerks durchaus nicht eindeutig bestimmt ist, weil ja der Wackelbewegung noch eine beliebige Momentanschraubung überlagert werden kann. Man dürfte beispielsweise für einen Knoten X die Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{x}}$ beliebig vorschreiben, und für zwei Nachbarknoten Y, Z noch die der Orthogonalitätsbedingung genügenden Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{y}}$ und $\dot{\mathbf{z}}$ (in Bild 2 etwa $\dot{\mathbf{a}}, \dot{\mathbf{d}}, \dot{\mathbf{e}}$).

Offensichtlich stellt der Hodograph eines wackeligen Stabwerks wieder ein solches dar; die beiden Figuren vertauschen bloß die Rollen, wobei die Orthogonalitätsbedingung gewahrt bleibt (vgl. Bild 2).

3. Affine Invarianz

Übt man auf ein wackeliges Stabwerk eine *Affinität* aus, so bedeutet es keine Einschränkung, den Koordinatenursprung O als fest anzunehmen; eine allfällige Verlagerung desselben könnte ja durch eine Translation kompen-

siert werden. Die affine Transformation $X \rightarrow X'$ wird dann im räumlichen Fall beschrieben durch

$$x'_i = \sum_{k=1}^3 a_{ik} x_k \quad (i = 1, 2, 3), \quad (3.1)$$

oder mit Hilfe der (3,3)-Matrix $A = (a_{ik})$ durch

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}. \quad (3.2)$$

Hierbei sei zwecks Vermeidung von Ausartungen $\det A \neq 0$ vorausgesetzt, ferner noch $A^T A \neq \lambda E$, um die trivialen Ähnlichkeitstransformationen auszuschalten.

Es läßt sich nun leicht eine entsprechende affine Transformation $\dot{X} \rightarrow \dot{X}'$ des Hodographen angeben, also

$$\dot{\mathbf{x}}' = B\dot{\mathbf{x}}, \quad (3.3)$$

welche die Orthogonalitätsbedingung (2.2) bewahrt. Es ist nämlich

$$(\mathbf{x}' - \mathbf{y}')^T (\dot{\mathbf{x}}' - \dot{\mathbf{y}}') = (\mathbf{x} - \mathbf{y})^T A^T B (\dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{y}}) = 0, \quad (3.4)$$

wenn man B so wählt, daß die Produktmatrix $A^T B$ zur Einheitsmatrix E oder dazu proportional wird. Dies verlangt lediglich

$$B = \lambda(A^T)^{-1} = \lambda(A^{-1})^T \quad \text{mit } \lambda \neq 0, \quad (3.5)$$

und die Inverse A^{-1} existiert wegen der Voraussetzung $\det A \neq 0$. Man könnte für B einfach die Matrix der algebraischen Komplemente b_{ik} der a_{ik} nehmen. Damit ist die affine Invarianz der Wackeligkeit nachgewiesen, die sich auch unschwer synthetisch einsehen ließe, indem man die Figuren der Fernelemente von Stabwerk und Hodograph betrachtet.

Im Falle eines ebenen Stabwerks ist bloß $x_3 = \dot{x}_3 = 0$ zu setzen. Dies läuft darauf hinaus, die Spaltenmatrizen auf zwei Elemente zu verkürzen und mit (2,2)-Matrizen A und B zu operieren.

Zur Illustration sei das in Bild 2 wiedergegebene Gelenksechseck mit den Knoten $A(2, 0)$, $B(1, 2)$, $C(-1, 2)$, $D(-2, 0)$, $E(-1, -1)$ und $F(1, -1)$ herangezogen. Dieselben liegen aus Symmetriegründen auf einer Ellipse, das Stabwerk ist also wackelig (vgl. Abschn. 1). Gewählt wurden die (der Orthogonalitätsbedingung genügenden) Wackelgeschwindigkeitsvektoren $\dot{a}(0, 1)$, $\dot{d}(0, -1)$ und $\dot{e}(1/3, -2/3)$; die übrigen ergeben sich in bekannter Weise mit Hilfe der rechtwinklig verschwenkten Geschwindigkeitsvektoren oder durch Ergänzung des Hodographen; dieser hat die Ecken $\dot{A}(0, 1)$, $\dot{B}(-26/21, 8/21)$, $\dot{C}(-26/21, -8/21)$, $\dot{D}(0, -1)$, $\dot{E}(1/3, -2/3)$, $\dot{F}(1/3, 2/3)$ und weist die gleiche Bauart wie das Stabwerk auf. Durch Ausübung der Affinität

