Österreichische Akademie der Wissenschaften

Sitzung der mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse vom 26. März 1981

Sonderabdruck aus dem Anzeiger der math.-naturw. Klasse der Österreichischen Akademie der Wissenschaften, Jahrgang 1981, Nr. 3

(Seite 24 bis 29)

Das wirkl. Mitglied Walter Wunderlich übersendet eine von ihm selbst verfaßte kurze Mitteilung:

„Gewindekurven auf dem Torus."

1. Als Gewindekurven werden die von S. Lie ([1], S. 230; [2], S. 161) eingeführten Raumkurven bezeichnet, deren sämtliche Tangenten einem linearen Strahlkomplex (kurz: „Gewinde") angehören. In metrischer Auffassung kann ein solches Gewinde $\mathfrak{G}$ als Gesamtheit der ∞^3 Bahnnormalen einer Schraubung erklärt werden ([1, S. 211; [2], S. 160]). Macht man die Schraubachse zur z-Achse eines kartesischen Koordinatensystems, so hat im Fall einer Linksschraubung mit dem Parameter $-p<0$ der Bahntangentenvektor eines Punktes $P(x,y,z)$ die Komponenten $y, -x, p$. Ist also P laufender Punkt einer (glatten) Gewindekurve k, so muß seine Fortschreitrichtung $dx : dy : dz$ definitionsgemäß mit dem genannten Schraubtangentenvektor einen rechten Winkel bilden, was auf die kennzeichnende Pfaffsche Gleichung

$$y\ dx - x\ dy + p\ dz = 0 \tag{1.1}$$

führt ([1], S. 210). Jede reelle Gewindekurve ist dann gegen die Schraub- und Gewindeachse $x=y=0$ rechtsgewunden, abgesehen von den Stellen extremaler oder stationärer z-Kote ($dz=0$), für welche nämlich die Tangente die Achse rechtwinkelig trifft.

Die ∞^1 durch einen Punkt gehenden Gewindestrahlen $g \in \mathfrak{G}$ bilden ein Strahlbüschel in der Bahnnormalebene π von P. Die eindeutige Zuordnung $P \to \pi$ ist das bekannte, von F. A. Möbius entdeckte lineare Nullsystem, eine involutorische Korrelation ([1], S. 212). Die Haupteigenschaft einer Gewindekurve besteht nun darin, daß für jeden ihrer Punkte P die Schmiegebene mit der „Nullebene" π zusammenfällt.

Die bekanntesten Beispiele für Gewindekurven sind neben den algebraischen Raumkurven dritter Ordnung die Schraublinien, und zwar nicht bloß die euklidischen, sondern nach K. Strubecker [3] auch die nichteuklidischen im projektiven Modell, darunter speziell die Kugelloxodromen. Aufgrund des projektiven Charakters der Nullkorrelation geht eine Gewindekurve durch eine beliebige projektive Transformation wieder in eine Gewindekurve über ([1], S. 220).

2. Die Frage nach Gewindekurven, die auf einer vorgegebenen Trägerfläche Φ verlaufen, verlangt die Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung. In jedem Punkt $P \in \Phi$ gibt es nämlich im allgemeinen nur eine einzige, einem vorgelegten Gewinde $\mathfrak{G}$ angehörende Flächentangente; sie ist der Schnitt der Nullebene π mit der Tangentialebene τ. Eine Ausnahme tritt allenfalls nur in solchen (vereinzelten) Stellen der Fläche auf, wo $\pi = \tau$.

Bemerkenswert sind u. a. die auf regulären Quadriken verlaufenden Gewindekurven, die bei K. Strubecker als nichteuklidische Schraublinien auftreten [3].

Liegt nun als Trägerfläche eine beliebige, mit dem Gewinde $\mathfrak{G}$ koaxiale Drehfläche Φ vor, so kann diese angesetzt werden durch

$$(2.1) \qquad x = r(v)\cos u, \quad y = r(v)\sin u, \quad z = z(v).$$

Unter der Annahme stetig differenzierbarer Funktionen $r(v)$ und $z(v)$ nimmt dann die Gleichung (1.1) die Gestalt

$$(2.2) \qquad r^2\,du - p\,dz = 0$$

an und liefert die Lösung

$$(2.3) \qquad u = p\int \frac{dz}{r^2} + C.$$

Wie zu erwarten, bilden die ∞^1 auf der Drehfläche verlaufenden Kurven des Gewindes $\mathfrak{G}$ eine Drehschar. Überdies ist zu erkennen, daß diese Gewindekurven durch die axiale Winkelzerrung $\bar{u} = mu$

mit $m = \text{const} \neq 0$ [3,4] in neue, derselben Trägerfläche Φ angehörende Kurven eines anderen koaxialen Gewindes mit dem Parameter $\bar{p} = mp$ übergehen, obwohl die ausgeübte Transformation keine projektive ist.

