

WACKELIKOSAEDER

1

In einer anregenden Abhandlung [2] hat Jessen die merkwürdigen, von ihm entdeckten *orthogonalen Ikosaeder* beschrieben, das sind Polyeder vom topologischen Typ des regulären Ikosaeders, deren 20 dreieckige Seitenflächen längs aller 30 Kanten rechte Winkel bilden. Ein solches orthogonales Ikosaeder ist natürlich nicht konvex, sondern weist Hohlkanten auf, und zwar sechs an der Zahl.

Die Jessenschen Ikosaeder besitzen einen Mittelpunkt und sind einer Kugel eingeschrieben. Von einer hochsymmetrischen Sonderform (Fig. 2) erwähnte kürzlich Goldberg [1], daß sie *wackelig* ist, d.h. eine infinitesimale Deformation gestattet, wenn die Seitenflächen längs der Kanten gelenkig verbunden sind.

In der vorliegenden Mitteilung wird nun gezeigt, daß eine solche Wackeligkeit nicht nur *sämtlichen* orthogonalen Ikosaedern mit Mittelpunkt zukommt, sondern darüber hinaus auch allen dazu *affinen Formen*.

2

Bei der von Jessen verwendeten, aus Fig. 1 ersichtlichen Bezeichnung der Ikosaederflächen mit geordneten Paaren der Ziffern 1 bis 5 werden zur Beschriftung 'benachbarter' (längs einer Kante zusammenhängender) Dreiecke stets durchwegs verschiedene Ziffern benützt. So tragen die drei

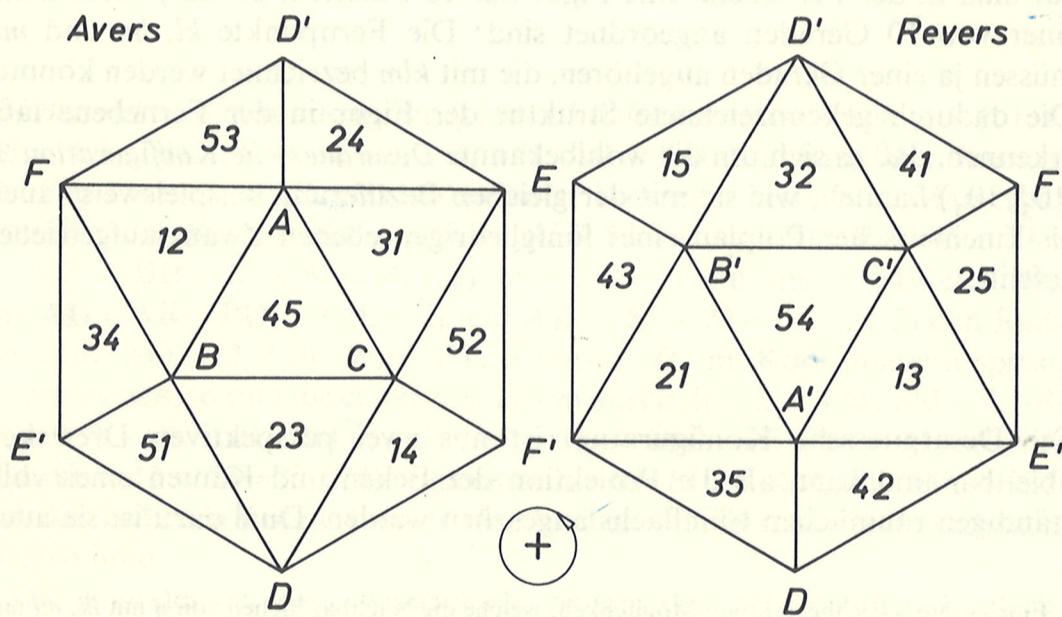


Fig. 1

Nachbarflächen des Dreiecks  $ij$  die Signaturen  $kl$ ,  $lm$  und  $mk$ , wobei  $ijklm$  immer eine gerade Permutation von 12345 ist.<sup>1</sup> Die  $ij$  gegenüberliegende Seitenfläche erhält auf diese Weise die Kennzahl  $ji$ .

Jede Ikosaederkante kann dann durch die beiden Ziffernpaare der von ihr ausgehenden Seitenflächen gekennzeichnet werden, wobei nach Orientierung der Oberfläche auch noch der Durchlaufsinne der Kante berücksichtigt wird: Das erste Ziffernpaar soll jeweils von jenem Dreieck stammen, dessen Umlaufsinn mit der orientierten Kante verträglich ist. Zur besseren Verständigung mögen die Ecken des Dreiecks 45 mit  $A, B, C$  bezeichnet werden, die freien Ecken der Nachbardreiecke mit  $D, E, F$  (Fig. 1); werden schließlich noch die Gegenecken mit einem Akzent versehen, so sind alle 12 Ikosaederecken erfaßt. Gilt der Umlaufsinn  $ABC$  in 45 als der positive, dann erhält etwa die orientierte Kante  $AB$  das Symbol  $(45, 12)$ ,  $BA$  hingegen  $(12, 45)$ ,  $A'B'$  wiederum  $(21, 54)$ , usw.

