

Ein Trilaterationsproblem

Vortrag, gehalten am 25.9.1980 im Rahmen des XII. Steiermärkischen Mathematischen Symposiums in Stift Rein, von

Walter Wunderlich (Wien)

1. Die klassischen Verfahren der Landesvermessung beruhen bekanntlich vorwiegend auf Winkelmessungen. Wird das Gelände mit einem Netz von Dreiecken überzogen, so ist die Gestalt jedes einzelnen derselben durch zwei Winkel bestimmt. Zur Festlegung des Maßstabs einer solchen "Triangulation" ist grundsätzlich bloß die Messung einer einzigen Basisstrecke erforderlich, was trotzdem früher beträchtlichen Aufwand bedeutete. Seit der Einführung der elektronischen Entfernungsmessung und deren gewaltigen Fortschritten ist heute die Längenmessung sehr bequem und genau geworden, sodaß man auf Winkelmessungen überhaupt verzichten könnte. Damit ist der Triangulation in der "Trilateration" eine ernsthafte Konkurrenz erwachsen. Ausgehend von einem Basisdreieck ist die Lage jedes weiteren Punktes durch seine drei Distanzen von den Basispunkten bestimmt; theoretisch zwar zweideutig, doch ist praktisch eine Verwechslung mit dem Spiegelbild bezüglich der Basisebene kaum zu befürchten. Im Gegensatz zu den transzendenten Winkelfunktionen der Trigonometrie benötigt die Trilateration offenbar nur die algebraischen Hilfsmittel der analytischen Geometrie.

Von der Annahme ausgehend, daß kein brauchbares Basisdreieck zur Verfügung steht, hat K. KILLIAN [2] folgendes Problem aufgeworfen: Man hat eine gewisse Anzahl von "Standpunkten"

$P_i(x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2, \dots, m$
unbekannter gegenseitiger Lage, ferner eine gewisse Anzahl von "Zielpunkten"

$Q_j(X_j, Y_j, Z_j)$, $j = 1, 2, \dots, n$
ebenfalls unbekannter (eventuell veränderlicher) Lage; gemessen

werden nun sämtliche Distanzen $P_i Q_j = r_{ij}$, jedoch nicht die Entfernungen von Standpunkten oder Zielpunkten untereinander. Die erste Frage lautet: Für welche Anzahlen m und n sind die Messungen ausreichend, um die Konfiguration der $m+n$ Punkte bestimmen zu können?

Zur Verfügung stehen die mn Distanzformeln

$$(1) \quad (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2 = r_{ij}^2.$$

Zwecks Fixierung des (kartesischen) Koordinatensystems sei der Ursprung in P_1 gewählt, die x -Achse durch P_2 und die xy -Ebene durch P_3 gelegt. Neben den solcherart festgelegten Koordinaten $x_1 = y_1 = z_1 = y_2 = z_2 = z_3 = 0$ bleiben also noch $3(m+n) - 6$ unbekannte Koordinaten zu berechnen. Die Bilanz stimmt, falls

$$(2) \quad mn = 3(m+n) - 6 \quad \text{oder} \quad (m-3)(n-2) = 3.$$

Da für die beiden Klammerfaktoren nur die ganzen Zahlen 1 und 3 in Frage kommen, gilt entweder $m=4, n=6$ oder $m=6, n=4$. Damit hat man das Ergebnis: Werden von vier unbekanntem Standpunkten P_i aus sämtliche 24 Distanzen zu sechs unbekanntem Zielpunkten Q_j gemessen, so ist die Konfiguration der zehn Punkte grundsätzlich bestimmt, wenn auch nicht unbedingt eindeutig.

Weitaus schwieriger ist aber die tatsächliche Ermittlung der Konfiguration, sofern nicht, wie in der Praxis anzunehmen, wenigstens grobe Näherungswerte der unbekanntem Koordinaten bekannt sind. Ansonsten wäre aber bei 24 quadratischen Gleichungen (1) zunächst ein Problem vom Grad $2^{24} \approx 17 \cdot 10^6$ zu erwarten; zufolge der speziellen Bauart der Polynome lassen sich zwar einige der Gleichungen durch Differenzenbildung auf lineare reduzieren [5/II], aber auch die so gewonnene Schranke $8 \cdot 6^5 = 62208$ ist sicher noch zu hoch; immerhin dürfte der wahre Grad doch in den Tausenderregionen liegen. Zum Vergleich sei an die Verhältnisse beim analogen ebenen Problem erinnert, wo die Anzahlen $m=n=3$ betragen; trotz der ersten Schranke $2^9 = 512$ und der zweiten Schranke $6 \cdot 4^2 = 96$ handelt es sich tatsächlich bloß um ein Problem 8. Grades [5/I].