3. Ist im besonderen die Drehfläche Φ ein Torus, festgelegt durch den Mittenkreisradius a und den Meridiankreisradius b, so liegt der Ansatz $r = a + b\cos v$, $z = b\sin v$ nahe. Günstiger sind jedoch die von vornherein auf die verschiedenen, für gewöhnlich als Ring-, Spindel- und Dorntorus bezeichneten Typen abgestimmten Ansätze, die sich schon bei den Torusloxodromen [5] bewährt haben.

Im Falle des Ringtorus ($a > b > 0$) verwende man die Darstellung

$$(3.1) \qquad r = \frac{c^2}{a - b\cos v}, \qquad z = \frac{bc\sin v}{a - b\cos v}, \quad \text{mit } c^2 = a^2 - b^2.$$

c bedeutet dabei den Radius des allen Orthogonalkugeln von Φ gemeinsamen Kreises in der Ebene $z = 0$, und v den Schnittwinkel dieser Ebene mit der den Parallelkreis $v = \text{const}$ enthaltenden Orthogonalkugel. Über das Integral (2.3) gelangt man so zu den auf Φ verlaufenden Gewindekurven mit

$$(3.2) \qquad u = \frac{bp}{c^3}(a\sin v - bv) + C.$$

Sie sind stets transzendent, auch wenn sie geschlossen ausfallen, was für rationale Werte von abp/c^3 und $b^2\,p/c^3$ eintritt (und rationales a/b bedingt). Abb. 1 zeigt den Grundriß einer solchen geschlossenen Gewindekurve für die Annahme $a = 2$, $b = 1$, $c = p = \sqrt{3}$. Die zu anderen koaxialen Gewinden gehörigen Kurven auf demselben Torus gehen durch axiale Winkelzerrung daraus hervor.

Die im Grundriß sichtbaren Wendepunkte sind keine scheinbaren, weil die Schmieg- und Nullebene eines eigentlichen Gewindekurvenpunktes nicht zur Gewindeachse parallel sein kann. Es handelt sich vielmehr um Wendepunkte der Gewindekurve k selbst. An solchen Stellen ist die Tangente von k Schmiegtangente der Fläche Φ und berührt daher daselbst eine Schmieglinie

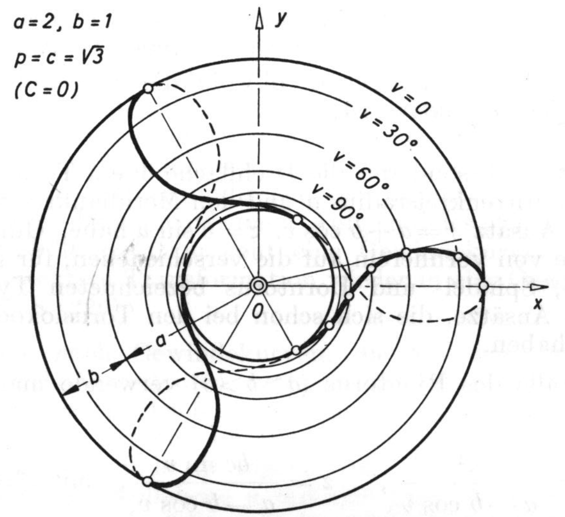

Abb. 1. Geschlossene Gewindekurve auf einem Ringtorus.

von Φ. Die Differentialgleichung der Schmieglinien einer beliebigen Drehfläche (2.1) lautet, wie man über die zweite Grundform der Flächentheorie feststellt:

(3.3) $$u'^2 = \frac{r''z' - r'z''}{rz'} = \frac{z'}{r}\left(\frac{r'}{z'}\right)' ;$$

hierbei deutet der Akzent die Ableitung nach v an. Im Falle des Torus (3.1) lautet diese Gleichung