## 3

Bei einem orthogonalen Ikosaeder bildet jede Seitenfläche  $ij$  mit den Nachbarflächen  $kl$ ,  $lm$  und  $mk$  rechte Winkel; deren Ebenen haben daher einen uneigentlichen Schnittpunkt in der zur Stellung von  $ij$  normalen Richtung. In affiner Verallgemeinerung wird nun bloß verlangt, daß je drei Flächen  $kl$ ,  $lm$  und  $mk$  stets einen *Fernpunkt* gemeinsam haben sollen, der jedoch nicht in der zu  $ij$  normalen Richtung zu liegen braucht.

Überdies wird angenommen, daß je zwei gegenüberliegende Seitenflächen  $ij$  und  $ji$  in *parallelen Ebenen* liegen. Ob dies eine einschränkende oder aber eine notwendige Voraussetzung ist, bleibt offen. Bezeichnet man den Fernpunkt der zu  $ij$  (und  $ji$ ) normalen Richtung ebenfalls mit  $ij$  ( $= ji$ ), so hat man in der Fernebene eine Figur aus 10 Punkten, die zu je dreien auf einer von 10 Geraden angeordnet sind: Die Fernpunkte  $kl$ ,  $lm$  und  $mk$  müssen ja einer Geraden angehören, die mit  $klm$  bezeichnet werden könnte. Die dadurch gekennzeichnete Struktur der Figur in der Fernebene läßt erkennen, daß es sich um die wohlbekanntere *Desarguessche Konfiguration*  $\mathcal{D}(10_3, 10_3)$  handelt, wie sie mit der gleichen Bezifferung beispielsweise auch als kinematischer Polplan eines fünfgliedrigen ebenen Zwanglaufgetriebes auftritt.

## 4

Die Desarguessche Konfiguration ist aus zwei perspektiven Dreiecken ableitbar und kann als die Projektion der Ecken und Kanten eines vollständigen räumlichen Fünfflachs angesehen werden. Dual dazu ist sie auch

<sup>1</sup> Eine zweite, gleichberechtigte Möglichkeit, welche die Nachbarflächen von  $ij$  mit  $lk$ ,  $ml$  und  $km$  bezeichnet, soll hier der Kürze zuliebe nicht eigens verfolgt werden.

als das Spurensystem der Seiten und Ebenen eines vollständigen räumlichen Fünfecks deutbar.

Damit eröffnet sich ein Weg zur Konstruktion von Ikosaedern der gesuchten Art: Nach Annahme eines beliebigen *räumlichen Fünfecks* 12345, von dem lediglich verlangt wird, daß keine vier Ecken komplanar sind, stehen mit dessen Seiten  $ij$  die Normalenrichtungen der Ikosaederflächen  $ij$  und  $ji$  zur Verfügung. Beginnt man etwa mit den Ebenen 12, 23, 31 und 45 in den vorgeschriebenen Stellungen, so hat man zunächst das Dreieck  $ABC$ ; legt man anschließend die Ebenen 51 durch  $B$  und 14 durch  $C$ , dann schneiden diese in 23 die Ecke  $D$  heraus usw. Ob die Fortsetzung dieses Prozesses zuletzt wirklich ein geschlossenes Ikosaeder liefert, ist freilich nicht von vornherein gewiß.

Daß dies aber tatsächlich zutrifft, erkennt man, wenn man die Ikosaederkante  $(ij, kl)$ , die ja zu den Fünfeckseiten  $ij$  und  $kl$  normal sein muß, nach dem Vorgang von Jessen [2] einfach durch

$$(1) \quad (ij, kl) = \mathbf{ij} \times \mathbf{kl}$$

ansetzt. Die solchermaßen der Richtung und Länge nach bestimmten Kanten der Ikosaederfläche  $ij$  bilden wegen  $\mathbf{kl} + \mathbf{lm} + \mathbf{mk} = \mathbf{0}$  stets ein Dreieck, was die Schließung gewährleistet. Dieses Dreieck ist übrigens ähnlich zur Normalprojektion des Teildreiecks  $klm$  in Richtung  $ij$ .

Weiterhin ergibt sich aus der Bemerkung, daß je zwei Gegenkanten  $\mathbf{ij} \times \mathbf{kl}$  und  $\mathbf{lk} \times \mathbf{ji} = -\mathbf{ij} \times \mathbf{kl}$  gleich lang und gegensinnig parallel sind, die Existenz eines *Symmetriezentrums*  $O$  für das Ikosaeder. Die genannten Kanten sind nebenbei parallel zum Gemeinlot der windschiefen Fünfeckseiten  $ij$  und  $kl$ .