2. Denkbar wäre eine experimentelle Lösung sehr beschränkter Genauigkeit, indem man die 24 gemessenen Distanzen r_{ij} in passender Verkleinerung durch Stäbe materialisiert, die in zehn Knoten gelenkig miteinander verbunden werden. Ein solches Stabmodell (dessen Herstellung leichter zu schildern als wirklich auszuführen ist) wird im allgemeinen starr sein, wie schon R.BRICARD [1] bemerkt hat, der auch die entscheidenden Knotenzahlen $m=4$, $n=6$ fand. Jedenfalls ist aber damit zu rechnen, daß es mehrere aus den gleichen Stäben zusammengesetzte Modelle verschiedener Formen geben kann. Unterscheiden sich zwei solche Formen nicht allzusehr, dann besteht für den Geodäten Verwechslungsgefahr zwischen zwei möglichen Lösungen.

Rücken zwei derartige Nachbarpositionen zusammen, so liegt ein wackeliges Stabwerk mit infinitesimaler Beweglichkeit vor, was für den Geodäten eine gewisse Unsicherheit der Lösung bedeutet. Im ebenen Fall liegt eine solche "gefährliche Anordnung" vor, wenn die drei Zielpunkte zusammen mit den drei Standpunkten einem Kegelschnitt angehören [3, 5/I]; bei ganz speziellen Anordnungen ist das Stabwerk sogar in endlichem Ausmaß stetig beweglich [4], und das geodätische Problem ist unbestimmt, weil es eine kontinuierliche Schar von Lösungen besitzt.

Beim räumlichen Trilaterationsproblem liegt, wie K.KILLIAN und P.MEISSL [3] festgestellt haben, eine gefährliche Situation in zwei ganz verschiedenartigen Fällen vor.

Fall I: Die vier Standpunkte liegen zusammen mit den sechs Zielpunkten auf einer Quadrik (die auch ausarten kann). Wie in [5/II] gezeigt wurde, wird die Gefährlichkeit auch bei Vermehrung der Anzahlen nicht behoben, wenn die zusätzlichen Stand- und Zielpunkte ebenfalls derselben Quadrik angehören. H.STACHEL hat bemerkt, daß die infinitesimalen Verrückungen sämtlicher Punkte normal zur Oberfläche der Quadrik erfolgen, wenn man deren Achsen festhält.

Fall II: Die vier Standpunkte liegen in einer Ebene; die Zielpunkte können dabei beliebig im Raum verteilt sein. Dieser Fall, der näherungsweise in der Praxis häufig gegeben wäre, ist Hauptgegenstand des Vortrags.

Die Ent-
fer. Die
Mess-
bestim-

Bei der
-Ebene
linaten
abekann-

1 und 3
4. Da-
stand-
ten
ehn
t ein-

tlung
nehmen,
aten be-
eichnun-
warten;
zwar
bare
3.6⁵ =
re Grad
an die
lie An-
512 und
ch bloß

3. Die folgenden Entwicklungen lassen vorerst kaum eine Beziehung zu dem in Rede stehenden Problem erkennen. Wir betrachten nämlich einen quadratischen Kegel, dessen Basiskegelschnitt k fürs erste als Ellipse angenommen sei. Ihre Parameterdarstellung wird angesetzt mit

$$(3) \quad x = a \cdot \cos u, \quad y = b \cdot \sin u, \quad z = 0 \quad (a > b > 0).$$

Für die Entfernung r irgendeines Basispunktes $P \in k$ von der an beliebiger Stelle befindlichen Kegelspitze $Q(X, Y, Z)$ gilt

$$(4) \quad r^2 = (X - x)^2 + (Y - y)^2 + Z^2 = \\ = X^2 + Y^2 + Z^2 + \frac{1}{2}(a^2 + b^2) - 2aX \cos u - 2bY \sin u + \frac{1}{2}(a^2 - b^2) \cos 2u.$$

Die Verteilung der Erzeugendenstrecken PQ auf dem Kegel wird durch die mit (4) definierte Funktion $r = r(u)$ beschrieben. Die Bauart der Formel läßt nun erkennen, daß es noch unendlich viele weitere Kegel mit derselben Erzeugendenverteilung gibt: Es sind dies alle jene ∞^1 Kegel, für welche die fünf Formparameter a, b, X, Y, Z den vier Relationen

$$(5) \quad a^2 - b^2 = c^2, \quad aX = p, \quad bY = q, \quad X^2 + Y^2 + Z^2 + \frac{1}{2}(a^2 + b^2) = R^2$$

mit konstanten Werten c, p, q und R genügen. Die zugehörigen Basisellipsen haben gemeinsame Exzentrizität c , sind also konfokal. Setzt man ihre Halbachsen durch

$$(6) \quad a = c \cdot \operatorname{ch} v, \quad b = c \cdot \operatorname{sh} v$$

an, so liefert die (3) entsprechende Darstellung

$$(7) \quad x = c \cdot \cos u \operatorname{ch} v, \quad y = c \cdot \sin u \operatorname{sh} v, \quad z = 0$$

mit $v = \text{const}$ jeweils eine der konfokalen Basisellipsen.

