Nicht im Handel

Sonderabdruck aus Bd. I, Heft 4/5

ÖSTERREICHISCHES INGENIEUR-ARCHIV

Schriftleiter: Prof. Dr. F. Magyar und Prof. Dr. K. Wolf, Technische Hochschule Wien

Springer-Verlag, Wien I, Mölkerbastei 5

Alle Rechte vorbehalten

[redacted]

Höhere Radlinien.

Von **W. Wunderlich**, Wien.

Mit 12 Textabbildungen.

1. Einleitung.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit einer Erweiterung des Begriffes der Radlinien. Unter dieser Bezeichnung versteht man im allgemeinen jene ebenen Kurven, die als Punktbahnen beim Rollen eines Kreises auf einem anderen entstehen. Man unterscheidet dabei die Zykloiden, bei welchen der erzeugende Punkt auf dem Umfang des Rollkreises liegt, und die Trochoiden, bei welchen das nicht der

Fall ist. Im Bedarfsfall wird noch durch die Vorsilben „Epi-“ bzw. „Hypo-“ angedeutet, ob der bewegliche Kreis auf der Außen- bzw. Innenseite des Fixkreises abrollt. — Diese „niederen“ Radlinien sind seit langem bekannt, da sie in Geometrie und Mechanik bei den verschiedensten Gelegenheiten auftreten. Sie waren Gegenstand zahlloser, meist kleinerer Untersuchungen, welche eine Fülle schöner Eigenschaften aufdeckten; eine befriedigende Monographie existiert aber eigentlich noch immer nicht.[1]

Unter den besonderen Eigenschaften der niederen Radlinien ist besonders ihre doppelte Erzeugung hervorzuheben, die schon Euler (1784) gekannt hat: Jede Radlinie kann auf zweifache Art als Punktbahn einer Kreisrollung entstehen.[2]

Die Zykloiden nehmen insofern eine besondere Stellung unter den Radlinien ein, als sie noch eine weitere Erzeugung als Hüllkurve gestatten: Jeder Durchmesser des Rollkreises hüllt nämlich im Verlauf der Bewegung eine Zykloide ein, und auch diese Erzeugung ist wieder auf doppelte Weise möglich.[3]

Aus ihrer besonderen Entstehungsweise fließen weitere bemerkenswerte Eigenschaften der Zykloiden, die den Trochoiden fehlen. So sind z. B. ihre Evoluten zur Grundkurve ähnlich, woraus sich natürlich auch Aussagen über die Evolventen ergeben. Die isoptischen Linien der Zykloiden sind Trochoiden, ebenso die Fußpunktskurven bezüglich des Mittelpunktes; letztere gehen übrigens selbst durch das Zentrum und tragen einen eigenen Namen: Es sind die Rosenkurven oder Rhodoneen von Grandi (1713).

Die angekündigte Erweiterung des Radlinienbegriffes besteht nun darin, daß nicht bloß zwei, sondern eine endliche Anzahl s von Rädern rollen. Es liegt ein erster Kreis vor, der fest ist und auf dem ein zweiter rollt; auf diesem rollt dann ein dritter, auf diesem wiederum ein vierter usw. Wesentlich ist, daß alle Geschwindigkeiten zwar beliebig, aber konstant sein sollen. Ein mit dem letzten — dem s^{ten} — Kreis starr verbundener Punkt beschreibt eine Bahn, die „Radlinie s^{ter} Stufe“ heißen soll. Man gelangt auf diese Weise zu einer großen, außerordentlich formenreichen Familie von Kurven, die durch eine Reihe bemerkenswerter Eigenschaften ausgezeichnet sind und auf Grund ihrer mechanischen Erzeugung technisches Interesse verdienen.

An sich ist dieser schon in den Epizykeln des Ptolemäus (2. Jahrh. n. Chr.) verwirklichte Gedanke gewiß nicht neu, doch scheint eine systematische Untersuchung dieser Kurven bisher zu fehlen, da sie nirgends besonders erwähnt, geschweige denn gewürdigt werden.[4] Und doch ist das eingehende Studium der „höheren Radlinien“ lohnend, denn es lassen sich nicht nur die vorhin angeführten Sätze über die gewöhnlichen Radlinien („2. Stufe“) weitgehend verallgemeinern, sondern erst jetzt Aussagen über die allgemeinen Fußpunktskurven der Zykloiden und die isoptischen Linien beliebiger Zykloidenpaare machen. Ferner läßt sich eine große Zahl bekannter Einzel-

---

[1] Zusammenfassende Darstellungen der niederen Radlinien geben G. Loria: Spezielle algebraische und transzendente Kurven der Ebene, Bd. II. Leipzig. 1902. — H. Wieleitner: Spezielle Ebene Kurven. Sammlung Schubert 56. Leipzig. 1908. — Ausführliche Literaturangaben enthalten die Referate von G. Scheffers: Enz. math. Wiss. III D 4 und E. Wölffing: Bibl. math. (3) 2 (1901).

[2] So entsteht z. B. die bekannte dreispitzige Hypozykloide von Steiner als Punktbahn nicht nur bei der Rollung eines Kreises vom Radius 1 in einem Kreis vom Radius 3, sondern auch bei der Rollung eines doppelt so großen im selben Grundkreis.

[3] Die vorhin erwähnte Steinerzykloide entsteht als Durchmesserhüllbahn sowohl bei der Rollung eines Kreises vom Radius 2 in einem Kreis vom Radius 3, als auch bei der Rollung eines doppelt so großen um denselben Grundkreis.

[4] Die vielleicht einigermaßen einschlägigen Arbeiten von G. Bellermann, Über Rouletten, welche entstehen, wenn eine Zykloide auf einer anderen rollt (Berlin, 1892), und C. Eichler, Mitt. Hamb. math. Ges. 2 (1890) sind gegenwärtig nicht greifbar.

kurven und Kurvengruppen unter die höheren Radlinien einordnen, womit sie einer einheitlichen Behandlung zugänglich gemacht und neue Zusammenhänge aufgedeckt werden.

Die Möglichkeit, beliebig vorgegebene Linien durch höhere Radlinien mit jeder gewünschten Genauigkeit anzunähern, unterstreicht ihre Bedeutung für die Technik.

Die vorliegende Arbeit ist den allgemeinen Eigenschaften der höheren Radlinien gewidmet. Einzelheiten, Sonderfälle und Anwendungen sollen späteren Mitteilungen vorbehalten bleiben.

2. Grundlegendes.

Um einen Punkt A_0 der festen Ebene Σ_0 drehe sich eine Ebene Σ_1 mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω_1. Um einen Punkt A_1 von Σ_1 drehe sich eine weitere Ebene Σ_2 mit der Geschwindigkeit ω_2 usw. bis zur Ebene Σ_s, die sich mit der Geschwindigkeit ω_s um einen festen Punkt A_{s-1} von Σ_{s-1} dreht. Die Bewegung von Σ_s gegen Σ_0 mag in naheliegender Weise und in Anlehnung an den im Maschinenbau beim sog. „Planetengetriebe" verwirklichten Sonderfall $s = 2$ als „Planetenbewegung s^{ter} Stufe" bezeichnet werden. Voraussetzung ist dabei, daß alle Geschwindigkeiten verschieden sind.

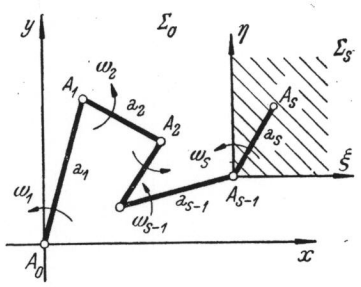

Abb. 1.

Zur mathematischen Beschreibung der Bewegung nehmen wir in Σ_0 ein ruhendes Normalkoordinatensystem x, y mit dem Ursprung in A_0 an, entsprechend in der bewegten Ebene Σ_s ein mit dieser verbundenes Achsenkreuz ξ, η mit dem Ursprung A_{s-1} (Abb. 1). Da wir uns vorläufig auf reelle Punkte beschränken, können wir jedes Koordinatenpaar zu einer komplexen Zahl zusammenfassen:

$$z = x + i\,y, \quad \zeta = \xi + i\,\eta \quad (i^2 = -1). \tag{1}$$

Durch diese Maßnahme wird eine bequeme Darstellung jeder Drehung und damit jeder Bewegung möglich.

Dreht sich nämlich der durch eine komplexe Zahl a gegebene Vektor um den Winkel α, dann wird seine neue Lage einfach durch $a' = a \cdot e^{i\alpha}$ dargestellt.[5]

Die Anfangslage der Drehpunkte A_ν kann mithin durch die von Null verschiedenen komplexen Konstanten a_1, $a_2 \ldots a_{s-1}$ gegeben werden, die den Vektoren $A_0 A_1$, $A_1 A_2 \ldots A_{s-2} A_{s-1}$ entsprechen. Ist schließlich t die Zeit, dann sind $\omega_\nu t$ die Drehwinkel der Vektoren a_ν und der mit ihnen verbundenen Ebenen Σ_ν, und die Bewegung von Σ_s wird beschrieben durch die Gleichung

$$z = a_1 \cdot e^{i\omega_1 t} + a_2 \cdot e^{i\omega_2 t} + \ldots + a_{s-1} \cdot e^{i\omega_{s-1} t} + \zeta \cdot e^{i\omega_s t}, \tag{2}$$

die die Lage eines beliebigen Punktes ζ von Σ_s für jeden Augenblick t in dem ruhenden System Σ_0 angibt. Vorausgesetzt ist, daß die Koordinatensysteme z und ζ in der Ausgangsstellung $t = 0$ zueinander parallel liegen. Unter Einführung des Drehwinkels $\varphi = \omega_s t$ und der Übersetzungen $m_\nu = \omega_\nu/\omega_s$ haben wir

$$z = \zeta \cdot e^{i\varphi} + \sum_{\nu=1}^{s-1} a_\nu\, e^{i m_\nu \varphi}. \tag{3}$$

[5] Dies ist eine Folge der Eulerschen Beziehung $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i \sin\alpha$. Sind nämlich r, φ die Polarkoordinaten des Vektors a, dann ist $a = r(\cos\varphi + i \sin\varphi) = r\,e^{i\varphi}$, und für den gedrehten Vektor r, $\varphi + \alpha$ gilt entsprechend $a' = r\,e^{i(\varphi+\alpha)} = r\,e^{i\varphi} \cdot e^{i\alpha} = a \cdot e^{i\alpha}$.

Auflösung nach ζ ergibt die Darstellung der umgekehrten (inversen) Bewegung

$$\zeta = z \cdot e^{-i\varphi} - \sum_{\nu=1}^{s-1} a_\nu \, e^{i m'_\nu \varphi} \qquad (m'_\nu = m_\nu - 1), \tag{4}$$

die natürlich auch eine Planetenbewegung, aber mit anderen Geschwindigkeitsverhältnissen ist.