$$\begin{aligned} x'_1 &= 2x_1 + x_2, \\ x'_2 &= 3x_2, \end{aligned} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

ergibt sich das in Bild 3 (verkleinert) dargestellte Sechseck mit den Knoten $A'(4, 0)$, $B'(4, 6)$, $C'(0, 6)$, $D'(-4, 0)$, $E'(-3, -3)$, $F'(1, -3)$ und dem zugehörigen, mittels

$$\begin{aligned} \dot{x}'_1 &= 3\dot{x}_1, \\ \dot{x}'_2 &= -\dot{x}_1 + 2\dot{x}_2, \end{aligned} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

gewonnenen Hodographen: $\dot{A}'(0, 2)$, $\dot{B}'(-26/7, 2)$, $\dot{C}'(-26/7, 10/21)$, $\dot{D}'(0, -2)$, $\dot{E}'(1, -5/3)$, $\dot{F}'(1, 1)$.

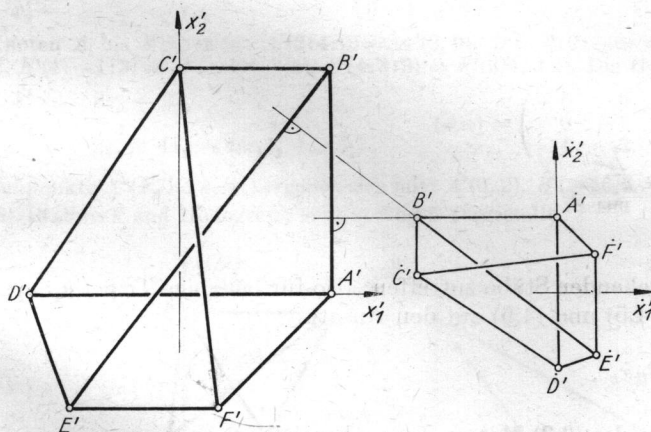


Bild 3

4. Kollineare Invarianz

Der Nachweis für die kollineare Invarianz der Wackeligkeit eines Stabwerks ist weitaus schwieriger. Zunächst empfiehlt es sich, von den inhomogenen zu homogenen kartesischen Koordinaten überzugehen. Ein eigentlicher Raumpunkt X wird jetzt durch die Verhältnisse von vier Zahlen $x_0:x_1:x_2:x_3$ mit $x_0 \neq 0$ festgelegt; seine gewöhnlichen (inhomogenen) Koordinaten haben die Werte x_1/x_0 , x_2/x_0 , x_3/x_0 . Ist $x_0 = 0$, so hat man den Fernpunkt mit dem Richtungsvektor (x_1, x_2, x_3) .

Eine Kollineation $X \rightarrow X'$ wird nun beschrieben durch die lineare Transformation

$$x'_i = \sum_{k=0}^3 a_{ik} x_k \quad (i = 0, 1, 2, 3), \quad (4.1)$$

wobei zwecks Vermeidung von Ausartungen $\det(a_{ik}) = A \neq 0$ vorauszusetzen ist. Der Versuch, eine entsprechende Kollineation $\dot{X} \rightarrow \dot{X}'$ des Hodographen zu finden, welche die Orthogonalitätsrelation $XY \perp \dot{X}\dot{Y}$, also

$$\sum_{i=1}^3 (x_0 y_i - y_0 x_i) (\dot{x}_0 \dot{y}_i - \dot{y}_0 \dot{x}_i) = 0 \quad (4.2)$$

erhält, schlägt fehl. Es gelingt jedoch, eine von X abhängige Transformation $\dot{X} \rightarrow \dot{X}'$ anzugeben, welche das Gewünschte leistet.