5

Als *Beispiel* sei das aus dem erzeugenden Fünfeck mit den Ecken 1  $(-1, 1, 1)$ , 2  $(1, -1, 1)$ , 3  $(1, 1, -1)$ , 4  $(-1, -1, -1)$  und 5  $(0, 0, 0)$  anhand des Schemas aus Fig. 1 mittels der Regel (1) abgeleitete Ikosaeder betrachtet. Man erhält zunächst die Kantenvektoren  $\mathbf{AB} = \mathbf{45} \times \mathbf{12} = (2, 2, -4)$ ,  $\mathbf{BC} = \mathbf{45} \times \mathbf{23} = (-4, 2, 2)$ ,  $\mathbf{BD} = \mathbf{23} \times \mathbf{51} = (4, 2, 2)$  und findet dann durch Mittelbildung aus  $\mathbf{AD} = \mathbf{AB} + \mathbf{BD} = (6, 4, -2)$  und  $\mathbf{AD}' = \mathbf{53} \times \mathbf{24} = (-2, 4, 2)$  den Radiusvektor  $\mathbf{AO} = (2, 4, 0)$ . Wird das Zentrum  $O$  im Koordinatenursprung angenommen, so sind die ersten vier Ecken durch  $A(-2, -4, 0)$ ,  $B(0, -2, -4)$ ,  $C(-4, 0, -2)$  und  $D(4, 0, -2)$  festgelegt; über  $\mathbf{AE} = \mathbf{24} \times \mathbf{31} = (0, 8, 0)$  und  $\mathbf{AF} = \mathbf{12} \times \mathbf{53} = (2, 2, 4)$  ergeben sich noch  $E(-2, 4, 0)$  und  $F(0, -2, 4)$ . Für die restlichen Ecken  $A'$  bis  $F'$  sind bloß die Vorzeichen der Koordinaten umzukehren.

Da einander je zwei windschiefe Seiten des erzeugenden Fünfecks

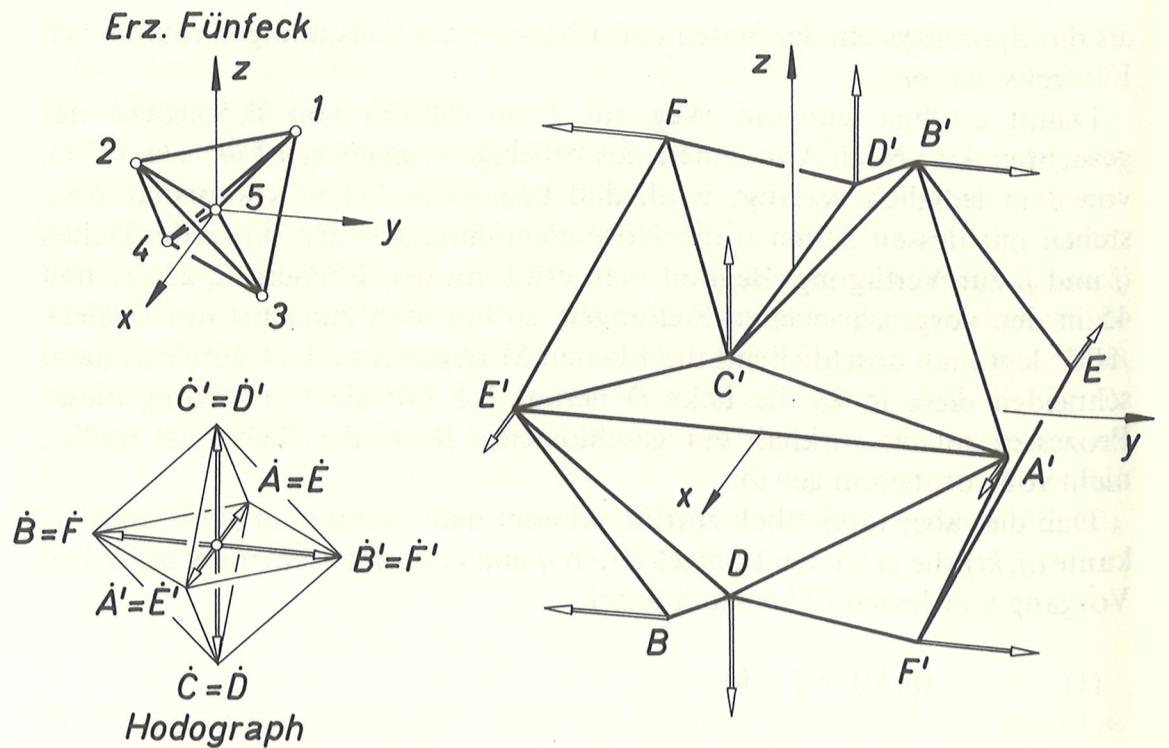


Fig. 2

rechtwinklig kreuzen, so liegt ein *orthogonales Ikosaeder* vor. Es ist in Fig. 2 axonometrisch dargestellt.