3. Erzeugung der Radlinien.

Erteilen wir ζ einen festen Wert $a_s \neq 0$, dann stellt (2) eine Bahnkurve unserer Bewegung dar. Ihre komplexe Gleichung lautet in knapper Form

$$z = \sum_{\nu=1}^{s} a_\nu \, e^{i \omega_\nu t}. \tag{5}$$

Wir nennen sie eine „Radlinie s^{ter} Stufe“ und kennzeichnen sie im Bedarfsfall näher durch Angabe der Geschwindigkeitsverhältnisse $\omega_1 : \omega_2 : \ldots : \omega_s$; dieses Verhältnissystem soll die Sippencharakteristik der Radlinie heißen. Der Kürze zuliebe sprechen wir gelegentlich auch schlechtweg von einer „Radlinie $\omega_1 : \ldots : \omega_s$“.

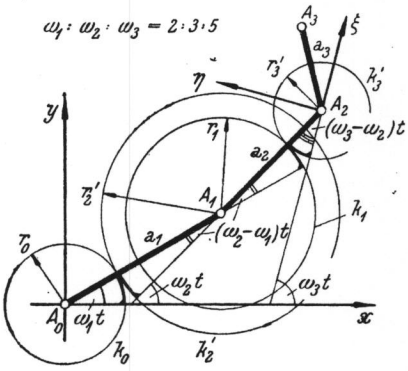

Abb. 2.

Konstantenzählung in (5) unter Berücksichtigung von Achsen- und Parameterverschiebungen lehrt, daß es in der Ebene ∞^{3s} Radlinien s^{ter} Stufe gibt, darunter je ∞^{2s+1} der gleichen Sippe und hierunter wiederum je ∞^{2s-3} gestaltlich verschiedene Formen.

Denken wir uns aufeinanderfolgende Drehpunkte durch Stäbe verbunden — als Materialisation der Systeme Σ_ν —, so erscheint die Radlinienbahn von A_s durch ein bewegliches Gelenkpolygon erzeugt, dessen Glieder a_ν sich mit konstanten Winkelgeschwindigkeiten ω_ν drehen. Der notwendige Zwanglauf kann durch Zahnräder erzielt werden, wie dies Abb. 2 für eine Planetenbewegung 3. Stufe illustriert.

In der Ebene Σ_0 ist ein festes Zahnrad mit dem Wälzkreis $k_0\,(A_0, r_0)$ angebracht, das mit einem Rad $k_2'\,(A_1, r_2')$ der Ebene Σ_2 kämmt; die beiden Radien sind durch die Forderungen

$$r_0 : r_2' = (\omega_2 - \omega_1) : \omega_1, \quad r_0 + r_2' = |a_1|$$

bestimmt. Ein mit k_2' konzentrisches Rad $k_1\,(A_1, r_1)$ ist mit Σ_1 fest verbunden und arbeitet mit einem Zahnrad $k_3'\,(A_2, r_3')$ zusammen; die Halbmesser sind durch

$$r_1 : r_3' = (\omega_3 - \omega_2) : (\omega_2 - \omega_1), \quad r_1 + r_3' = |a_2|$$

festgelegt. Wird nun a_1 mit der Winkelgeschwindigkeit ω_1 um A_0 herumgeführt, dann erhalten tatsächlich a_2 und a_3 die verlangten Geschwindigkeiten ω_2 und ω_3.

Auf diese Weise läßt sich jede höhere Planetenbewegung erzeugen. Allgemein gelten dabei für die Wälzkreisradien der beiden zusammenarbeitenden, an den Enden des Gliedes a_ν drehbar gelagerten und mit den Nachbargliedern starr verbundenen Räder die Beziehungen

$$r_{\nu-1} : r'_{\nu+1} = (\omega_{\nu+1} - \omega_\nu) : (\omega_\nu - \omega_{\nu-1}), \quad r_{\nu-1} + r'_{\nu+1} = |a_\nu| \tag{6}$$
$$(\nu = 1, 2 \ldots s-1; \quad \omega_0 = 0).$$

Für die technische Verwirklichung einer Planetenbewegung s^{ter} Stufe sind mithin $2\,(s-1)$ Zahnräder erforderlich. Hohlräder ($r < 0$) lassen sich durch Einschaltung eines Ritzels immer vermeiden. Unter Umständen ist es zweckmäßig, ein Mittelglied a_k festzuhalten und dafür das System Σ_0 beweglich zu gestalten; Σ_0 (Werkstisch!) führt

dann gegenüber Σ_k eine Planetenbewegung k^{ter} Stufe, Σ_s (Werkzeug!) eine solche $s - k^{\text{ter}}$ Stufe aus.

Vertauschen wir zwei oder mehrere Glieder des Gelenkpolygons unter Erhaltung von Richtung und Drehgeschwindigkeit (Umordnung der Vektorsumme!), so ist das auf die Bahn des Endpunktes ohne Einfluß, doch ändern sich gemäß (6) die Übersetzungen und Abmessungen der Zahnräder. Wir erkennen damit:

Satz 1. Jede Radlinie s^{ter} Stufe kann auf $s!$ verschiedene Arten durch ein zwangläufig bewegliches s-gliedriges Gelenkpolygon erzeugt werden.

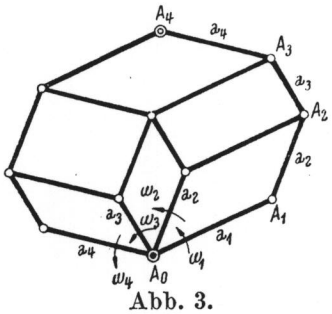

Abb. 3.

Eine andere Erzeugungsweise einer höheren Radlinie mit Hilfe eines Gelenkmechanismus von s^2 Gliedern veranschaulicht Abb. 3 für den Fall $s = 4$: Wir gehen wieder aus von dem Gelenkpolygon $A_0 A_1 \ldots A_s$ und lassen das erste Glied a_1 auf Null zusammenschrumpfen, hierauf in dem Restpolygon das Glied a_2 usw. Die bei den Schrumpfungsprozessen von den Gelenken durchlaufenen Wegstrecken a_1, a_2 usw. werden ebenfalls als Stäbe ausgebildet, womit wir zu einem Getriebe gelangen, das jeden der s Vektoren a_ν genau s-mal als Stab enthält. Treiben wir schließlich die in A_0 zusammenstoßenden Glieder a_ν mit den entsprechenden Winkelgeschwindigkeiten ω_ν an, so beschreibt das Ausgangspolygon zwangläufig die vorgeschriebene Bewegung und A_s die gewünschte Radlinie s^{ter} Stufe. — Dieser Mechanismus stellt eine Verallgemeinerung des von Bellermann[6] der Entstehung von niederen Radlinien zugrunde gelegten Gelenkparallelogramms dar.

Durch Vertauschung von Gliedern des Ausgangspolygons gelangen wir zu anderen Stabanordnungen.

4. Polbahnen.

Jede ebene Bewegung läßt sich bekanntlich auf das gleitungslose Rollen zweier bestimmter Kurven, der sog. Polbahnen, zurückführen.

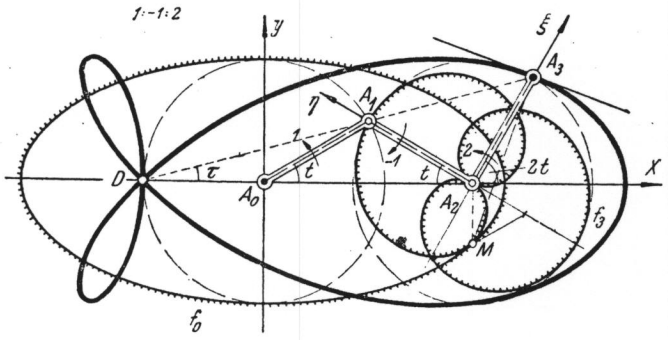

Abb. 4.

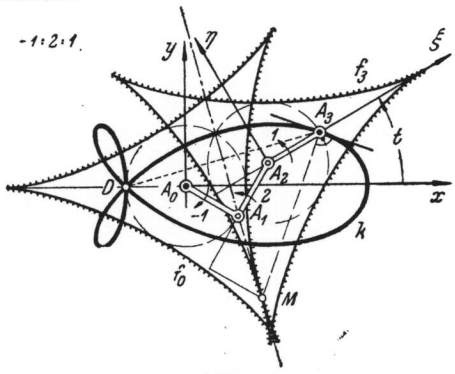

Abb. 5.

Zur Ermittlung der Polbahnen der Planetenbewegung von Σ_s gegen Σ_0 bedienen wir uns wieder der Darstellung (3). Wir fragen nach dem Momentanpol M zur Zeit t, d. h. nach jenem Punkt ζ, der bei der infinitesimalen Bewegung während des Zeitelementes dt in Ruhe bleibt, für welchen also die Geschwindigkeit

$$\dot{z} = \frac{dz}{dt} = \omega_s \frac{dz}{d\varphi} = \omega_s\, i \left(\zeta\, e^{i\varphi} + \sum_{\nu=1}^{s-1} a_\nu m_\nu e^{i m_\nu \varphi} \right)$$

[6] G. Bellermann: Epicykloiden und Hypocykloiden. Dissertation Jena. 1867.

verschwindet. Ausrechnung von ζ ergibt sofort den Ort von M in Σ_s, der bei variablem φ die Gleichung der Gangpolbahn f_s darstellt:

$$\zeta^* = -\sum_{\nu=1}^{s-1} a_\nu m_\nu e^{i m_\nu' \varphi}. \tag{7}$$

Durch Einsetzen in (3) oder entsprechend durch Nullsetzen der Ableitung von (4) erhalten wir den Ort von M in Σ_0, also bei veränderlichem φ die Rastpolbahn f_0

$$z^* = -\sum_{\nu=1}^{s-1} a_\nu m_\nu' e^{i m_\nu \varphi}. \tag{8}$$

Die infinitesimale Bewegung kann als Drehung um M aufgefaßt werden, und im Verlauf der Gesamtbewegung rollt f_s auf f_0 ab.

Beide Polbahnen sind offensichtlich Radlinien $s-1^{\text{ter}}$ Stufe, deren Sippencharakteristik aus den Gleichungen unmittelbar abgelesen werden kann.

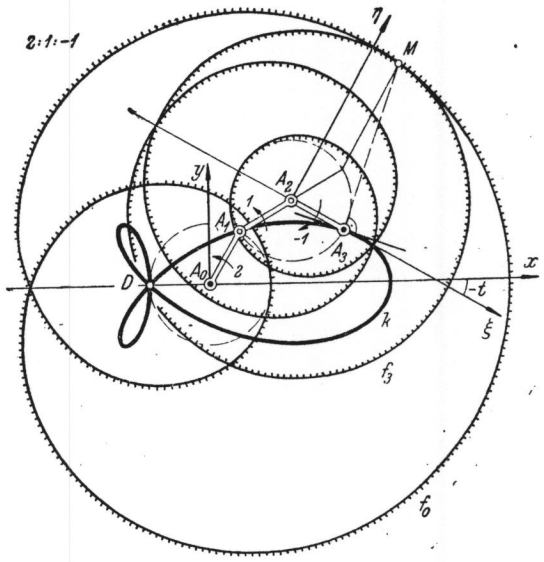

Abb. 6.