Zu diesem Zweck betrachte man irgendeinen vom Knoten $X(x_i)$ ausgehenden Stab, dessen Richtung durch seinen Fernpunkt $U(u_i)$ mit $u_0 = 0$ festgelegt sei. Der entsprechende Stab im kollinearen System enthält neben $X'(x'_i)$ den $\dot{U}$ zugeordneten „Fluchtpunkt“ $U'(u'_i)$ mit

$$u'_i = \sum_{k=0}^3 a_{ik} u_k \quad (i = 0, 1, 2, 3). \quad (4.3)$$

Der die Richtung dieses Stabes anzeigende Fernpunkt $V'(v'_i)$ kann durch eine geeignete Linearkombination $v'_i = \lambda x'_i - \mu u'_i$ erfaßt werden, wobei wegen $v_0 = 0$ die Relation $\lambda:\mu = u'_0:x'_0 = \sum a_{0k} u_k : \sum a_{0j} x_j$ zu beachten ist. Man hat also für $i > 0$:

$$v'_i = u'_0 x'_i - x'_0 u'_i = \sum_{k=1}^3 \alpha_{ik} u_k \quad \text{mit} \quad \alpha_{ik} = \sum_{j=0}^3 (a_{0k} a_{ij} - a_{0j} a_{ik}) x_j. \quad (4.4)$$

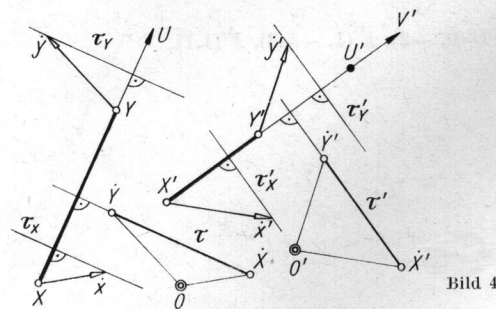
Für das Knotenpaar X, X' beschreibt (4.4) die durch die Kollineation induzierte projektive Beziehung zwischen den Bündeln entsprechender Stabachsen XU und $X'U' = X'V'$.

Denkt man sich im Knoten X alle möglichen Geschwindigkeitsvektoren $\dot{x}$ angebracht, welche dieselbe Komponente in Stabrichtung XU besitzen, so liegen ihre Endpunkte in einer „Transversalebene“ $\tau_X \perp XU$; die zugehörigen Hodographenpunkte $\dot{X}$ gehören dann einer zu τ_X parallelen Ebene τ an, die durch

$$\sum_{k=1}^3 u_k \dot{x}_k = c \cdot \dot{x}_0 \quad \text{mit} \quad c = \text{const} \quad (4.5)$$

dargestellt wird. Dieselbe Ebene τ ist wegen der Orthogonalitätsbedingung auch für einen beliebigen anderen Knoten Y auf XU maßgebend (Bild 4). Man wird verlangen, daß im Hodographen des kollinearen Stabwerks eine analoge Trägerebene τ' für die (variabel zu denkenden) Punkte $\dot{X}', \dot{Y}'$ auftritt, beschrieben durch

$$\sum_{i=1}^3 v'_i \dot{x}'_i = \sum_{i,k=1}^3 \alpha_{ik} u_k \dot{x}'_i = c' \dot{x}'_0. \quad (4.6)$$



Da dieser Sachverhalt für sämtliche von X ausgehenden Stäbe zutreffen, also für beliebige Tripel $u_1:u_2:u_3$ bestehen soll, führt der Koeffizientenvergleich zwischen (4.5) und (4.6) auf den Ansatz

$$\varrho \dot{x}_k = \sum_{i=1}^3 \alpha_{ik} \dot{x}'_i \quad \text{oder} \quad \varrho' \dot{x}'_i = \sum_{k=1}^3 \beta_{ik} \dot{x}_k, \quad (4.7)$$

wobei β_{ik} das algebraische Komplement zu α_{ik} in der (3,3)-Matrix der α_{ik} bezeichnet.