6

Um allgemeinere orthogonale Ikosaeder zu gewinnen, hat man die Ecken des erzeugenden Fünfecks auf die Ecken und den Höhenschnittpunkt eines beliebigen *orthozentrischen Tetraeders* zu verteilen. Wird dieses derart auf die  $xy$ -Ebene gestellt, daß die Ecke 1 auf die  $x$ -Achse und die Kante 23 parallel zur  $y$ -Achse zu liegen kommt, während die Höhe 45 mit der  $z$ -Achse zusammenfällt, so können die Ecken durch  $1(p, 0, 0)$ ,  $2(-q, -r, 0)$ ,  $3(-q, s, 0)$ ,  $4(0, 0, u)$  angesetzt werden; für die Existenz eines Höhenschnittpunktes  $5(0, 0, v)$  sind dann die aus  $12 \perp 34$  und  $15 \perp 24$  folgenden Bedingungen

$$(2) \quad (p + q)q = rs \quad \text{und} \quad pq = uv$$

notwendig und hinreichend [2].

Eine einfache Lösung in natürlichen Zahlen lautet:  $p = u = 2$ ,  $q = v = s = 1$  und  $r = 3$ . Nach dem in Abschnitt 5 verfolgten Schema erhält man die Ikosaederecken  $A(1, -2, 6)$ ,  $B(-2, 1, 6)$ ,  $C(2, 1, 6)$ ,  $D(-6, 1, -2)$ ,  $E(3, 4, -4)$  und  $F(4, -5, 0)$ , zu welchen noch die durch Vorzeichenwechsel hervorkehenden Gegenecken  $A'$  bis  $F'$  treten. Das so gewonnene, mit keinerlei unerwünschten Symmetrien behaftete Ikosaeder ist in Fig. 3 in kotierter Projektion dargestellt.

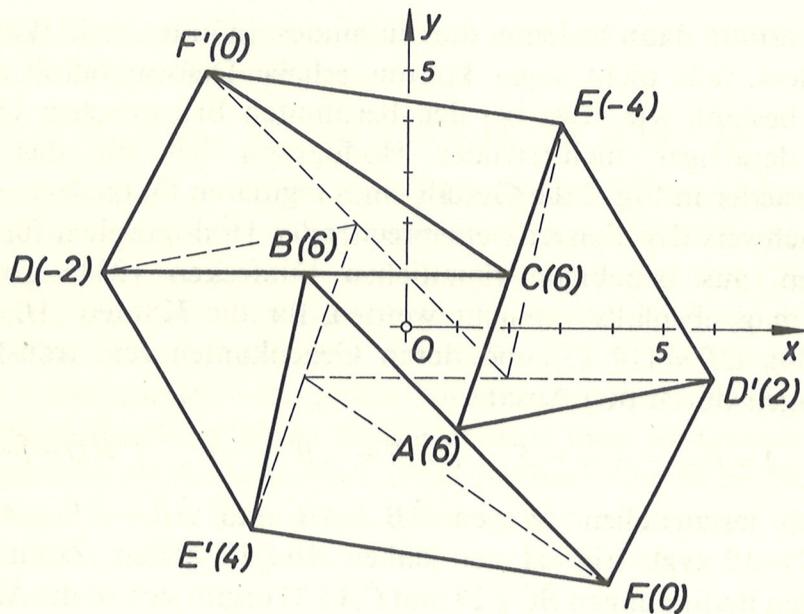


Fig. 3

7

Von der in Fig. 2 abgebildeten Sonderform hat Goldberg [1] erkannt, daß bei gelenkiger Ausführung der Kantenverbindungen *wackelig* ist. An entsprechenden Demonstrationsmodellen ist die theoretisch bloß infinitesimale Beweglichkeit deutlich zu bemerken.<sup>2</sup> Bei festgehaltenem Achsenkreuz, erfahren die sechs Hohlkanten differentielle Verschiebungen gleichen Betrages in den aus Fig. 2 ersichtlichen Achsenrichtungen.

Werden die bei der Verlagerung zweier Punkte  $X, Y$  auftretenden Geschwindigkeitsvektoren mit  $\dot{X} = dX/dt$  und  $\dot{Y} = dy/dt$  bezeichnet, so gilt für die momentane Änderung  $\dot{e}$  ihrer Entfernung  $e$  wegen  $e^2 = (X - Y)^2$  die Beziehung<sup>3</sup>

$$(3) \quad e\dot{e} = (X - Y)(\dot{X} - \dot{Y}).$$

Mit  $\dot{e} = 0$  hat man daher für die augenblickliche Abstandsinvarianz der Punkte die notwendige und hinreichende Bedingung  $\dot{X} \dot{Y} \perp XY$ .

Sucht man zu sämtlichen Ecken  $X, Y, \dots$  eines bewegten starren Polyeders nach gewähltem Geschwindigkeitsmaßstab die Punkte  $\dot{X}, \dot{Y}, \dots$  auf, so wird der von diesen gebildete Geschwindigkeitsplan oder *Hodograph* eine Figur bilden, die sich in einer zur momentanen Schraubachse normalen Ebene befindet und zum Normalriß des Polyeders auf diese Ebene ähnlich ist. Existiert jedoch ein *nichtebener Hodograph*, der die Bedingungen

<sup>2</sup> Solche Modelle können wie üblich aus Karton angefertigt werden. Eine andere, mit geringem Aufwand herstellbare und den Vorzug der Durchsichtigkeit bietende Ausführung besteht aus Plastik-Trinkhalmen, die mittels durchgezogener Fäden verbunden werden.