Satz 2. Die Polbahnen einer Planetenbewegung s^{ter} Stufe mit der Charakteristik $\omega_1 : \ldots : \omega_s$ sind Radlinien $s-1^{\text{ter}}$ Stufe. Die feststehende Rastpolbahn gehört der Sippe $\omega_1 : \ldots : \omega_{s-1}$ an, die auf ihr abrollende Gangpolbahn der Sippe $(\omega_1 - \omega_s) : \ldots : (\omega_{s-1} - \omega_s)$.

Betrachten wir eine bestimmte Radlinie $\zeta = a_s$ und erinnern wir uns, daß die Seiten des Gelenkpolygons $a_1 \ldots a_s$ beliebig vertauscht werden können, so erkennen wir, daß es im ganzen s verschiedene Bewegungen gibt, die dieselbe Bahnkurve erzeugen; sie unterscheiden sich nur durch das Endglied. Entsprechend gibt es hierzu s verschiedene Polbahnpaare.

Satz 3. Jede Radlinie s^{ter} Stufe kann auf s verschiedene Arten durch das Abrollen zweier Radlinien $s-1^{\text{ter}}$ Stufe erzeugt werden.

Hierin steckt die erwähnte doppelte Erzeugung der gewöhnlichen Radlinien ($s = 2$) durch Rollung von Kreisen (Radlinien 1. Stufe). — Jede Radlinie 3. Stufe hingegen entsteht auf dreifache Art beim Abrollen einer Trochoide oder Zykloide auf einer anderen.

Als Beispiel betrachten wir die durch die wohl einfachste Konstantenwahl $a_1 = a_2 = a_3 = 1$, $\omega_1 : \omega_2 : \omega_3 = 1 : -1 : 2$ erklärte Radlinie k. Aus ihrer komplexen Gleichung

$$z = e^{it} + e^{-it} + e^{2it} \tag{9}$$

fließt nach Trennung von Real- und Imaginärteil sofort die reelle Parameterdarstellung

$$x = 2\cos t + \cos 2t, \qquad y = \sin 2t.$$

Die als „gerades Dreiblatt" bekannte Kurve ist in Abb. 4 bis 6 in den drei möglichen Entstehungsarten dargestellt. Die Möglichkeiten sind die folgenden:

$1 : -1 : 2$. Auf der Ellipse $z^* = \frac{1}{2} e^{it} + \frac{3}{2} e^{-it}$ (Hypotrochoide $1 : -1$) rollt die zweiblättrige Rosenkurve $\zeta^* = -\frac{1}{2} e^{-it} + \frac{1}{2} e^{-3it}$ (Epitrochoide $1 : 3$).

$-1:2:1$. Die Polbahnen sind zwei kongruente Steinerzykloiden (Hypozykloiden $-1:2$) $z^* = 2e^{-it} - e^{2it}$ und $\zeta^* = e^{-2it} - 2e^{it}$, die stets spiegelbildlich zu ihrer Wälztangente liegen, was unmittelbar auf die übliche Definition des Dreiblattes als Fußpunktskurve einer Steinerzykloide führt (vgl. Abschn. 9).

$2:1:-1$. Auf einer Pascalschnecke $z^* = 3e^{2it} + 2e^{it}$ (Epitrochoide $1:2$) rollt eine Epitrochoide $2:3$ ($\zeta^* = 2e^{3it} + e^{2it}$).

5. Algebraische Radlinien.

Bei der Erzeugung der Radlinien durch Zahnradgetriebe sind alle Geschwindigkeitsverhältnisse notwendig rational; die Geschwindigkeiten ω_ν selbst dürfen wir unter diesen Umständen als ganze und teilerfremde Zahlen voraussetzen. Der Zeitparameter t kann sodann auf ein Intervall von der Länge 2π beschränkt werden, denn die Funktion $z(t)$ besitzt diese Periode. Die Radlinien sind in diesem Fall geschlossen und algebraisch.

Zur Feststellung der algebraischen Charaktere einer solchen Radliniensippe fassen wir den Übergang (1) von den Koordinaten x, y zur komplexen Größe z durch Hinzunahme der konjugiert-komplexen Größe $\bar{z} = x - iy$ als (lineare) Koordinatentransformation $x, y \to z, \bar{z}$ auf. Diese sog. „Minimalkoordinaten" haben sich vielfach bewährt, speziell auch in der ebenen Kinematik, finden aber noch immer nicht die gebührende Beachtung.[7] — Es sei erwähnt, daß wir jetzt auch die komplexen Punkte der Ebene beherrschen, wenn wir für z und $\bar{z}$ auch nichtkonjugierte Zahlenpaare zulassen.

Nach Einführung des algebraischen Parameters $u = e^{it}$ ($\bar{u} = 1/u$) lautet die nun durchaus rationale Parameterdarstellung der Radlinie (5) in Minimalkoordinaten

$$z = \sum_{\nu=1}^{s} a_\nu u^{\omega_\nu}, \qquad \bar{z} = \sum_{\nu=1}^{s} \bar{a}_\nu u^{-\omega_\nu}. \tag{10}$$

Algebraische Radlinien sind mithin rational (vom Geschlecht Null).

Zur Ermittlung der Ordnung N haben wir die Schnittpunkte mit einer allgemeinen Geraden abzuzählen. Da letztere durch eine lineare Gleichung in z und $\bar{z}$ dargestellt wird, gelangen wir nach Einsetzung der Ausdrücke (10) zu einer algebraischen Gleichung in u, deren Grad wegen $a_\nu \neq 0$ durch

$$N = 2 \max |\omega_\nu| \tag{11}$$

gegeben ist.

Zur Bestimmung der Klasse M sind die durch einen allgemeinen Punkt $(p, \bar{p})$ der Ebene laufenden Tangenten der Radlinie abzuzählen. Die Bedingung hierfür lautet

$$(p - z) : (\bar{p} - \bar{z}) = \dot{z} : \dot{\bar{z}} \quad \text{oder} \quad \bar{p}\,\dot{z} - p\,\dot{\bar{z}} = \bar{z}\,\dot{z} - z\,\dot{\bar{z}},$$

was nach Einführung von (10) auf

$$\sum_{\nu=1}^{s} \omega_\nu (p\, a_\nu u^{\omega_\nu} + p\, \bar{a}_\nu u^{-\omega_\nu}) = \sum_{\mu=1}^{s} \sum_{\nu=1}^{s} a_\mu \bar{a}_\nu (\omega_\mu + \omega_\nu) u^{\omega_\mu - \omega_\nu} \tag{12}$$

führt. Im allgemeinen stimmt die gesuchte Klasse mit dem Grad dieser Gleichung überein:

$$M = \max_{\omega_\mu + \omega_\nu \neq 0} (2|\omega_\nu|, |\omega_\mu - \omega_\nu|). \tag{13}$$

[7] Zur Untersuchung der niederen Radlinien wurden Minimalkoordinaten bzw. die komplexe Zahlenebene herangezogen von F. Morley, Amer. J. Math. **16** (1894) und F. Schilling, Z. Math. Physik **44** (1899), zum Studium der ebenen Bewegung von R. Mehmke, Z. Math. Physik **35** (1890) und in neuerer Zeit von E. Hackmüller, Z. angew. Math. Mech. **18** (1938), insbesondere für die Koppelkurve von A. Haarbleicher, J. éc. pol. II **31** (1933).

Jene Paare ω_μ, ω_ν, deren Summe verschwindet, sind auszuschließen, da ihr Beitrag auf der rechten Seite von (12) wegfällt.

Es kann vorkommen, daß für einen bestimmten Parameterwert u_0 sowohl $\dot{z}$ als auch $\dot{\bar{z}}$ verschwindet, nämlich dann, wenn ein Rückkehrpunkt vorliegt. Gl. (12) gestattet dann die Abspaltung des Wurzelfaktors $u - u_0$ und die Klasse erniedrigt sich um 1.

Satz 4. Eine algebraische Radlinie der Sippe $\omega_1 : \ldots : \omega_s$ (ω_ν ganz und teilerfremd[8]) hat die Ordnung $N = 2 \max |\omega_\nu|$ und im allgemeinen die Klasse $M = 2 \max (|\omega_\nu|, |\omega_\mu - \omega_\nu|)$. Bei der Bestimmung der Klasse sind gegengleiche Paare ω_μ, ω_ν auszuschalten, ferner für jede auftretende endliche Spitze 1 in Abzug zu bringen.

Zur Klärung der Verhältnisse im Unendlichen wird man mittels

$$z = Z_1/Z_0, \quad \bar{z} = Z_2/Z_0 \quad \text{und} \quad u = u_1/u_0 \tag{14}$$

homogene Koordinaten und Parameter einführen. Durch Umnumerierung der Winkelgeschwindigkeiten und allfälligen Vorzeichenwechsel können wir erreichen, daß ω_1 den größten vorhandenen Betrag hat (zumindest von keinem anderen Betrag übertroffen wird) und positiv ist. Dann sind in der aus (10) fließenden Darstellung der Radlinie

$$Z_0 : Z_1 : Z_2 = u_1^{\omega_1} u_0^{\omega_1} : \sum_{\nu=1}^{s} a_\nu u_1^{\omega_1 + \omega_\nu} u_0^{\omega_1 - \omega_\nu} : \sum_{\nu=1}^{s} \bar{a}_\nu u_1^{\omega_1 - \omega_\nu} u_0^{\omega_1 + \omega_\nu} \tag{15}$$

keine negativen Exponenten vorhanden. Die Ordnung ist $N = 2\,\omega_1$.

Der Schnitt mit der Ferngeraden $Z_0 = 0$ verteilt sich auf die beiden Punkte $u_1 = 0$ und $u_0 = 0$, je ω_1-fach gezählt. Die Lage dieser Punkte hängt aber noch vom Wert der kleinsten Winkelgeschwindigkeit ab, die mit ω_2 bezeichnet sei. Wir haben zwei Hauptfälle zu unterscheiden, je nachdem ob $\omega_1 + \omega_2$ von Null verschieden ist oder nicht.

I. $\omega_1 + \omega_2 \neq 0$. „Zirkulare Radlinien".

Dem Wert $u_1 = 0$ entspricht der Kreispunkt $0 : 0 : 1$; die durch die niedrigsten Potenzen von u_1 in (15) bestimmte Näherung daselbst lautet

$$Z_0 : Z_1 : Z_2 = u^{\omega_1} : a_2\, u^{\omega_1 + \omega_2} : \bar{a}_1. \tag{16}$$

Wir haben daher nach dem Vorzeichen von ω_2 zu unterteilen:

I a. $\omega_2 > 0$. Die absoluten Kreispunkte sind ω_1-fache Punkte der Radlinie; die Tangenten fallen in den Minimalgeraden $x \pm i\,y = 0$ zusammen. — Für $s = 2$ erhält man die Epitrochoiden, so daß man allgemein von „Außenradlinien" sprechen könnte.

I b. $\omega_2 < 0$. Die absoluten Kreispunkte sind $(\omega_1 + \omega_2)$-fache Punkte der Radlinie mit der Ferngeraden als gemeinsamer Tangente. — Für $s = 2$ erhält man die Hypotrochoiden, so daß man allgemein von „Innenradlinien" sprechen könnte.