Die Berechnung der Komplemente β_{ik} ist etwas aufwendig und sei etwa für β_{11} näher ausgeführt. Mit Rücksicht auf (4.4) ergibt sich

$$\begin{aligned} \beta_{11} &= \alpha_{22}\alpha_{33} - \alpha_{23}\alpha_{32} \\ &= \sum_0^3 [(a_{02}a_{2i} - a_{0i}a_{22})(a_{03}a_{3j} - a_{0j}a_{33}) - (a_{03}a_{2i} - a_{0i}a_{23})(a_{02}a_{3j} - a_{0j}a_{32})] x_i x_j \\ &= \sum [(a_{0i}a_{0j}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{0i}a_{2j}(a_{03}a_{32} - a_{02}a_{33}) + a_{0i}a_{3j}(a_{02}a_{23} - a_{03}a_{22})] x_i x_j \\ &= \sum_i a_{0i} x_i \cdot \sum_j [(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) a_{0j} + (a_{03}a_{32} - a_{02}a_{33}) a_{2j} + (a_{02}a_{23} - a_{03}a_{22}) a_{3j}] x_j = x'_0 \cdot (A_{11}x_0 - A_{10}x_1), \end{aligned}$$

wobei A_{ik} das algebraische Komplement von a_{ik} in der (4,4)-Matrix der a_{ik} bedeutet. Nach diesem Muster gelangt man schließlich zu der umfassenden Darstellung

$$\beta_{ik} = x'_0 \cdot (A_{ik}x_0 - A_{i0}x_k) \quad \text{für } i, k = 1, 2, 3. \quad (4.8)$$

Geht man nunmehr mit den gemäß (4.7) bekannten x'_i in die Formel (4.6) ein, dann findet man mit Beachtung von (4.5):

$$\varrho' c' \dot{x}'_0 = \sum_1^3 \alpha_{ik} u_k \beta_{il} \dot{x}_l = \Delta \cdot \sum \delta_{kl} u_k \dot{x}_l = \Delta \cdot \sum u_k \dot{x}_k = \Delta c \dot{x}_0. \quad (4.9)$$

Der Wert der dabei auftretenden Determinante $\Delta = \det(\alpha_{ik})$ berechnet sich über

$$\Delta = \sum_{k=1}^3 \alpha_{1k} \beta_{1k} = x'_0 \sum_0^3 (a_{0k} a_{1j} - a_{0j} a_{1k}) (A_{1k} x_0 - A_{10} x_k) x_j = x'_0 \sum_{j=0}^3 b_j x_j,$$

wobei

$$b_j = a_{0j} A_{10} \sum a_{1k} x_k - a_{1j} A_{10} \sum a_{0k} x_k - a_{0j} x_0 \sum a_{1k} A_{1k} = A_{10} (a_{0j} x'_1 - a_{1j} x'_0) - A a_{0j} x_0,$$

zu

$$\Delta = -A x_0 x'^2_0 \quad \text{mit } A = \det(a_{ik}). \quad (4.10)$$

Mit den auf Grund der Verwendung homogener Koordinaten zulässigen Festsetzungen $\varrho' = x'_0$ und $\dot{x}'_0 = x'_0$ sowie den ebenso erlaubten Normierungen $x_0 = 1$ und $\dot{x}_0 = 1$ erweist sich die in (4.6) eingeführte Konstante c' zufolge (4.9) durch $c' = -Ac$ bestimmt und daher tatsächlich als fest. Die gesuchte *Hodographen-Transformation* $\dot{X} \rightarrow \dot{X}'$ lautet demnach gemäß (4.7):

$$\dot{x}'_0 = x'_0 = \sum_{k=0}^3 a_{0k} x_k \quad (x_0 = 1), \quad \dot{x}'_i = \sum_{k=1}^3 (A_{ik} - A_{i0} x_k) \dot{x}_k \quad (i = 1, 2, 3; \dot{x}_0 = 1). \quad (4.11)$$