<sup>3</sup> Da Mißverständnisse nicht zu befürchten sind, werden die Buchstabensymbole sowohl für die Punkte als auch für ihre Ortsvektoren verwendet.

$\dot{X} \dot{Y} \perp XY$  erfüllt, dann bedeutet dies zumindest infinitesimale *Wackeligkeit* des Polyeders, falls nicht sogar kontinuierliche Deformabilität endlichen Ausmaßes besteht, wie etwa bei den berühmten Bricardschen Oktaedern [3]. Ein derartiger nichttrivialer Hodograph hat für das spezielle Wackelikosaeder in Fig. 2 die Gestalt eines regulären Oktaeders.

Zum Nachweis der Existenz entsprechender Hodographen für alle hier betrachteten, aus beliebigen räumlichen Fünfecken 12345 abgeleiteten Ikosaeder mag ebenfalls versucht werden, für die Kanten  $AE = (24, 31)$ ,  $BF = (12, 34)$ ,  $CD = (14, 23)$  und deren Gegenkanten rein translatorische Verlagerungen durch den Ansatz

$$(4) \quad \dot{A} = \dot{E} = -\dot{A}' = -\dot{E}', \quad \dot{B} = \dot{F} = -\dot{B}' = -\dot{F}', \quad \dot{C} = \dot{D} = -\dot{C}' = -\dot{D}'$$

als möglich festzustellen. Wegen  $\dot{A}\dot{B} \perp AB$  und  $\dot{A}\dot{B} = \dot{A}\dot{F} \perp AF$  müßte  $\dot{A}\dot{B} \perp ABF = 12$  (vgl. Fig. 1) und daher  $\dot{A}\dot{B} \parallel 12$  gelten. Zusammen mit den analogen Bedingungen  $\dot{B}\dot{C} \parallel 23$  und  $\dot{C}\dot{A} \parallel 31$  ergibt sich so die Ähnlichkeit der Dreiecke  $\dot{A}\dot{B}\dot{C} \sim 123$ . Auf gleiche Weise gelangt man insgesamt zu den Ähnlichkeitsbeziehungen

$$(5) \quad \dot{A}\dot{B}\dot{C} \sim 123, \quad \dot{D}\dot{B}\dot{E}' = \dot{C}\dot{B}\dot{A}' \sim 234, \quad \dot{E}\dot{C}\dot{F}' = \dot{A}\dot{C}\dot{B}' \sim 314, \\ \dot{F}\dot{A}\dot{D}' = \dot{B}\dot{A}\dot{C}' \sim 124.$$

Aufgrund der notwendig gleichen Ähnlichkeitsfaktoren lassen sich alle diese Forderungen durch *Kongruenzen* erfüllen, indem man die Seitenflächen des Tetraeders 1234 passend verschiebt (Fig. 4). Der Hodograph hat also ebenfalls die Gestalt eines zentrisch-symmetrischen *Oktaeders*, das aber im allgemeinen nicht regulär sein wird. Mit diesem nichtebenen Geschwindigkeitsdiagramm ist offenbar nachgewiesen der

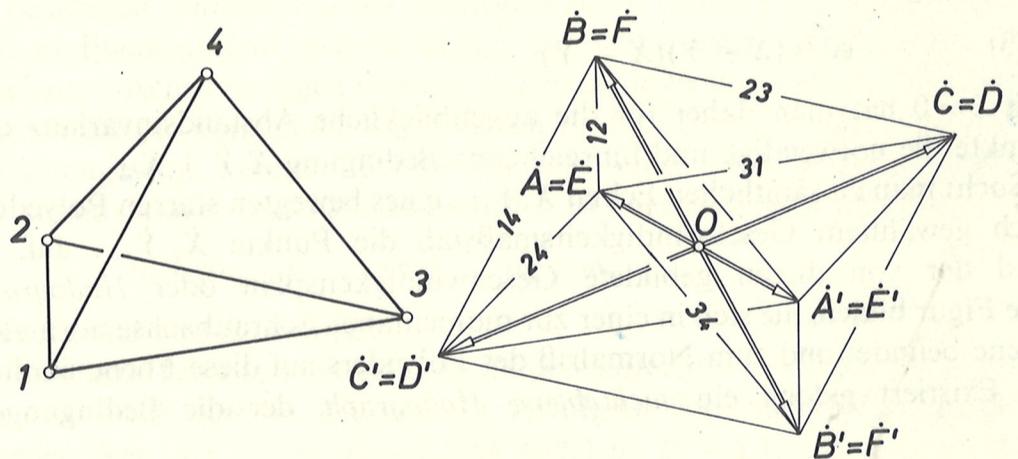


Fig. 4

**SATZ.** Sämtliche aus nichtausgearteten Fünfecken vermöge der Vorschrift (1) abgeleiteten Ikosaeder sind wackelig.

Aus Fig. 4 entnimmt man noch für die maßgebenden Geschwindigkeiten die einfachen Bestimmungsgleichungen

$$(6) \quad 2\dot{A} = 24 + 31, \quad 2\dot{B} = 12 + 34, \quad 2\dot{C} = 14 + 23.$$

Die Darstellungen  $\dot{A} = \frac{1}{2}(4 + 1) - \frac{1}{2}(2 + 3)$  usw. lehren dann, daß die Geschwindigkeitsvektoren durch jene Strecken repräsentiert werden, welche die Mittelpunkte gegenüberliegender Kanten des Tetraeders 1234 verbinden.