II. $\omega_1 + \omega_2 = 0$. Die Radlinien sind nicht zirkular, sondern gehen wegen (16) durch die Fernpunkte $0 : a_2 : \bar{a}_1$ und $0 : a_1 : \bar{a}_2$. Dieselben fallen zusammen, wenn die Determinante $\Delta = a_1 \bar{a}_1 - a_2 \bar{a}_2$ verschwindet.

II a. $\Delta \neq 0$. „Elliptische Radlinien". Die Fernpunkte sind konjugiert-komplex und lassen sich durch die lineare Transformation $\zeta = \bar{a}_1 z - a_2 \bar{z}$ in die absoluten Kreispunkte überführen. Die elliptischen Radlinien sind daher affin zu den zirkularen.

II b. $\Delta = 0$. „Parabolische Radlinien". Die Fernpunkte fallen in der Richtung des Vektors $z = a_1 + a_2$ zusammen. Dieser Punkt ist im allgemeinen eine isolierte Singularität mit in der Ferngeraden zusammenfallenden Tangenten; in Ausnahmefällen können sich aber auch reelle parasitische Kurvenzweige dorthin erstrecken.

[8] Enthalten die ω_ν den größten gemeinsamen Teiler q, dann ist die Radlinie q-fach überdeckt.

Anwendung auf das Beispiel des geraden Dreiblattes (9) kennzeichnet dasselbe als zirkulare (Innen-) Radlinie 4. Ordnung und 6. Klasse, die die Ferngerade als Doppeltangente besitzt.

Die folgenden, leicht einzusehenden Sätze betreffen Fragen der Symmetrie:

Satz 5. Sind in der komplexen Gleichung (5) einer Radlinie alle a_ν reell (rein imaginär), dann ist die Kurve symmetrisch zur reellen (imaginären) Zahlenachse.

Satz 6. Eine Radlinie weist dann und nur dann eine q-zählige Drehsymmetrie auf, wenn die teilerfremden ω_ν einer arithmetischen Reihe mit der Differenz q entnommen sind.

Hieraus geht u. a. hervor, daß alle Trochoiden $\omega_1 : \omega_2$ eine $|\omega_1 - \omega_2|$-zählige Symmetrie besitzen.

6. Hüllbahnen von Geraden.

Nach weitgehender Klärung der bei einer Planetenbewegung entstehenden Punktbahnen wollen wir jetzt die Hüllkurven von mitgenommenen Geraden untersuchen.

Wir denken uns also mit der bewegten Ebene Σ_s eine Gerade g starr verbunden (Abb. 7). Sie sei in dem der Ebene aufgeprägten ζ-System durch einen Richtungsvektor A von Einheitsbetrag ($A = e^{i\alpha}$) und durch den orientierten Ursprungsabstand p festgelegt; p werde dann positiv gezählt, wenn die im Sinn von A gerichtete Gerade im positiven Sinn um den Nullpunkt A_{s-1} dreht. Nun wird g mittels eines reellen Längenparameters $\lambda = \bar{\lambda}$ dargestellt durch $\zeta = -A + A\,\lambda$. Hinzunahme der konjugierten Beziehung und Elimination von λ führt bei Beachtung von $A\,\bar{A} = 1$ auf die Gleichung in Minimalkoordinaten

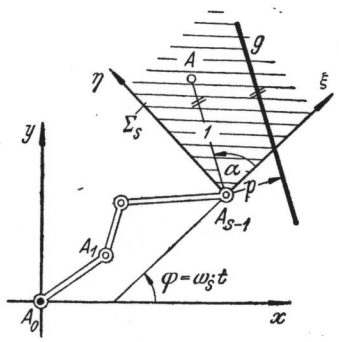

Abb. 7.

$$\bar{A}\,\zeta - A\,\bar{\zeta} + 2\,p\,i = 0. \qquad (17)$$

Die Gleichung im festen z-System entsteht daraus durch Einsetzen von (4):

$$\bar{A}\,z\cdot e^{-i\varphi} - A\,z\cdot e^{i\varphi} = -2\,p\,i + \sum_{\nu=1}^{s-1}(\bar{A}\,a_\nu\,e^{i\,m_\nu'\varphi} - A\,\bar{a}_\nu\,e^{-i\,m_\nu'\varphi}). \qquad (18)$$

Zwecks Ermittlung der Hüllkurve ist (18) nach φ zu differenzieren:

$$\bar{A}\,z\cdot e^{-i\varphi} + A\,\bar{z}\cdot e^{i\varphi} = -\sum_{\nu=1}^{s-1}(\bar{A}\,a_\nu\,m_\nu'\,e^{i\,m_\nu'\varphi} + A\,\bar{a}_\nu\,m_\nu'\,e^{-i\,m_\nu'\varphi}). \qquad (19)$$

Damit haben wir die Gleichung einer Geraden $\dot{g}$, die g im Berührungspunkt mit der gesuchten Hüllkurve l schneidet; da ihre Richtung zu g senkrecht ist, ist $\dot{g}$ die Normale von l.

Rechnen wir z aus dem Gleichungspaar (18), (19) aus (Addition!), so erhalten wir unmittelbar die komplexe Darstellung der Hüllkurve

$$z = -A\,p\,i\cdot e^{i\varphi} - \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{s-1}(a_\nu\,m_\nu''\,e^{i\,m_\nu\varphi} + A^2\,\bar{a}_\nu\,m_\nu\,e^{-i\,m_\nu'\varphi}); \qquad (20)$$

hierin ist abkürzend $m_\nu'' = m_\nu' - 1 = m_\nu - 2$ gesetzt.

Aus der Bauart der Gleichung ersehen wir, daß es sich wieder um eine Radlinie handelt. Sie ist im allgemeinen — d. h. wenn alle Exponenten verschieden sind und keiner verschwindet — von $2\,s - 1^{\text{ter}}$ Stufe und gehört der Sippe $\omega_1 : \ldots : \omega_{s-1} : : \omega_s : (2\,\omega_s - \omega_1) : \ldots : (2\,\omega_s - \omega_{s-1})$ an. Denken wir uns die ω_ν auf einer Zahlengeraden markiert, so besteht die Sippencharakteristik der Hüllkurve aus jener der erzeugenden Planetenbewegung, vermehrt um das Spiegelbild an ω_s. Wegen $\omega_s \neq 0$

haben die größte und die kleinste Winkelgeschwindigkeit verschiedene Beträge und die Radlinie ist stets zirkular.

Die anschauliche Übersicht läßt uns auch gewisse Fälle von Stufenreduktionen erkennen. Ist etwa ein Paar ω_μ, ω_ν von vornherein symmetrisch zu ω_s, dann erzeugt es bei der Spiegelung kein neues und die Stufe fällt um 2 niedriger aus. Die zugehörigen Glieder in der Gl. (20) lassen sich zusammenziehen zu

$$\frac{1}{2} m_\nu (a_\mu - A^2 \bar{a}_\nu) e^{i m_\mu \varphi} + \frac{1}{2} m_\mu (a_\nu - A^2 \bar{a}_\mu) e^{i m_\nu \varphi}. \tag{21}$$

Da die beiden Klammern bis auf einen Faktor konjugiert sind, können sie nur gleichzeitig verschwinden; dies ist in der Tat für gewisse Richtungen möglich, falls die Glieder a_μ und a_ν gleiche Länge haben; die Stufe sinkt dann neuerlich um 2. — Kommt schließlich etwa die Geschwindigkeit $\omega_\lambda = 2\,\omega_s$ vor, so ist der zugehörige Spiegelpunkt die Null; da aber gleichzeitig der Faktor m_λ'' verschwindet, sinkt die Hüllkurvenstufe ebenfalls um 2. — Die einzige ungerade Stufenreduktion bringt $p = 0$ mit sich: Für Geraden durch A_{s-1} vermindert sich die Stufe um 1. — Wir fassen zusammen:

Satz 7. Die Hüllbahn einer Geraden, welche einer Planetenbewegung s^{ter} Stufe $\omega_1 : \ldots : \omega_s$ unterworfen wird, ist im allgemeinen eine zirkulare Radlinie $2\,s - 1^{\text{ter}}$ Stufe $\omega_1 : \ldots : \omega_s : (2\,\omega_s - \omega_1) : \ldots : (2\,\omega_s - \omega_{s-1})$. Für Geraden durch den Drehpunkt A_{s-1} der bewegten Ebene Σ_s erniedrigt sich die Stufe um 1 (ω_s entfällt). Ist eine Geschwindigkeit $\omega_\lambda = 2\,\omega_s$ vorhanden, dann sinkt die Hüllkurvenstufe um 2, ebenso für jedes Paar $\omega_\mu + \omega_\nu = 2\,\omega_s$; in diesem Fall kann für Geraden einer bestimmten Richtung eine weitere Reduktion um 2 eintreten, wenn $|a_\mu| = |a_\nu|$.

In Anlehnung an den Fall $s = 2$, $p = 0$, der die Zykloiden liefert (Abschn. 1), nennen wir nun die als Hüllkurven von Geraden erzeugbaren Radlinien „zykloidale". Im Bedarfsfall unterscheiden wir dabei zykloidale Radlinien „im engeren Sinn" für $p = 0$ und solche „im weiteren Sinn" für $p \neq 0$. Letztere sind die Parallelkurven der ersteren und haben zufolge der nur um gerade Beträge erfolgenden Stufenreduktion immer eine ungerade Stufe, während zykloidale Radlinien im engeren Sinn immer von gerader Stufe sind. — Wir werden in den folgenden Abschnitten sehen, daß sich diese Unterfamilie von den allgemeinen Radlinien durch ähnliche ausgezeichnete Eigenschaften abhebt wie die Zykloiden von den Trochoiden.

Es erheben sich sogleich zwei wichtige, eng miteinander zusammenhängende Fragen: Woran erkennt man eine zykloidale Radlinie und wie findet man eine Planetenbewegung, bei der sie als Hüllbahn entsteht?

Nach dem Gesagten müssen die in der Radliniengleichung auftretenden Winkelgeschwindigkeiten auf der Zahlengeraden eine symmetrische Punktgruppe bilden, d. h. sie müssen sich in Paare ω_ν, ω_ν' mit gleicher, nichtverschwindender Summe aufteilen lassen; bei ungerader Stufe muß die übrigbleibende Geschwindigkeit ω_s gleich der halben Summe sein. Wir können die komplexe Darstellung also in der Form

$$z = b_s e^{i \omega_s t} + \sum_{\nu=1}^{s-1} (b_\nu e^{i \omega_\nu t} + b_\nu' e^{i \omega_\nu' t}) \quad \text{mit } \omega_\nu + \omega_\nu' = 2\,\omega_s \neq 0 \tag{22}$$

voraussetzen und müssen trachten, sie in die Gestalt (20) überzuführen. Der Koeffizientenvergleich liefert folgende Bestimmungsgleichungen für A, p und die a_ν:

$$A\,p\,i = -b_s, \quad a_\nu \frac{\omega_\nu'}{\omega_s} = 2\,b_\nu, \quad A^2 \bar{a}_\nu \frac{\omega_\nu}{\omega_s} = -2\,b_\nu'. \tag{23}$$

Bei der Auflösung unterscheiden wir am besten zwischen ungerader und gerader Stufe.