Diese Formeln stimmen mit den von N. W. EFIMOW [6, S. 61] für die *infinitesimale Verbiegung glatter Flächen* angegebenen überein. Der dort zur Herleitung beschrittene Weg ist jedoch nicht ohne weiteres auf Stabwerke übertragbar, weil er die starre Verlagerung der Flächenelemente benützt, die jeweils als infinitesimale Schraubung aufgefaßt werden kann. Während bei der Verbiegung einer Fläche die Winkel zwischen den Linienelementen eines Punktes invariant bleiben, erfahren die Winkel zwischen den Stäben eines Stabwerkknotens bei infinitesimaler Deformation im allgemeinen doch Änderungen 1. Ordnung, so daß keine starre Verlagerung der Knotenbündel stattfindet. — Umgekehrt läßt sich hingegen der Fortbestand der hier hergeleiteten Formeln (4.11) auch bei der Flächenverbiegung erwarten, wenn man nämlich die Fläche mit steigender Genauigkeit durch ein Dreieckspolyeder approximiert (vgl. Abschnitt 5).

Für *ebene Stabwerke* ist wieder bloß $x_3 = \dot{x}_3 = 0$ anzunehmen. Man stellt leicht fest, daß die Formeln (4.11) ihre Bauart bewahren, abgesehen davon, daß die Indizes nur bis 2 laufen. Man vergleiche hierzu das nachfolgende Beispiel. Im übrigen verringert sich der Aufwand des obigen Beweisganges ganz beträchtlich, wenn man ihn von vornherein auf den ebenen Fall beschränkt, der auch den Erklärungsfiguren Bild 1 und 4 zugrundegelegt wurde.

Zur Anwendung der (reduzierten) Formeln sei wieder das Gelenksechseck aus Bild 2 herangezogen, dessen Daten in Abschnitt 3 vermerkt und lediglich durch die homogenisierenden Koordinaten $x_0 = 1$ bzw. $\dot{x}_0 = 1$ zu ergänzen sind. Bei Ausübung der Kollineation

$$\begin{aligned} x'_0 &= 2x_0 & -2x_2, \\ x'_1 &= 2x_1 & -x_2, \\ x'_2 &= & -3x_2, \end{aligned} \quad (a_{ik}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

gehen die Knoten A bis F über in: $A'(2:4:0) = A'(2, 0)$, $B'(-2:0:-6) = B'(0, 3)$, $C'(-2:-4:-6) = C'(2, 3)$, $D'(2:-4:0) = D'(-2, 0)$, $E'(4:-1:3) = E'(-1/4, 3/4)$, $F'(4:3:3) = F'(3/4, 3/4)$. Die Hodographen-Transformation (4.11) lautet

$$\begin{aligned} \dot{x}'_0 &= 2x_0 - 2x_2, \\ \dot{x}'_1 &= -6x_1, \\ \dot{x}'_2 &= 2x_1 + 4x_2 - 4(x_1x_1 + x_2x_2), \end{aligned} \quad (A_{ik}) = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}. \quad (4.13)$$

Die Diagrammpunkte $\dot{X}'(\dot{x}'_1/\dot{x}'_0, \dot{x}'_2/\dot{x}'_0)$ ergeben sich mit: $\dot{A}'(0, 2)$, $\dot{B}'(-26/7, -10/21)$, $\dot{C}'(-26/7, 62/21)$, $\dot{D}'(0, -2)$, $\dot{E}'(-1/2, -5/6)$, $\dot{F}'(-1/2, 7/6)$. Stabwerk und Hodograph sind in Bild 5 dargestellt.

