Mh. Math. 92, 329—337 (1981)

Monatshefte für
Mathematik

Eine bemerkenswerte Familie von speziellen Gewindekurven

Von

Walter Wunderlich, Wien

Mit 2 Abbildungen

(Eingegangen am 16. Januar 1981)

Herrn Prof. F. Hohenberg zum 75. Geburtstag gewidmet

Abstract. A Remarkable Family of Curves, Whose Tangents Belong to a Linear Complex. The article discusses spatial curves of the named kind which are situated on a cylinder with a trochoidal cross section. Among these curves, simply representable in parametric form, there occur algebraic examples. The helicoidal surfaces which contain curves of the kind in question as distinguished geodesics allow a double generation by applying a screw motion to an affine helix.

1. Unter einem *Gewinde* $\mathfrak{G}$ versteht man in der Liniengeometrie den linearen Strahlkomplex. Dies ist jene dreiparametrige Mannigfaltigkeit von Geraden des dreidimensionalen Raumes, die analytisch durch eine linear-homogene Gleichung in Plückerkoordinaten definiert ist. Geometrisch kann $\mathfrak{G}$ als die Menge der Bahnnormalen einer Schraubung erklärt werden. Jeder Gewindestrahl ist Bahnnormale für alle seine Punkte, speziell die Binormale der Schraublinie des achsennächsten Punktes. Alle Gewindestrahlen durch einen vorgelegten Punkt P bilden ein Strahlbüschel in der Bahnnormalebene π von P [3]. Die umkehrbare Zuordnung $P \to \pi$ ist die von F. A. Möbius entdeckte involutorische *Nullkorrelation.*

Als *Gewindekurven* bezeichnet man nun solche Raumkurven, deren sämtliche Tangenten einem Gewinde angehören. Diese merkwürdigen Kurven wurden von S. Lie eingeführt [3] und seither wiederholt betrachtet. Als bekannteste Beispiele sind die Raumkurven 3. Ordnung, die Schraublinien und die Kugelloxodromen zu nennen [5]. Letztere sind nach K. Strubecker als Schraublinien des hyperbolischen Raums im projektiven Modell aufzufassen, während die analogen Schraublinien des elliptischen Raums Vertreter algebraischer Gewindekurven umfassen [6]. Eine grundlegende Eigen-

0026—9255/81/0092/0329/$01.80

schaft der Gewindekurven besteht darin, daß in jedem ihrer Punkte P die Schmiegebene mit der Nullebene π von P zusammenfällt; π enthält naturgemäß das aus P auf die Gewindeachse fällbare Lot.

Wird die Gewinde- und Schraubachse mit der z-Achse eines kartesischen Koordinatensystems $(O; x, y, z)$ identifiziert, so wird die *Schraubung* $P_0 \to P$ dargestellt durch

$$x = x_0 \cos v - y_0 \sin v,\ y = x_0 \sin v + y_0 \cos v,\ z = z_0 - c\,v. \quad (1)$$

Die Konstante $-c$ bezeichnet dabei den Schraubparameter (die reduzierte Ganghöhe), während c den Gewindeparameter bedeutet. Für $c > 0$ ist (1) eine Linksschraubung, so daß die Bahnnormalen bezüglich der Achse rechtsgewunden sind („Rechtsgewinde" $\mathfrak{G}$), sofern sie dieselbe nicht treffen (was unter rechtem Winkel geschieht).

Die Ableitung von (1) nach der Zeitveränderlichen v liefert die Komponenten des Bahntangentenvektors von $P(x, y, z)$ mit

$$\dot{x} = -y,\ \dot{y} = x,\ \dot{z} = -c. \quad (2)$$

Für die dazu normale Fortschreitrichtung $dx : dy : dz$ eines durch P gehenden Gewindestrahls gilt daher

$$y\,dx - x\,dy + c\,dz = 0. \quad (3)$$

Dies ist also die die zu $\mathfrak{G}$ gehörigen Gewindekurven kennzeichnende (Pfaffsche) Differentialgleichung [3, 5].

2. Gibt man von einer solchen Gewindekurve k den *Grundriß* k' vor, also die Normalprojektion auf die xy-Ebene, so bestimmt sich k durch Integration von (3) über

$$z = \frac{1}{c} \int (x\,dy - y\,dx). \quad (4)$$

Der frei wählbaren Integrationskonstante entsprechend ergibt sich eine Translationsschar von Gewindekurven k auf dem über k' errichteten Zylinder.