I. $b_s \neq 0$. (Zykloidale Radlinien im weiteren Sinne)

$$p = |b_s|, \quad A = \frac{b_s\, i}{|b_s|}, \quad a_\nu = 2\, b_\nu \frac{\omega_s}{\omega_\nu'} = 2\, \bar{b}_\nu' \frac{\omega_s}{\omega_\nu} \cdot \frac{b_s}{\bar{b}_s}. \tag{24}$$

Damit die beiden für a_ν gefundenen Ausdrücke auch übereinstimmen, müssen die entsprechenden „Verträglichkeitsbedingungen“

$$\omega_\nu\, b_\nu\, \bar{b}_s = \omega_\nu'\, \bar{b}_\nu'\, b_s \tag{25}$$

erfüllt sein. Die Annahme $p = -|b_s|$ bringt nichts Neues.

II. $b_s = 0$. (Zykloidale Radlinien im engeren Sinne)

$$p = 0, \quad a_\nu = 2\, b_\nu \frac{\omega_s}{\omega_\nu'}, \quad A^2 = -\frac{b_\nu'\, \omega_\nu'}{\bar{b}_\nu\, \omega_\nu}. \tag{26}$$

Die „Verträglichkeitsbedingungen“ bestehen hier darin, daß die für A^2 angegebenen Ausdrücke gleich ausfallen und Einheitsbetrag haben.

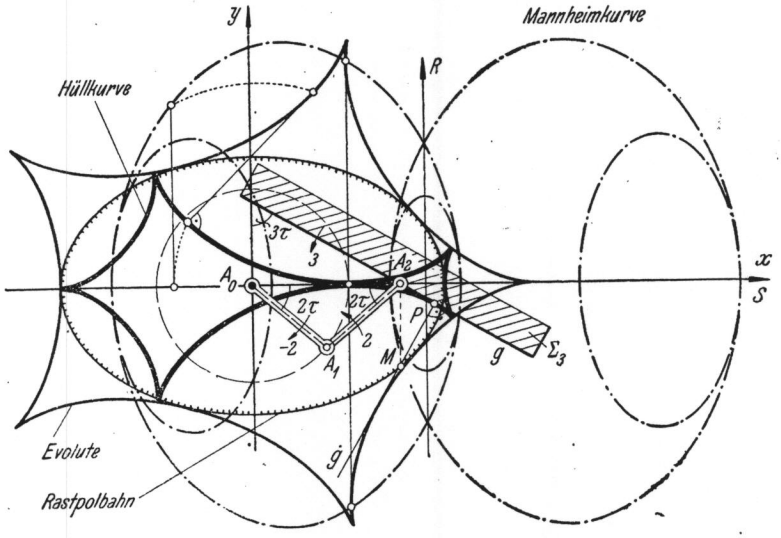

Abb. 8.

Bei der Aufteilung der Winkelgeschwindigkeiten auf zu ω_s symmetrische Paare ω_ν, ω_ν' ist noch eine gewisse Willkür offengelassen, da die Elemente eines Paares vertauscht werden können. Auf die zugehörige Verträglichkeitsbedingung hat dies keinen Einfluß, da sie lediglich in die konjugierte übergeht. Da bei den $s-1$ Paaren im ganzen 2^{s-1} derartige Vertauschungen vorgenommen werden können, kann die Radlinie auf ebensoviele verschiedene Arten als Hüllbahn entstehen. Jede Vertauschung äußert sich in der Darstellung (20) als Platzwechsel entsprechender Glieder in einer Klammer; die betroffene Bewegungskomponente $a_\nu\, e^{i\, m_\nu \varphi}$ geht dabei in eine neue $-A^2\, \bar{a}_\nu\, e^{-i\, m_\nu'' \varphi}$ über.

Im Hinblick auf die Möglichkeiten einer Stufenreduktion ist es klar, daß dieselbe Radlinie auch noch auf unendlich viele Arten durch Planetenbewegungen höherer als s^{ter} Stufe erzeugbar ist; naturgemäß gilt aber das Interesse vor allem der Minimalstufe.

Satz 8. Eine Radlinie $2s-1^{\text{ter}}$ bzw. $2s-2^{\text{ter}}$ Stufe ist zykloidal, wenn die Werte der Winkelgeschwindigkeiten auf der Zahlengeraden durch eine symmetrische Punktgruppe dargestellt werden und überdies für das Gelenkpolygon gewisse Verträglichkeitsbedingungen (25) bzw. (26) erfüllt sind.

Die Radlinie ist dann auf 2^{s-1} Arten als Hüllkurve einer Geraden erzeugbar, die einer Planetenbewegung s^{ter} Stufe unterworfen wird. Im zweiten Fall — Radlinienstufe gerade — geht die Gerade durch den Drehpunkt der bewegten Ebene, sonst nicht.

Als Beispiel betrachten wir die zirkulare Radlinie 4. Stufe der Sippe $-1:1:2:4$

$$z = 4\,e^{-it} + 2\,e^{it} + e^{2it} - e^{4it}, \tag{27}$$

deren Winkelgeschwindigkeiten die verlangte Symmetrie aufweisen; der Mittelwert ist 3/2. Um Brüche zu vermeiden, verdoppeln wir alle Geschwindigkeiten, was der Einführung des neuen Parameters $\tau = t/2$ gleichkommt. Die Aufspaltung

$$\begin{array}{llllll} \omega_1 = -2, & \omega_1' = 8; & \omega_2 = 2, & \omega_2' = 4; & \omega_3 = 3 \\ b_1 = 4, & b_1' = -1; & b_2 = 2, & b_2' = 1; & b_3 = 0 \end{array}$$

führt gemäß (26) zu den Daten

$$p = 0, \quad a_1 = a_2 = 3, \quad A = \pm i.$$

Da die Verträglichkeitsbedingung erfüllt ist, ist die vorgelegte Radlinie tatsächlich zykloidal und sie entsteht als Hüllkurve der η-Achse bei der Planetenbewegung 3. Stufe $-2:2:3$

$$z = 3\,e^{-2i\tau} + 3\,e^{2i\tau} + \zeta \cdot e^{3i\tau}. \tag{28}$$

Die Bewegung ist gemäß Abb. 8 einfach herzustellen: Der Drehpunkt A_2 vollführt eine harmonische Schwingung, während die Ebene Σ_3 mit anderthalbfacher Frequenz gleichförmig um ihn rotiert. — Der Berührungspunkt einer Lage von g mit der Hüllkurve ist der Fußpunkt des aus dem Momentanpol M auf g gefällten Lotes $\dot{g}$ (vgl. Abschn. 4 und 10). Der Ort der Pole — die Rastpolbahn f_0 — wird gemäß (8) durch $z^* = 5\,e^{-2i\tau} + e^{2i\tau}$ dargestellt und ist eine Ellipse.

Die anderen drei Planetenbewegungen, die die Kurve (27) als Hüllbahn erzeugen, gehen aus (28) durch die wahlweisen Vertauschungen $3\,e^{-2i\tau} \to 3\,e^{8i\tau}$ und $3\,e^{2i\tau} \to 3\,e^{4i\tau}$ hervor. Es ist hervorzuheben, daß — der vorgenommenen Geschwindigkeitsverdopplung entsprechend — in allen Fällen die umhüllte Radlinie doppelt überdeckt erscheint.

7. Evoluten und Evolventen. Rektifikation.

Aus dem Vergleich der Gl. (18) und (19) von g und $\dot{g}$ erkennen wir, daß auch die Kurvennormale $\dot{g}$ einer gewissen Planetenbewegung unterworfen ist. Hieraus folgt, daß die Evolute der Hüllkurve l von g so wie diese selbst eine zykloidale Radlinie ist. Daß dieser Satz allgemeiner auch für die Evolutoiden von l gilt, ist unschwer zu beweisen.[9]

Wir denken uns die Tangente g um ihren Berührungspunkt um den Winkel β in die Lage g' gedreht. Setzen wir $e^{i\beta} = B$, so hat g' die Richtung AB und in Anlehnung an (18) eine Gleichung von der Bauart

$$\bar{A}\,\bar{B}\,z \cdot e^{-i\varphi} - A\,B\,\bar{z} \cdot e^{i\varphi} = C(\varphi),$$

wobei sich der Wert von C durch Einsetzen des Berührungspunktes z gemäß (20) errechnet. Wir finden so

$$\bar{A}\,\bar{B}\,z\,e^{i\varphi} - A\,B\,\bar{z}\,e^{i\varphi} = -(B + \bar{B})\,p\,i + \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{s-1}[\bar{A}\,a_\nu\,(B\,m_\nu - \bar{B}\,m_\nu'')\,e^{i m_\nu' \varphi} - A\,\bar{a}_\nu\,(\bar{B}\,m_\nu - B\,m_\nu'')\,e^{-i m_\nu' \varphi}]. \tag{29}$$

Der Aufbau entspricht durchaus jenem der Gl. (18), so daß auch g' einer gewissen Planetenbewegung unterworfen ist. Schnitt von g' mit der durch Ableitung nach φ berechneten Evolutoidennormalen $\dot{g}'$ liefert dann schließlich die eingehüllte Evolutoide

[9] Zieht man durch die Punkte einer Kurve Strahlen, welche mit den Tangenten einen festen Winkel β einschließen, so hüllen diese eine ihrer „Evolutoiden" ein, unter denen sich für $\beta = \pi/2$ die Evolute befindet.

$$z = -\frac{1}{2} A\,(1 + B^2)\,p\,i \cdot e^{i\varphi} + \frac{1}{4}\sum_{\nu=1}^{s-1} [a_\nu\, m_\nu''\,(m_\nu'' - B^2\, m_\nu)\, e^{i\, m_\nu \varphi} - \\ - A^2\, \bar{a}_\nu\, m_\nu\,(m_\nu - B^2\, m_\nu'')\, e^{-i\, m_\nu'' \varphi}]. \tag{30}$$

Dieselbe unterscheidet sich nicht wesentlich von der Grundkurve: Es ist im allgemeinen eine Radlinie gleicher Stufe und Sippe — als Hüllbahn sicherlich zykloidal — und fällt für $\beta = 0$ mit ihr zusammen. Lediglich bei der Evolute $\hat{l}$ ($\beta = \pi/2$, $B = i$) verschwindet das bei zykloidalen Radlinien im weiteren Sinn vorhanden gewesene erste Glied; die Evolute ist mithin stets eine zykloidale Radlinie im engeren Sinn, die Evolutoiden hingegen nur bei ebensolchen Grundkurven ($p = 0$). Dieses Verhalten wird ohne weiteres verständlich, wenn man bedenkt, daß die zykloidalen Radlinien im weiteren Sinn Parallelkurven einer zykloidalen Radlinie im engeren Sinn sind. Die Schar der Parallelkurven von l stellt die Evolventen von $\hat{l}$ dar.