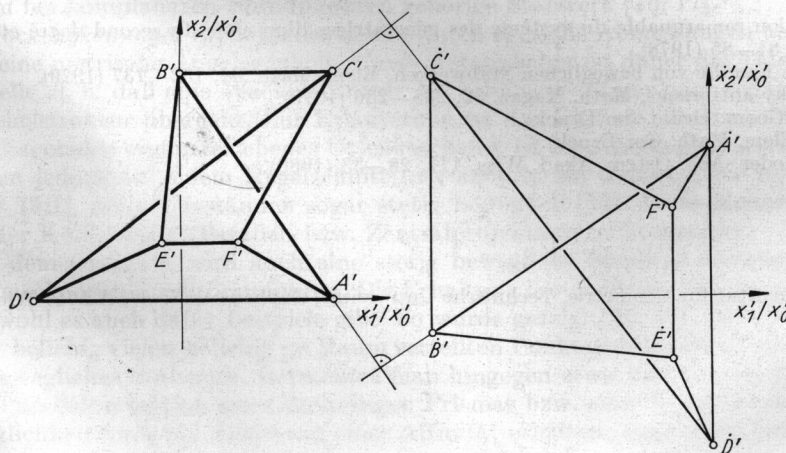


Bild 5

5. Wackelige Polyeder und Gelenkketten

Mit dem Nachweis der projektiven Invarianz von wackeligen Stabwerken ist auch das gleiche Problem für *Polyeder* und *Gelenkketten* erledigt, weil man diese Strukturen durch Stabwerke ersetzen kann.

Gemeint sind dabei vorzugsweise (jedoch nicht ausschließlich) geschlossene Polyeder, deren Seitenflächen als starre Platten ausgebildet sind, die längs der Kanten gelenkig zusammenhängen. Ein solches Polyeder kann starr sein, beispielsweise wenn es konvex ist (A. CAUCHY, 1813); nichtkonvexe Polyeder können jedoch unter Umständen zwischen zwei Nachbarformen kippen [7, 11, 19, 21]. Bei zusammengerückten Nachbarlagen sind die Polyeder *wackelig*, also infinitesimal deformierbar, wie etwa die Wackeloktaeder von W. BLASCHKE [2, 11], die Wackelikosaeder von M. GOLDBERG [7] und vom Verfasser [20, 22]. Schließlich kann auch ein geschlossenes Polyeder sogar in endlichem Ausmaß stetig beweglich sein; dieses bis vor kurzem bei Polyedern ohne Selbstdurchdringungen für unmöglich gehaltene Phänomen wird durch das aufsehenerregende Achtzehnflach von R. CONNELLY [5] belegt, das dann von K. STEFFEN durch ein Vierzehnflach verbessert wurde.

Handelt es sich von vornherein um *Dreieckspolyeder*, so können dieselben durch Materialisierung der Kanten auch als Stabwerke ausgebildet werden, welche dann naturgemäß das gleiche Verhalten zeigen. Die BRICARDSchen Gelenkokaeder [3, 4, 11] können überhaupt nur unter Weglassung zweier der acht Dreiecksflächen als Kartonmodelle oder aber gleich als Stabmodelle realisiert werden, weil gewisse der Seitenflächen einander durchdringen. — Treten hingegen unter den Seitenflächen eines Polyeders solche mit mehr als drei Ecken auf, dann wird eine Ausführung als Stabmodell meist beweglich ausfallen; man denke etwa an den Würfel. Überdacht man jedoch alle derartigen Seitenflächen durch (genügend flache) Pyramiden, die mittels zusätzlicher Basisstäbe versteift werden, so gelangt man wieder zu Dreieckspolyedern, auf welche die Ergebnisse über Stabwerke anwendbar sind.

Gleiche Aussagen gelten für geschlossene, mit Zylindergelenken ausgestattete *räumliche Ketten* starrer Systeme, weil jedes Glied durch ein Tetraeder ersetzt werden kann, welches zwei (im allgemeinen windschiefe) Gelenkachsen zu Gegenkanten hat; im Fall schneidender oder paralleler Gelenkachsen sind leicht angebbare Modifikationen vorzunehmen. Nichttriviale Beispiele für bewegliche Gelenkketten bieten das viergliedrige BENNETTSche Isogramm [1, 4, 12] und die sechsgliedrige BRICARDSche Kette [4, S. 311].