Denkt man sich beliebig viele Erzeugende eines der Kegel durch starre, in der Spitze Q gelenkig verbundene Stäbe realisiert, so gestattet dieses Stabwerk offenbar eine durch Variation von v beschriebene Deformation, bei welcher der Fußpunkt P jedes Stabes auf einer der durch (7) mit $u = \text{const}$ dargestellten konfokalen Hyperbeln wandert. Die damit einhergehende, von u unabhängige Verlagerung der Kegelspitze Q erfolgt längs einer

gewissen Bahn, die gemäß (5) durch

$$(8) \quad X = \frac{p}{c \operatorname{ch} v}, \quad Y = \frac{q}{c \operatorname{sh} v}, \quad Z^2 = R^2 - X^2 - Y^2 - \frac{c^2}{2} \operatorname{ch} 2v$$

bestimmt ist. Es handelt sich im allgemeinen um eine algebraische, zu den Koordinatenebenen symmetrische Raumkurve 12. Ordnung, die im Normalriß auf die Basisebene als doppelt überdeckte Kurve 4. Ordnung erscheint. In den Fällen $p=0$ oder $q=0$ reduziert sich die Spitzenbahn auf eine ebene Kurve 4. Ordnung, sofern nicht $p=q=0$, weil dann Q auf der z -Achse verbleibt. -- Ähnliche Entwicklungen wären noch für die Annahme einer Hyperbel oder Parabel k durchzuführen [6,7].

4. Nachdem die Verlagerung der Basispunkte $P(x,y,0)$ gemäß (7) unabhängig von der Kegelspitze $Q(X,Y,Z)$ erfolgt, könnte man über einem dem Kegelschnitt k eingeschriebenen Basisviereck $P_1 P_2 \dots P_m$ beliebig viele Pyramiden mit verschiedenen Spitzen Q_1, Q_2, \dots, Q_n errichten, und sie würden eine simultane Deformation gestatten. Damit ist der Zusammenhang mit dem Trilaterationsproblem hergestellt: Werden von beliebig vielen, einem Kegelschnitt k angehörenden Standpunkten P_i aus sämtliche Distanzen zu beliebig vielen und beliebig im Raum verteilten Zielpunkten Q_j gemessen, so liegt ein unbestimmtes Auswertungsproblem mit einer stetigen Schar von unendlich vielen Lösungen vor. Das zugehörige Stabmodell ist ja nicht bloß wackelig, sondern sogar in endlichem Ausmaß stetig beweglich. Im Zuge der Deformation verändert sich die Basisfigur in affiner Weise, wie aus (7) zu entnehmen ist [6].

Bei der ursprünglichen Annahme $m=4$ steht ein ganzes Büschel von ∞^1 Basiskegelschnitten k durch die vier Standpunkte zur Verfügung, sodaß das Stabmodell für $n \geq 6$ sogar eine zweiparametrische Beweglichkeit aufweist. Bei $m=5$ ist der Kegelschnitt k eindeutig bestimmt, und erst ab $m=6$ kommt die Bedingung der Anordnung der Standpunkte auf einem Kegelschnitt einschränkend zum Tragen; die Beweglichkeit des Modells ist dann nur mehr einparametrisch, also zwangsläufig.

Literatur

- [1] R.BRICARD: Sur des systèmes articulés. *Nouv. Ann. Math.* (1920), 395-400.
- [2] K.KILLIAN: Über Verfahren der Stellartriangulation. *Österr. Z. Vermessungswesen* 51 (1963), 3-14.
- [3] K.KILLIAN - P.MEISSEL: Einige Grundaufgaben der räumlichen Trilateration und ihre gefährlichen Orte. *D. Geod. Kom. Bayer. Akad. Wiss. A/61* (1969), 65-72.
- [4] W.WUNDERLICH: On deformable nine-bar linkages with six triple joints. *Proc. Nederl. Akad. Wetensch.* 79 (1976), 79.
- [5] W.WUNDERLICH: Gefährliche Annahmen der Trilateration bewegliche Fachwerke I, II. *Z. angew. Math. Mech.* 67 (1977), 297-304 und 363-367.
- [6] W.WUNDERLICH: Untersuchungen zu einem Trilaterationsproblem mit komplanaren Standpunkten. *Sb. Österr. Akad. Wiss.* 186 (1977), 263-280.
- [7] W.WUNDERLICH: Sur une déformation remarquable du système des génératrices d'un cône du second degré et un problème de géodésie. *Bul. Inst. Polit. Iasi* 24 (1978), 81-85.

Anschrift des Verfassers:

Walter Wunderlich
II. Institut für Geometrie
Technische Universität Wien
Gußhausstr. 27 - 29
A-1040 Wien