Auffällig ist, daß der Hodograph gar nicht von der Lage des Punktes 5 abhängt. Dieser beeinflußt bloß die Stellung jener Ikosaederflächen, die von den translatorisch verlagerten Kanten ausgehen. Nach allem ist die Wackeligkeit der betrachteten Ikosaeder trotz ihres im Grunde metrischen Charakters eine *affine Eigenschaft*. Diese Beobachtung ist bei Stabilitätsproblemen immer wieder zu machen, sofern es sich nicht sogar um projektive Eigenschaften handelt, wie etwa bei den Wackeloktaedern Blaschkes [3].

8

Bezeichne  $\Omega_m$  jene reguläre *Quadrik*, die durch das Poltetraeder  $ijkl$  und den Mittelpunkt  $m$  bestimmt ist. Die von den Fernelementen des vollständigen Fünfecks 12345 gebildete *Desarguessche Konfiguration*  $\mathcal{D}$  (Abschnitt 3 und 4) ist bezüglich des Fernkegelschnitts  $o$  von  $\Omega_m$  *autopolar*, und zwar ist jeweils der Punkt  $ij$  Pol der Geraden  $klm$ . Hierdurch ist  $o$  eindeutig bestimmt und daher allen fünf Quadriken  $\Omega$  gemeinsam.

Durch Ausübung der absoluten Polarität in der Fernebene gelangt man daselbst von  $\mathcal{D}$  zu einer *zweiten Desarguesschen Konfiguration*  $\mathcal{D}^*$ , deren Geraden zufolge (1) von den Seitenflächen des Ikosaeders herrühren; sie ist autopolar bezüglich des zu  $o$  absolut polaren Kegelschnitts  $o^*$ .

Ist die konvexe Hülle des Fünfecks 12345 ein Tetraeder  $ijkl$ , so liegt der Mittelpunkt  $m$  im Inneren desselben und die Quadrik  $\Omega_m$  ist nullteilig,  $o$  mithin ein *nullteiliger Kegelschnitt* und  $o^*$  ebenso. In diesem Fall kann  $o^*$  durch eine reelle Affinität in den absoluten Kugelkreis übergeführt werden, wobei das aus dem Fünfeck abgeleitete Ikosaeder in ein *orthogonales* übergeht. Wie Jessen gezeigt hat [2], ist ein orthogonales Ikosaeder einer Kugel eingeschrieben, woraus nun die Existenz eines dem ursprünglichen Ikosaeder *umschriebenen Ellipsoids* (mit dem Mittelpunkt  $O$  und dem Fernkegelschnitt  $o^*$ ) folgt.

Gehören hingegen sämtliche Punkte des erzeugenden Fünfecks dessen konvexer Hülle an, so kann man diese als Doppelpyramide mit dreieckiger Basis auffassen. Die fünf Quadriken  $\Omega$  sind dann Hyperboloide mit gemeinsamem *einteiligen Fernkegelschnitt*  $o$ . Auf dem Weg übers Komplexe ergibt sich nun, daß das abgeleitete Ikosaeder einem *Hyperboloid* eingeschrieben ist.

**SATZ 2.** Die zwölf Ecken eines aus einem nichtausgearteten Fünfeck abgeleiteten Wackelikosaeders liegen auf einer Quadrik. Diese ist ein Ellipsoid

oder ein Hyperboloid, je nachdem ob der konvexen Hülle des Fünfecks bloß vier oder aber alle fünf Punkte angehören.

9

Um zu übersichtlichen Sonderformen von Wackelikosaedern mit dreizähliger Symmetrieachse zu gelangen, wird man von entsprechenden Fünfecken ausgehen, deren Ecken mit  $1(2r, 0, 0)$ ,  $2(-r, -r\sqrt{3}, 0)$ ,  $3(-r, r\sqrt{3}, 0)$ ,  $4(0, 0, u)$  und  $5(0, 0, v)$  angesetzt werden mögen. Auf dem in Abschnitt 5 beschrittenen Weg ergeben sich dann—nach Kürzung durch  $r$ —die Iko-saederecken  $A(0, 2(v-u), 3r\sqrt{3})$ ,  $B(\sqrt{3}(v-u), u-v, 3r\sqrt{3})$ ,  $C(\sqrt{3}(u-v), u-v, 3r\sqrt{3})$ ,  $D(-\sqrt{3}(u+v), u-v, -r\sqrt{3})$ ,  $E(u\sqrt{3}, u+2v, -r\sqrt{3})$  und  $F(v\sqrt{3}, -2u-v, -r\sqrt{3})$ ; für die Gegenecken  $A'$  bis  $F'$  sind bloß die Vorzeichen umzukehren.