Zusammenfassend gilt mithin: *Übt man auf eine wackelige oder stetig bewegliche Struktur eine beliebige Affinität oder Kollineation aus, so entsteht zumindest eine Wackelstruktur.* Die endliche Beweglichkeit wird allerdings für gewöhnlich verlorengehen. Jedenfalls kann man aber aus einer bekannten Wackelstruktur durch frei wählbare projektive Transformationen beliebig viele weitere ableiten.

Literatur

- 1 BENNETT, G. T., A new mechanism, Engineering **76**, 777—778 (1903). — The skew isogram mechanism, Proc. London Math. Soc. **13**, 151—173 (1913).
- 2 BLASCHKE, W., Wackelige Achtfläche, Math. Z. **6**, 85—93 (1920).
- 3 BRICARD, R., Mémoire sur la théorie de l'octaèdre articulé, J. Math. pur. appl. **3**, 113—148 (1897).
- 4 BRICARD, R., Leçons de cinématique, II (Paris 1927).
- 5 CONNELLY, R., An immersed polyhedral surface which flexes, Indiana Univ. Math. J. **25**, 965—972 (1976).
- 6 EFIMOW, N. W., Flächenverbiegung im Großen (Math. Monogr., Bd. 7; Berlin 1957).
- 7 GOLDBERG, M., Unstable polyhedral structures, Math. Magaz. **51**, 165—170 (1978).
- 8 LIEBMANN, H., Ausnahmefachwerke und ihre Determinante, Sb. Bayer. Akad. Wiss. 1920, 197—227.
- 9 RITTER, W.; CULMANN, C., Anwendungen der graphischen Statik, II (Zürich 1890).
- 10 WUNDERLICH, W., Ein merkwürdiges Zwölfstabgetriebe, Österr. Ingen. Archiv **8**, 224—228 (1954).
- 11 WUNDERLICH, W., Starre, kippende, wackelige und bewegliche Achtfläche, Elem. Math. **20**, 25—32 (1965).
- 12 WUNDERLICH, W., Starre, kippende, wackelige und bewegliche Gelenkvierecke im Raum, Elem. Math. **26**, 73—83 (1971).
- 13 WUNDERLICH, W., On deformable nine-bar linkages with six triple joints, Proc. Nederl. Akad. Wetensch. **79**, 257—262 (1976).
- 14 WUNDERLICH, W., Fokalkurvenpaare in orthogonalen Ebenen und bewegliche Stabwerke, Sb. Österr. Akad. Wiss. **185**, 275—290 (1976).
- 15 WUNDERLICH, W., Gefährliche Annahmen der Trilateration und bewegliche Fachwerke I, II, ZAMM **57**, 297—304 u. 363—367 (1977).
- 16 WUNDERLICH, W., Untersuchungen zu einem Trilaterationsproblem mit komplanaren Standpunkten, Sb. Österr. Akad. Wiss. **186**, 263—280 (1977).
- 17 WUNDERLICH, W., Sur une déformation remarquable du système des génératrices d'un cône du second degré et un problème de géodésie, Bul. Inst. Polit. Iasi **24**, 81—85 (1978).
- 18 WUNDERLICH, W., Eine merkwürdige Familie von beweglichen Stabwerken, Elem. Math. **34**, 132—137 (1979).
- 19 WUNDERLICH, W., Snapping and shaky antiprisms, Math. Magaz. **52**, 235—236 (1979).
- 20 WUNDERLICH, W., Wackelikosaeder, Geom. Dedic. (im Druck).
- 21 WUNDERLICH, W., Kipp-Ikosaeder, Elem. Math. (im Druck).
- 22 WUNDERLICH, W., Neue Wackelikosaeder, Anz. Österr. Akad. Wiss. **117**, 28—33 (1980).

Eingereicht am 28. 4. 1980

Anschrift: Prof. Dr. W. WUNDERLICH, Institut für Geometrie, Technische Universität, Gußhausstraße 27, A-1040 Wien, Österreich