Satz 9. Die Evoluten und die Evolutoiden einer zykloidalen Radlinie im engeren Sinn sind gleichartige Kurven derselben Sippe. Die Evolventen sind im allgemeinen zykloidale Radlinien im weiteren Sinn mit um 1 höherer Stufe.

Satz 10. Die Evolutoiden einer zykloidalen Radlinie im weiteren Sinn sind gleichartige Kurven derselben Sippe. Die Evolute ist eine zykloidale Radlinie im engeren Sinn mit um 1 niedrigerer Stufe. — Die Evolventen sind keine Radlinien.

Die letzte Behauptung stützt sich auf die Tatsache, daß die Evolute (30) wegen $B^2 = -1$ niemals eine zykloidale Radlinie im weiteren Sinn sein kann.

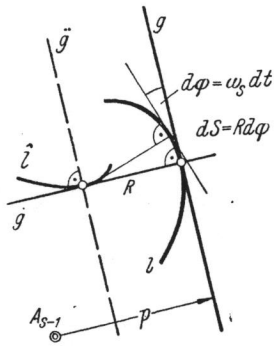

Abb. 9.

Auf Grund der dargelegten Verhältnisse ist zu erwarten, daß sich die Rektifikation der zykloidalen Radlinien elementar durchführen läßt. — Wie aus Abb. 9 hervorgeht, ist das Bogendifferential dS proportional dem Krümmungsradius R und dieser wieder ergibt sich als Abstand zwischen Tangente g und Evolutennormale $\ddot{g}$.

Subtraktion der Tangentengleichung (18) von der durch zweimalige Differentiation daraus hervorgehenden Gleichung von $\ddot{g}$

$$\bar{A}\, z \cdot e^{-i\varphi} - A\, \bar{z} \cdot e^{i\varphi} = \sum_{\nu=1}^{s-1} m_\nu'^{\,2}\,(\bar{A}\, a_\nu\, e^{i\, m_\nu' \varphi} - A\, \bar{a}_\nu\, e^{-i\, m_\nu' \varphi}) \tag{31}$$

führt dann sofort auf

$$R = p - \frac{i}{2}\sum_{\nu=1}^{s-1} m_\nu\, m_\nu''\,(\bar{A}\, a_\nu\, e^{i\, m_\nu' \varphi} - A\, \bar{a}_\nu\, e^{i\, m_\nu' \varphi}) \tag{32}$$

und Integration von 0 bis φ gibt den zugehörigen Bogen

$$S = p\,\varphi - \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{s-1} \frac{m_\nu\, m_\nu''}{m_\nu'} [\bar{A}\, a_\nu\,(e^{i\, m_\nu' \varphi} - 1) + A\, \bar{a}_\nu\,(e^{-i\, m_\nu' \varphi} - 1)]. \tag{33}$$

Da die beiden Summanden konjugiert-komplex sind, fällt der Bogen reell aus, wie es sein muß, und läßt sich durch die Funktionen sin und cos elementar ausdrücken.

Wir erkennen, daß für $p \neq 0$ die Bogenlänge mit steigendem φ über alle Grenzen wächst. Das bedeutet in Ergänzung zu Satz 10, daß die Evolventen der zykloidalen Radlinien im weiteren Sinn stets transzendente Kurven sein müssen.

Für $p = 0$ ist die Bogenlänge jedoch eine periodische Funktion von φ. Deutet man R und S als Normalkoordinaten, so erhält man die der Grundkurve zugeordnete sog. Mannheimsche Kurve. Diese stellt den Ort der Krümmungsmittelpunkte für die

geradegestreckte Grundkurve dar, wenn man sich deren Linienelemente mit den Krümmungsradien starr verbunden denkt.[10] Wir gelangen hier — wie aus der komplexen Darstellung $S + i\,R$ ohne weiteres ersichtlich ist — zu einer Radlinie, und zwar einer elliptischen, da jeder Exponent mit beiden Vorzeichen aufscheint.

Die nach Elimination von φ aus (32) und (33) verbleibende Beziehung $F(R, S) = 0$ ist die natürliche Gleichung der Grundkurve im Sinne von Cesàro. Es ist außerordentlich bemerkenswert, daß sie für algebraische Radlinien algebraisch ausfällt, da auch die durch sie dargestellte Mannheimkurve eine algebraische Radlinie ist.

Satz 11. Jede algebraische zykloidale Radlinie im engeren Sinn hat eine algebraische natürliche Gleichung. Ihre Mannheimkurve ist eine elliptische Radlinie.

Nebenbei bemerkt, ergeben sich auch die in diesen Fragenkreis gehörige „Radiale“[11] und die „Arcuiden“[12] als Radlinien.

Die Auflösung der Gleichung $R = 0$ führt auf die Spitzen der zykloidalen Radlinie. Gehen wir in (32) zunächst wieder von φ und den m_ν auf t und die ω_ν zurück und führen wir dann wie in Abschn. 5 den algebraischen Parameter $u = e^{i\,t}$ ein, so erhalten wir eine algebraische Gleichung, deren Grad

$$Q = 2 \max |\omega_\nu - \omega_s| \tag{34}$$

die Anzahl der Spitzen angibt. Gleichzeitig ist dies die Anzahl der Scheitel, die ja durch die analog gebaute Gleichung $\dot{R} = 0$ gekennzeichnet sind und die Stellen mit stationärem Krümmungskreis darstellen. Ferner läßt sich noch zeigen, daß Q die Anzahl der Stellen ist, in welchen die Hüllbahn der Geraden g von den Bahnkurven der auf g gelegenen Punkte — die ja dieselbe Hülle haben — berührt wird.

Während die Formel (11) für die Ordnung ohne weiteres anwendbar ist und bei Hüllbahnen auf Grund ihrer Charakteristik den Ausdruck

$$N' = 2 \max (|\omega_\nu|, |2\,\omega_s - \omega_\nu|) = 2 (|\omega_s| + \max |\omega_\nu - \omega_s|) \tag{35}$$

liefert, muß bei der Bestimmung der Klasse gemäß Satz 4 die Anzahl Q der Spitzen berücksichtigt werden. Schneller kommen wir aber direkt zum Ziel, wenn wir fragen, wie oft die Tangente g, wie sie durch (18) dargestellt wird, durch einen festen Punkt $(z, \bar{z})$ geht. Die aufzulösende Gleichung hat nach Algebraisierung den Grad

$$M' = 2 \max (|\omega_s|, |\omega_\nu - \omega_s|). \tag{36}$$

Bei allen drei Charakteren ist darauf zu achten, daß sie sich auf die Hälfte ermäßigen, falls die Hüllkurve doppelt überdeckt wird, was für $p = 0$ eintreten kann.

Dies zeigt auch das der Abb. 8 zugrunde liegende Beispiel. Die bei der Planetenbewegung (28) als (doppelt überdeckte) Hüllbahn entstehende zykloidale Radlinie (27) ist von 8. Ordnung und 5. Klasse. Sie hat 5 Spitzen, die den Nullstellen des aus (32) folgenden Ausdrucks für den Krümmungshalbmesser

$$R = \frac{8}{3} (\cos \tau - 2 \cos 5\tau) \tag{37}$$

entsprechen; man findet $\cos 2\,\tau_{1,2} = \frac{1}{4} (1 \pm \sqrt{7})$ und $\cos \tau_3 = 0$.

Einmalige Integration ($d\varphi = 3\,d\tau$) liefert die Bogenlänge

$$S = \frac{8}{5} (5 \sin \tau - 2 \sin 5\,\tau), \tag{38}$$

---

[10] Für gewöhnlich wird die Mannheimkurve erklärt als Ort der dem Berührungspunkt zugeordneten Krümmungsmitten, wenn die Grundkurve auf einer Geraden rollt (Wieleitner[1]).

[11] Ort der Endpunkte der durch den Ursprung parallelverschobenen Krümmungsradien der Grundkurve. Bis auf eine Drehung durch die Polargleichung (32) dargestellt (Wieleitner, § 30).

gezählt von $\tau = 0$ aus. Es ist zu beachten, daß beim Übergang über eine Spitze Krümmungsradius und Bogendifferential das Vorzeichen wechseln. Zur Bestimmung des Umfanges L sind daher die einzelnen Teilbögen zwischen den Spitzen zu berechnen; man findet schließlich

$$L = 6{\cdot}4 \cdot \sqrt{38 + 6\sqrt{2}} - 9{\cdot}6 \approx 34{\cdot}035.$$

Für die Fläche ergibt sich auf Grund einer für alle Radlinien gültigen, leicht beweisbaren Formel

$$F = \pi \cdot \Sigma\, \omega_\nu\, |a_\nu|^2 = -6\pi;$$

das Minuszeichen rührt vom negativen Umlauf bei wachsendem τ her.

Die durch (37) und (38) dargestellte Mannheimkurve ist eine elliptische Radlinie $1 : -1 : 5 : -5$ von 10. Ordnung und 12. Klasse mit 4 Selbstoskulationspunkten auf der S-Achse. Sie ist in jener Lage gezeichnet, die einer Geradstreckung der Grundkurve vom Selbstberührungspunkt ($\tau = 60°$) aus entspricht.

Die Evolute der Grundkurve hat die durch Spezialisierung von (30) ableitbare Gleichung

$$z = \frac{1}{3}(20\, e^{-it} + 2\, e^{it} - e^{2it} + 5\, e^{4it}) \qquad (t = 2\tau)$$

und entsteht als Hüllbahn der ξ-Achse bei der Bewegung

$$z = 5\, e^{-2i\tau} + e^{2i\tau} + \zeta \cdot e^{3i\tau}.$$

Die Ellipsenbahn des Drehpunktes $\zeta = 0$ ist die Rastpolbahn der Ausgangsbewegung (28) und wird von der Evolute an $Q/2 = 5$ Stellen berührt. Den 5 Spitzen der Evolute entsprechen die Scheitel der Grundkurve und S-parallele Tangenten der Mannheimkurve.

Zum Schluß sei noch erwähnt, daß die Evoluten der allgemeinen Radlinien keine Radlinien sind. Die einzige Ausnahme bildet die Ellipse, die eine Radlinie $-1 : 1$ ist; ihre Evolute ist affin zur Astroide $-1 : 3$, kann demnach als elliptische Radlinie 4. Stufe $-1 : 1 : 3 : -3$ angesehen werden.