Unter der Bedingung  $uv = 2r^2$  fällt 5 in den Höhenschnittpunkt des Tetraeders 1234 und man erhält ein orthogonales Ikosaeder, speziell das in Fig. 2 dargestellte für  $r : u : v = \sqrt{2} : 1 : 4$  (allerdings in anderer Aufstellung). Annahmen mit  $u = -v$  liefern nichtorthogonale Wackelikosaeder mit drei zweizähligen Symmetrieachsen; sie sind jeweils einem Drehhyperboloid eingeschrieben und besitzen 12 Hohlkanten. Fig. 5 zeigt die zu  $r : u : v = \sqrt{3} : -2 : 2$  gehörige Form, die durch acht gleichseitige Dreiecksflächen ausgezeichnet ist.

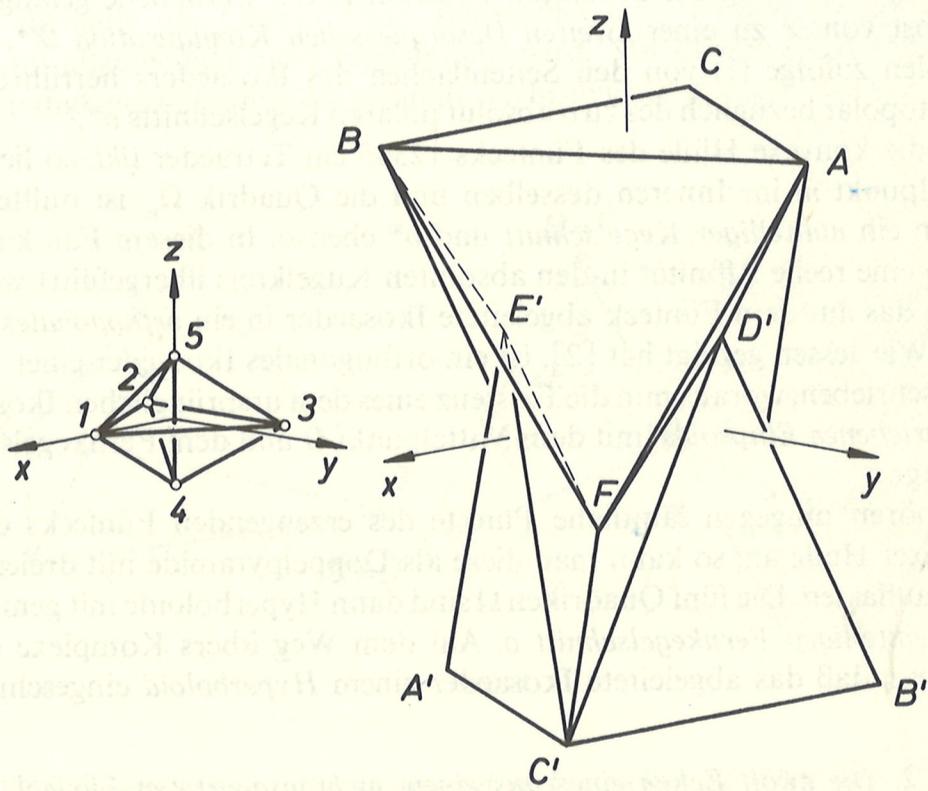


Fig. 5

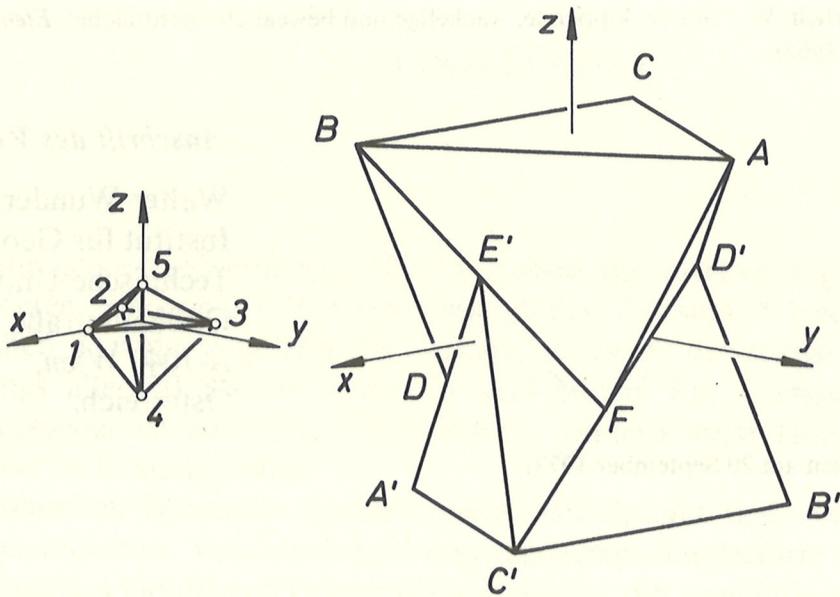


Fig. 6

10

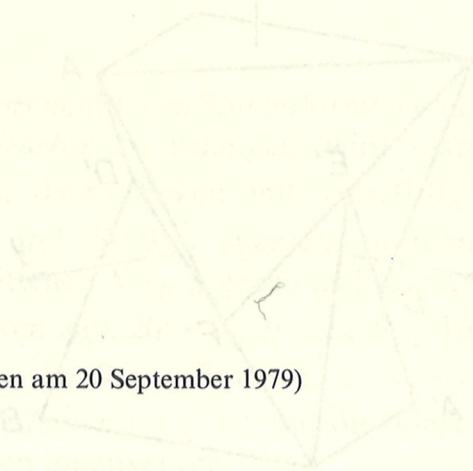
Verläuft im erzeugenden Fünfeck 12345 eine Seite  $ij$  parallel zur gegenüberliegenden Ebene  $klm$ , so weisen die drei Ikosaederkanten  $(ij, kl)$ ,  $(ij, lm)$  und  $(ij, mk)$  die gleiche Richtung normal zu  $klm$  auf, und das Dreieck  $ij$  schrumpft auf eine Strecke zusammen, ebenso natürlich auch das Gegen-dreieck  $ji$ . Eine solche Situation kann ein-, zwei- oder dreimal auftreten; die Anzahl der ursprünglich 20 Seitenflächen sinkt dadurch auf 18, 16 bzw. 14. Fig. 6 zeigt ein derartiges *Vierzehnflach*, das sich für die Annahme  $u = -2v$  in Abschnitt 9 einstellt.

Mit den verschwundenen Seitenflächen ist allerdings auch die Wackeligkeit verlorengegangen. Sei im erzeugenden Fünfeck etwa  $24 \parallel 135$ ; die Ecken  $A$ ,  $E$  und  $D'$  fallen dann in eine Gerade. Bei translatorischer Verlagerung der Kante  $AE$  gilt daher gemäß Abschnitt 7:  $\dot{A} = \dot{E} = \dot{D}' = \dot{C}'$ . Dies bedeutet, daß die für den Hodographen bestehenden, Wackeligkeit bedingenden Ähnlichkeitsrelationen (5) jetzt nicht mehr erfüllbar sind (vgl. Fig. 4). Die eingetretene *Starrheit* der