(3.4) $$u'^2 = \frac{b}{b - a\cos v} .$$

Berührung der Gewindekurve k (3.2) mit einer Schmieglinie (3.4) findet daher auf den durch

(3.5) $$(b - a\cos v)^3 = c^6/bp^2$$

bestimmten Parallelkreisen v=const statt. Ihr Radius beträgt

(3.6) $$r = \frac{a}{1+\alpha} \text{ mit } \alpha^3 = (b/p)^2 .$$

Reell sind diese Wendepunkte nur dann vorhanden, wenn $bp^2 \geqq (a-b)^3$. Bei der Annahme für Abb. 1 etwa findet man: $v = 122{,}7°$ und $r = 1{,}181$.

In der durch

(3.7) $$\xi = cu, \qquad \eta = bv$$

vermittelten konformen Abbildung des Ringtorus Φ (3.1) auf die $\xi\eta$-Ebene — in der die Torusloxodromen gerade erscheinen ([4], [5]) — bilden sich die Gewindekurven (3.2) auf affin verzerrte Sinuslinien ab.

4. Im Falle eines Spindeltorus ($b > a > 0$) ist der Ansatz (3.1) durch

(4.1) $$r = \frac{c^2}{a + b\,\mathrm{ch}\,v}, \; z = \frac{bc\,\mathrm{sh}\,v}{a + b\,\mathrm{ch}\,v} \text{ mit } c^2 = b^2 - a^2$$

zu ersetzen. Die Gewindekurven auf dem inneren (spindelförmigen) Mantel werden dann durch

(4.2) $$u = \frac{bp}{c^3}(a\,\mathrm{sh}\,v + bv) + C$$

erfaßt. Für den äußeren (apfelförmigen) Torusmantel ist bloß das Vorzeichen von b umzukehren. Auf beiden Mänteln streben die Gewindekurven mit $v \to \pm\infty$ in immer enger werdenden Windungen den beiden reellen Knotenpunkten $(0, 0, \pm c)$ zu.

Im Grenzfall $a = 0$, der durch $b = c = 1$ normiert werden mag, verschmelzen die beiden Torusmäntel zur Einheitskugel

(4.3) $$r = 1/\mathrm{ch}\,v, \qquad z = \mathrm{th}\,v,$$

und man gelangt zu den Kugelloxodromen $u = pv + C$ (Schraublinien des hyperbolischen Raumes [3]). In der konformen Abbildung $\xi = u$, $\eta = v$ (Mercator-Projektion) erscheinen diese „Wege konstanten Kurses“ als parallele Geraden.

5. Im Übergangsfall des Dorntorus, der durch $a = b = 1/2$ normiert werden soll, ist der Ansatz

(5.1) $$r = \frac{1}{1+v^2}, \; z = \frac{v}{1+v^2}$$

zu verwenden. Die Gewindekurven sind dann beschrieben durch

$$u = p\left(v - \tfrac{1}{3} v^3\right) + C. \tag{5.2}$$

Ihre Wendepunkte werden erhalten mit

$$p^2 (v^2 - 1)^3 = 2. \tag{5.3}$$

In der konformen Abbildung $\xi = u$, $\eta = v$ — die als Abwicklung des aus dem Torus durch Inversion an der Einheitskugel gewonnenen Drehzylinders gedeutet werden kann — erscheinen die Gewindekurven als kubische Parebeln.

Literatur

[1] Lie, S. und Scheffers, G.: Geometrie der Berührungstransformationen. Teubner, Leipzig 1896.

[2] Müller, E. und Krames, J.: Konstruktive Behandlung der Regelflächen (Vorl. über Darst. Geometrie, Bd. III). Deuticke, Leipzig/Wien 1931.

[3] Strubecker, K.: Über die Schraubungen des elliptischen Raumes. Sb. Akad. Wiss. Wien *139* (1930), 421—450. — Über nichteuklidische Schraubungen. Monatsh. Math. Phys. *38* (1931), 63—84.

[4] Strubecker, K.: Zur sphärischen Raumgeometrie. Monatsh. Math. Phys. *38* (1931), 275—290.

[5] Wunderlich, W.: Über die Torusloxodromen. Monatsh. Math. *56* (1952), 313—334.