8. Isoptische Linien.

Wir betrachten wie in Abschn. 6 wieder die Hüllbahn k einer Geraden g, die einer Planetenbewegung r^{ter} Stufe $\omega_1 : \ldots : \omega_r = m_1 : \ldots : m_{r-1} : 1$ unterworfen wird; neu sei lediglich, daß der Mittelpunkt A_0 der Bewegung nicht im Ursprung des Koordinatensystems, sondern im Punkt $z = a_0$ liegen möge. Entsprechend (18) wird die allgemeine Lage von g dann gegeben durch

$$\bar{A}\, z\, e^{-i\varphi} - A\, \bar{z}\, e^{i\varphi} = -2\, p\, i + \sum_{\mu=0}^{r-1} (\bar{A}\, a_\mu\, e^{i m_\mu' \varphi} - A\, \bar{a}_\mu\, e^{-i m_\mu' \varphi}), \tag{39}$$

wobei $$A = e^{i\alpha}, \quad p = \bar{p}, \quad m_\mu' = m_\mu - 1, \quad m_0 = 0.$$

Neben g fassen wir noch eine zweite Gerade h ins Auge, die einer anderen, gänzlich unabhängigen Planetenbewegung s^{ter} Stufe mit dem Zentrum b_0 unterworfen wird und dabei eine zykloidale Radlinie l umhüllt:

$$\bar{B}\, z\, e^{-i\varphi} - B\, \bar{z}\, e^{i\varphi} = -2\, q\, i + \sum_{\nu=0}^{s-1} (\bar{B}\, b_\nu\, e^{i n_\nu' \varphi} - B\, \bar{b}_\nu\, e^{-i n_\nu' \varphi}) \tag{40}$$

mit $$B = e^{i\beta}, \quad q = \bar{q}, \quad n_\nu' = n_\nu - 1, \quad n_0 = 0.$$

Wegen der Gleichheit des Parameters φ — der, wie erinnerlich, den Drehwinkel bedeutet — schließen die Geraden g und h während der Bewegung ständig den festen Winkel $\beta - \alpha$ miteinander ein (Abb. 10). Ihr Schnittpunkt P durchläuft mithin eine Kurve c, die als „isoptische" Linie des Kurvenpaares k, l zu bezeichnen ist, da dasselbe aus den Punkten P gewissermaßen unter konstantem Winkel gesehen wird.

---

[12] Die Grundkurve wird geradegestreckt, wobei mit den Punkten die Normalen unter Beibehaltung ihrer Richtung mitgenommen werden. Die Hüllkurve der neuen Lagen ist eine Arcuide der Grundkurve (Wieleitner, § 31).

Die Gleichung von c ist ohne weiteres angebbar, da sich z aus (39) und (40) leicht ausrechnen läßt.[13] Wir finden

$$(\bar{A}^2 - \bar{B}^2)\,\hat{z} = -2i\,(\bar{A}\,p - \bar{B}\,q)\,e^{i\varphi} + \sum_{\mu=0}^{r-1}(\bar{A}^2\,a_\mu\,e^{i\,m_\mu\,\varphi} - \bar{a}_\mu\,e^{-i\,m_\mu''\,\varphi}) - \\ - \sum_{\nu=0}^{s-1}(\bar{B}^2\,b_\nu\,e^{i\,n_\nu\,\varphi} - \bar{b}_\nu\,e^{-i\,n_\nu''\,\varphi}) \tag{41}$$

und erkennen die isoptische Kurve sofort als Radlinie von höchstens $2\,(r+s-1)^{\text{ter}}$ Stufe. Eine Stufenreduktion tritt natürlich ein, wenn sich unter den m_μ und n_ν gleiche Werte befinden, also insbesondere für Grundkurven gleicher Sippe; ferner auch für zykloidale Radlinien im engeren Sinn ($p = q = 0$) und für konzentrische Grundkurven ($a_0 = b_0$).

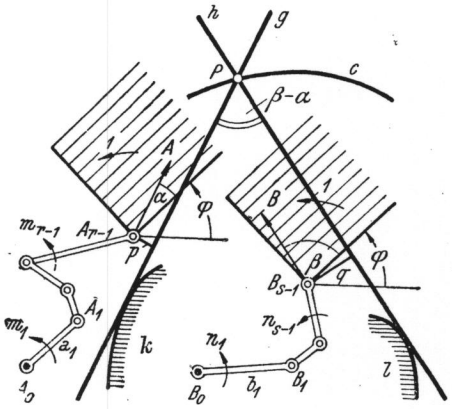

Abb. 10.

Um die isoptischen Linien einer einzigen zykloidalen Radlinie $k = l$ aufzustellen, können wir den Parameterwinkel in (39) um den gewünschten Gesichtswinkel $2\,\sigma$ vermehren, wodurch wir auf $B = A\,e^{2i\sigma}$ und $b_\nu = a_\nu\,e^{2i\,m_\nu\,\sigma}$ geführt werden; Einsetzung in (41) liefert dann den gesuchten Ort. Zweckmäßiger ist es jedoch, den Gesichtswinkel aufzuteilen und φ einmal um σ zu vermindern und einmal um σ zu vermehren; dementsprechend ist in (41) A bzw. B durch $A\,e^{\mp i\sigma}$ und a_ν bzw. b_ν durch $a_\nu\,e^{\mp i\,m_\nu\,\sigma}$ zu ersetzen. Man erhält dann als Ortsgleichung

$$\hat{z}\cdot\sin 2\sigma = -2\,A\,p\,i\sin\sigma\cdot e^{i\varphi} - \sum_{\nu=1}^{s-1}(a_\nu\sin m_\nu''\,\sigma\cdot e^{i\,m_\nu\,\varphi} + \\ + A^2\,\bar{a}_\nu\sin m_\nu\,\sigma\cdot e^{-i\,m_\nu''\,\varphi}). \tag{42}$$

Die isoptische Linie gehört somit der Sippe der Grundkurve an.

Stellen wir uns im übrigen die beiden Geraden g und h in P starr verbunden vor und betrachten wir die „Reitbewegung" des Winkels $g\,h$ auf dem Grundkurvenpaar k, l (bzw. der Einzelkurve $k = l$), so ist deren Gleichung auch leicht anzugeben: Da sich die Winkelschenkel mit der Geschwindigkeit 1 um ihren Scheitel P drehen, wird die Bewegung beschrieben durch

$$z = \hat{z} + \zeta\cdot e^{i\varphi}, \tag{43}$$

wobei die Koordinate $\hat{z}$ von P gemäß (41) bzw. (42) einzusetzen ist. Ersichtlich handelt es sich um eine Planetenbewegung, deren Stufe und Sippencharakteristik im allgemeinen dieselben sind wie die der isoptischen Linie. — Wir fassen zusammen:

Satz 12. Die isoptischen Kurven eines Paares vollständig unabhängiger zykloidaler Radlinien, die als Hüllbahnen von Geraden bei Planetenbewegungen $m_1 : \ldots : m_{r-1} : 1$ bzw. $n_1 : \ldots : m_{s-1} : 1$ entstehen, sind im allgemeinen Radlinien $2\,(r+s-1)$ter Stufe und haben die Sippencharakteristik $m_1 : (2 - m_1) : \ldots : m_{r-1} : (2 - m_{r-1}) : n_1 : : (2 - n_1) : \ldots : n_{s-1} : (2 - n_{s-1}) ; 2 : 1$. Die Bewegung des reitenden Winkels ist eine Planetenbewegung derselben Stufe und Sippe.

Sind die Grundkurven gleichartig ($r = s$, $m = n$), so reduziert sich die Stufe im allgemeinen auf $2\,s$ (in der Charakteristik fallen die n-Glieder fort). — Bei zykloidalen Grundkurven im engeren Sinn ($p = q = 0$) und bei konzentrischen ($a_0 = b_0$) sinkt

[13] Den Fall $A = \pm B$, d. h. $g \parallel h$, schließen wir selbstverständlich aus.

die Stufe der isoptischen Linie im allgemeinen um 1; in der Charakteristik fehlt die 1 bzw. 2 am Ende.

Als Sonderfall dieses Satzes ergibt sich für $r = s = 2$, $m_1 = n_1 = m$, $p = q = 0$ und $a_0 = b_0 = 0$ die bekannte Tatsache, daß die isoptischen Linien eines Paares konzentrisch-ähnlicher Zykloiden — insbesondere auch zusammenfallender — konzentrische Trochoiden derselben Art sind:

$$(\bar{A}^2 - \bar{B}^2)\,\hat{z} = (\bar{A}^2\,a - \bar{B}^2\,b)\,e^{m\,i\varphi} + (\bar{b} - \bar{a})\,e^{(2-m)\,i\varphi}. \tag{44}$$

Der Gesichtswinkel vollführt eine Planetenbewegung 3. Stufe $m : (2 - m) : 1$; gemäß Satz 2 rollt hierbei eine Ellipse auf einer Trochoide $m : (2 - m)$, die übrigens zur isoptischen Linie ähnlich ist.[14] — Die allgemeinen isoptischen Linien zweier beliebiger Zykloiden sind Radlinien 5. Stufe.

Es sei noch bemerkt, daß die „orthoptischen" Linien — bei welchen der gleitende Winkel ein rechter ist ($B = \pm A\,i$) — offensichtlich im allgemeinen keine besondere Stellung einnehmen.

9. Fußpunktskurven.

Fällt man auf die Tangenten einer Grundkurve k die Lote aus einem festen Punkt (dem sog. „Pol"), so erhält man eine Fußpunktskurve von k. Sie läßt sich offenbar als orthoptische Linie eines Kurvenpaares k, l auffassen, wenn l auf einen Punkt zusammenschrumpft.

Wir gelangen demgemäß sofort zur Gleichung der Fußpunktskurve einer zykloidalen Radlinie (39), wenn wir in (41) alle $b = 0$, ferner $B = A\,i$ und $q = 0$ setzen:[15]

$$\hat{z} = -A\,i\,p\,e^{i\varphi} + \frac{1}{2}\sum_{\nu=0}^{s-1}(a_\nu\,e^{i\,m_\nu\varphi} - A^2\,\bar{a}_\nu\,e^{-i\,m_\nu''\varphi}). \tag{45}$$

Die durch $b_0 = 0$ erfolgte Verlegung des Poles in den Nullpunkt O bedeutet wegen der Belassung von a_0 keine Einschränkung. Die Festsetzung $m_0 = 0$ berücksichtigend, ersehen wir, daß es sich im allgemeinen um eine Radlinie $2\,s^{\text{ter}}$ Stufe handelt. Sie besitzt in O einen mehrfachen Punkt, den durch O gehenden Tangenten von k entsprechend; deren Anzahl M' ist im algebraischen Fall durch (36) festgelegt.

Die allgemeinen Fußpunktskurven der Zykloiden ($s = 2$, $p = 0$) sind Radlinien 3. Stufe.

In Anlehnung daran, daß die Mittelpunkts-Fußpunktskurven der Zykloiden „Rosenkurven" heißen (Abschn. 1), wollen wir allgemein die als Fußpunktskurven von zykloidalen Radlinien auftretenden besonderen Radlinien „rosenartige" nennen. Entsprechend der Grundkurve könnte man auch hier solche „im engeren Sinn" und „im weiteren Sinn" unterscheiden. Diese Unterfamilie von Radlinien ist durch eine besonders einfache Polargleichung ausgezeichnet, denn der Polarwinkel ist $\psi = \varphi + \alpha - \pi/2$ und der Radiusvektor $r = \hat{z} \cdot e^{-i\psi} = \hat{z} \cdot \bar{A}\,i\,e^{-i\varphi}$, also im wesentlichen ein trigonometrisches Polynom.