reduzierten Polyeder macht jedoch keine Retusche von Satz 1 nötig, da dieser ausdrücklich nur von Ikosaedern spricht. Die Starrheit des Vierzehnflachs in Fig. 6 ist auch unmittelbar zu erkennen, weil etwa die im Punkt  $F$  zusammentreffenden Kanten feste Winkel miteinander einschließen, also ein unveränderliches Dreikant bilden.

## BIBLIOGRAPHIE

1. Goldberg, M., 'Unstable Polyhedral Structures', *Math. Magaz.* **51**, 165–170 (1978).
2. Jessen, B., 'Orthogonal Icosahedra', *Nordisk Mat. Tidsskrift* **15**, 90–96 (1967).

3. Wunderlich, W., 'Starre, kippende, wackelige und bewegliche Achtfläche', *Elem. Math.* **20**, 25-32 (1965).



*Anschrift des Verfassers:*

Walter Wunderlich,  
Institut für Geometrie,  
Technische Universität,  
Gußhausstraße 27,  
A-1040 Wien,  
Österreich.

(Eingegangen am 20 September 1979)

Mit dem vorliegenden Aufsatz wird auch die Wackeligkeit  
 von 20-seitigen Polyedern untersucht. Die Ecken  
 A, B, C, D, E, F, G, H sind in einer Ebene  
 der Kante AB gilt  $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = \angle E = \angle F = \angle G = \angle H$ . Dies bedeutet,  
 daß die für den Höcker bestehenden Wackelkanten bedingenden  
 Ähnlichkeitsrelationen (2) jetzt nicht mehr erfüllt sind (vgl. Fig. 4). Die  
 eingetragene Ebene der gegenüberliegenden Polyeder (nach jeder keine Kanten  
 von Seite 4) zeigt, daß die gegenüberliegenden Polyeder nicht mehr kongruent sind. Die  
 Struktur des Polyeders in Fig. 4 ist auch unmittelbar zu erkennen,  
 weil ein die Punkte A, B, C, D, E, F, G, H verbindendes Kantenfestes Winkelnetze  
 der eingezeichneten, also ein unterschiedliches Dreieck bilden.

1. Götz M., 'Unterschiede Polyedrischer Körper', *Math. Monat.* **41**, 163-170 (1978).  
 2. J. J. O'Rourke, 'Orthogonal Polyhedra', *Math. Mag.* **40**, 96-98 (1967).