Satz 13. Die Fußpunktskurven einer zykloidalen Radlinie, die als Hüllbahn einer Geraden bei einer Planetenbewegung s^{ter} Stufe $\omega_1 : \ldots : \omega_s$ entsteht, sind im allgemeinen „rosenartige" Radlinien $2\,s^{\text{ter}}$ Stufe $\omega_1 : (2\,\omega_s - \omega_1) : \ldots : \omega_s : 2\,\omega_s$, die im Pol einen vielfachen Punkt haben.

Bei zykloidalen Radlinien im engeren Sinn ($p = 0$) erniedrigt sich die Stufe der Fußpunktskurven im allgemeinen um 1, ebenso für den Mittelpunkt als Pol ($a_0 = 0$); in der Charakteristik fehlt das Glied ω_s bzw. $2\,\omega_s$ am Ende.

---

[14] W. Wunderlich: Z. angew. Math. Mech. **17** (1937).

[15] Wir schreiben wieder s statt r und ν statt μ.

Es erhebt sich nun sogleich wieder die Doppelfrage: Woran erkennt man eine rosenartige Radlinie und wie findet man die zugehörige Grundkurve?

Was die Winkelgeschwindigkeiten betrifft, so müssen diese auf der Zahlengeraden nach Hinzunahme des Nullpunktes $\omega_0 = 0$ eine symmetrische Punktgruppe bilden; die Mitte entspricht dem Wert ω_s. Wir können die Radliniengleichung also wie bei den Hüllbahnen in der Gestalt (22) voraussetzen, wobei diesmal lediglich der Summenzeiger von 0 bis s läuft. Koeffizientenvergleich mit (45) liefert dann folgende Bestimmungsgleichungen für A, p und die a_ν:

$$A\,p\,i = -\,b_s, \quad a_\nu = 2\,b_\nu, \quad A^2\,\bar{a}_\nu = -\,2\,b_\nu'. \tag{46}$$

Die Auflösung

$$a_\nu = 2\,b_\nu, \quad A^2 = -\,b_\nu'/\bar{b}_\nu, \quad p = \bar{A}\,i\,b_s \quad (\nu = 0 \ldots s-1) \tag{47}$$

ist natürlich nur dann brauchbar, wenn alle s Werte für A^2 gleich ausfallen und Einheitsbetrag haben; $\nu = 0$ kann eigentlich außer Betracht bleiben, da sich die betreffende Forderung durch Veränderung von b_0 erzwingen läßt, was auf eine Parallelverschiebung hinausläuft.

Satz 14. Eine Radlinie $z = b_s\,e^{i\,\omega_s\,t} + \sum_{\nu=0}^{s-1} (b_\nu\,e^{i\,\omega_\nu\,t} + b_\nu'\,e^{i\,\omega_\nu'\,t})$ mit $\omega_0 = 0$ ist dann und nur dann eine rosenartige mit dem Knoten im Nullpunkt, wenn $\omega_\nu + \omega_\nu' = 2\,\omega_s \neq 0$, $|b_\nu| = |b_\nu'|$ und alle Quotienten $b_\nu'/\bar{b}_\nu$ denselben Wert haben.

Die Polargleichung läßt sich dann auf die Form $r = p + \sum_{\nu=0}^{s-1} c_\nu \sin(m_\nu'\,\varphi + \gamma_\nu)$ bringen.

Als Beispiel betrachten wir wieder das gerade Dreiblatt (9). Die Winkelgeschwindigkeiten ± 1 und 2 bilden nach Hinzunahme der Null eine symmetrische Punktgruppe mit der Mitte 1/2. Um Brüche zu vermeiden, verdoppeln wir alle Geschwindigkeiten; schreiben wir

$$\mathfrak{z} = z + 1 = 1 + e^{-2\,i\,\tau} + e^{2\,i\,\tau} + e^{4\,i\,\tau},$$

dann können wir etwa so aufspalten:

$$\begin{array}{llllll} \omega_0 = 0, & \omega_0' = 2; & \omega_1 = -2, & \omega_1' = 4; & \omega_2 = 1 \\ b_0 = 1, & b_0' = 1; & b_1 = 1, & b_1' = 1; & b_2 = 0 \end{array}$$

und finden nach (47) als Bestimmungsstücke der Hüllbewegung

$$a_0 = a_1 = 2, \quad A = \pm i, \quad p = 0.$$

Die Grundkurve entsteht mithin als Hüllbahn der η-Achse bei der gewöhnlichen Planetenbewegung

$$z = \mathfrak{z} - 1 = 1 + 2\,e^{-2\,i\,\tau} + \zeta \cdot e^{i\,\tau},$$

ist also eine Steinerzykloide. Das Dreiblatt ist deren Fußpunktskurve für den Pol $z = -1$ ($\mathfrak{z} = 0$), demnach eine rosenartige Radlinie. Ihre Polargleichung kann auf die Form

$$\mathfrak{r} = 2\,(\cos\tau + \cos 3\,\tau) = 4\cos\tau\,\cos 2\,\tau$$

gebracht werden (vgl. Abb. 4).

10. Konstruktionsvorschriften.

Anschließend sollen noch die Konstruktionsvorschriften auseinandergesetzt werden, die der zeichnerischen Ermittlung von Punkten, Tangenten und Krümmungskreisen der Radlinien zugrunde liegen.

Die Auffindung von Punkten einer durch ihre komplexe Darstellung

$$z = \sum_{\nu=1}^{s} a_\nu\,e^{i\,\omega_\nu\,t} \tag{5}$$

gegebenen Radlinie wird dem Wesen nach durch die Formel selbst angesagt: Man

drehe die Vektoren a_ν aus der Anfangslage um die zugehörigen Winkel $\omega_\nu t$ (mit Berücksichtigung des Vorzeichens!) und setze sie dann, von A_0 ausgehend, zu einem Polygon $A_0 A_1 \ldots A_s$ zusammen; der Endpunkt $A_s = P$ ist ein Kurvenpunkt.

Die Richtung der Tangente wird durch $\dot{z} = dz/dt$ angegeben, die Richtung der Kurvennormale mithin durch

$$\dot{z}\, i = -\sum_{\nu=1}^{s} \omega_\nu\, a_\nu\, e^{i\,\omega_\nu t}. \tag{48}$$

Wir strecken demzufolge die Glieder des Polygons im Verhältnis ihrer Geschwindigkeiten und setzen sie — am besten von P aus rückwärtsschreitend — zu einem neuen Polygon zusammen, dessen Endpunkt die Normalenrichtung gibt (Abb. 11). Da nur das Verhältnis der ω_ν wesentlich ist, haben wir eine gewisse Freiheit in der Wahl des Maßstabes.

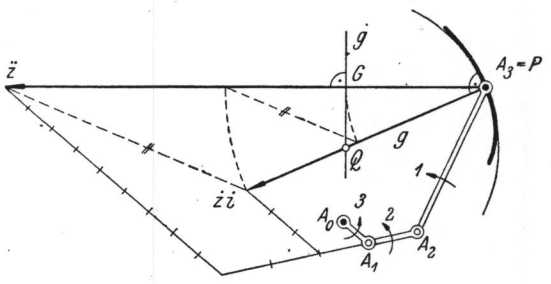

Abb. 11.

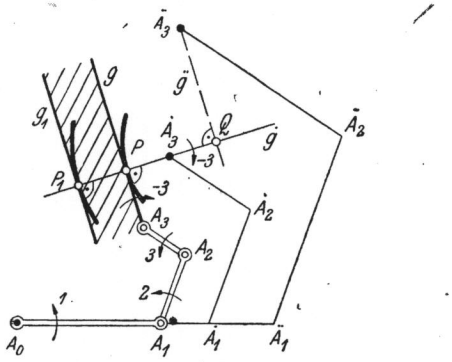

Abb. 12.

Die Gleichung der Normalen g im Punkt $P\,(z)$ lautet — mit ζ, ~~Zeit~~ $\bar{\zeta}$ als laufenden Koordinaten —

$$(\zeta - z)\,\dot{\bar{z}} + (\bar{\zeta} - \bar{z})\,\dot{z} = 0. \tag{49}$$

Ihre Hüllkurve — die Evolute — wird von g im Krümmungsmittelpunkt Q von P berührt und dieser Punkt wird aus g von der durch Ableitung nach t gewonnenen Geraden $\dot{g}$

$$(\zeta - z)\,\ddot{\bar{z}} + (\bar{\zeta} - \bar{z})\,\ddot{z} = 2\,\dot{z}\,\dot{\bar{z}} \tag{50}$$

ausgeschnitten; $\dot{g}$ verläuft senkrecht zum Vektor

$$\ddot{z} = -\sum_{\nu=1}^{s} \omega_\nu^2\, a_\nu\, e^{i\,\omega_\nu t}, \tag{51}$$

der leicht zu zeichnen ist. Die Lage wollen wir durch den Schnittpunkt G mit der durch P gehenden Trägergeraden von $\ddot{z}$ festlegen, deren Gleichung

$$(\zeta - z)\,\dddot{\bar{z}} - (\bar{\zeta} - \bar{z})\,\ddot{z} = 0 \tag{52}$$

lautet. Addition von (50) und (52) liefert als Koordinate von G

$$\zeta = z + \frac{\dot{\bar{z}}\,\dot{z}}{\ddot{\bar{z}}} = z + \frac{|\dot{z}|^2}{|\ddot{z}|^2} \cdot \ddot{z}. \tag{53}$$

Wir haben also bloß den in P angehängten Vektor $\ddot{z}$ zweimal im Verhältnis der Längen $|\dot{z}| : |\ddot{z}|$ zu verkürzen und in dem so gefundenen Punkt G das Lot zu errichten; dieses schneidet g in der gesuchten Krümmungsmitte Q (Abb. 11).

Ähnlich läßt sich die Hüllbahn einer Geraden g beherrschen, die einer Planetenbewegung unterworfen wird. Gemäß (8) ermitteln wir zunächst das Momentan-

zentrum, indem wir alle Glieder a_ν des die Bewegung erzeugenden Polygons $A_0 \dots A_{s-1}$ mit den zugehörigen Faktoren $-m_\nu' = 1 - \omega_\nu/\omega_s$ multiplizieren; der Endpunkt $\dot{A}_{s-1}$ des daraus zusammengesetzten neuen Polygons ist der gesuchte Momentanpol, aus welchem wir lediglich das Lot $\dot{g}$ auf g zu fällen brauchen, um den Berührungspunkt P zu erhalten (Abb. 12).

Bedenken wir, daß $\dot{g}$ vermöge des 2. Polygons eine gleichartige Bewegung vollführt wie g selbst, dann ist es klar, daß wir das Verfahren nur zu wiederholen brauchen, um im Berührungspunkt der von $\dot{g}$ eingehüllten Evolute die Krümmungsmitte Q für P zu gewinnen (Abb. 12).

Wie man sieht, sind die gegebenen Zeichenvorschriften von besonderem Wert, weil sie die gesamte, so umfassende und weitverzweigte Familie der Radlinien nach einfachen und einheitlichen Grundsätzen zu behandeln gestatten.

(Eingegangen am 9. September 1946.)

Printed in Austria.