Die vorliegende Untersuchung geht von der Annahme einer *Radlinie* k' aus, angesetzt durch

$$x = a \cos \alpha u + b \cos \beta u,\ y = a \sin \alpha u + b \sin \beta u \quad (5)$$

mit $a b \neq 0$, $\alpha \beta \neq 0$ und $\alpha \neq \beta$. Die Darstellung der Gewindekurve k wird gemäß (4) ergänzt durch

$$z = \frac{1}{c} \int [\alpha a^2 + \beta b^2 + (\alpha + \beta)\, a b \cos(\alpha - \beta) u]\, du,$$

also (bei Unterdrückung der Integrationskonstante):

$$z = p u + q \sin(\alpha - \beta) u \quad \text{mit } p = \frac{\alpha a^2 + \beta b^2}{c},\ q = \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} \cdot \frac{a b}{c}. \quad (6)$$

Die so gewonnene Gewindekurve k kann kinematisch als Punktbahn einer räumlichen Bewegung $\mathfrak{B}$ gedeutet werden, welche als „*fortschreitender harmonischer Planetenumschwung*" bezeichnet werden mag, weil sie sich zusammensetzt aus einer Planetenbewegung (Drehzylinderrollung), einer gleichförmigen Schiebung in z-Richtung (Geschwindigkeit p) und einer überlagerten harmonischen Schwingung längs der z-Achse (Amplitude q, Frequenz $\alpha - \beta$).

3. Unterwirft man die Gewindekurve k der Schraubung (1), so entsteht eine *Schraubfläche* Φ, dargestellt durch

$$\begin{aligned} x &= a \cos(\alpha u + v) + b \cos(\beta u + v), \\ y &= a \sin(\alpha u + v) + b \sin(\beta u + v), \\ z &= p u - c v + q \sin(\alpha - \beta) u. \end{aligned} \quad (7)$$

Die Gewindekurve k $(v = 0)$ und ihre Schraublagen $v = \text{const}$ durchsetzen die auf Φ verlaufenden Bahnschraublinien $u = \text{const}$ orthogonal. In jedem Punkt P von k ist die Schmiegebene π (als Bahnnormalebene von P) normal zur Tangentialebene von Φ: Die Kurve k ist daher *geodätische Linie* von Φ, und Gleiches gilt natürlich auch für ihre Schraublagen. Diese ausgezeichneten geodätischen Linien einer Schraubfläche, die mit den Schraubbahnen ein orthogonales Netz bilden, wurden von E. MÜLLER [5] deren „*Hauptgeodätische*" genannt. Die übrigen Geodätischen einer Schraubfläche sind keine Gewindekurven; ihre Tangenten gehören vielmehr jeweils einem von ∞^1 metrisch speziellen quadratischen Strahlkomplexen an [10].

Unter den auf der Schraubfläche Φ (7) verlaufenden Kurven sind die durch $v = -\alpha u$ bzw. $v = -\beta u$ definierten besonders zu erwähnen. Aus den entsprechenden Darstellungen

$$\begin{aligned} x &= a + b \cos(\beta - \alpha) u, \\ y &= \phantom{a + {}} b \sin(\beta - \alpha) u, \\ z &= (\alpha c + p) u - q \sin(\beta - \alpha) u \end{aligned} \quad (8)$$

bzw.

$$x = b + a\cos(\alpha - \beta)u,$$
$$y = \qquad a\sin(\alpha - \beta)u, \tag{9}$$
$$z = (\beta c + p)u + q\sin(\alpha - \beta)u$$

ist zu ersehen, daß es sich um *affine Schraublinien* handelt. Sie verlaufen auf z-parallelen Drehzylindern vom Radius b bzw. a und haben die Ganghöhen $h_1 = 2\pi(\alpha c + p)/(\beta - \alpha)$ bzw. $h_2 = 2\pi(\beta c + p)/(\alpha - \beta)$. Falls eine dieser Ganghöhen verschwindet, was für $\alpha(a^2 + c^2) + \beta b^2 = 0$ bzw. $\beta(b^2 + c^2) + \alpha a^2 = 0$ eintritt, so reduziert sich die betreffende Flächenkurve auf eine *Ellipse*. Die Schraubfläche Φ gestattet mithin eine *doppelte Erzeugung* durch Verschraubung einer affinen Schraublinie (8) oder (9), im erwähnten Sonderfall einer Ellipse.

4. Im *Sonderfall* $\alpha + \beta = 0$ — der ohne Einschränkung die Annahme $\alpha = 1$, $\beta = -1$ erlaubt — verschwindet wegen $q = 0$ die Schwingkomponente in (6). Um Ausartungen zu vermeiden, sei $p \neq 0$ vorausgesetzt (also $a^2 \neq b^2$). Die jetzt durch

$$x = (\alpha + b)\cos u, y = (a - b)\sin u,\ z = p\,u \text{ mit } p = (a^2 - b^2)/c \tag{10}$$

beschriebene Gewindekurve k ist eine auf einem elliptischen Zylinder verlaufende *affine Schraublinie* mit der Ganghöhe $h = 2\pi p$. Die k erzeugende Bewegung $\mathfrak{B}$ gehört zu den von H. HORNINGER [2] studierten „Trochoidenschraubungen", die sich wiederum den von F. HOHENBERG [1] betrachteten, aus proportionalen Schraubungen zusammengesetzten „Helikoidenbewegungen" unterordnen.

Die Parameterdarstellung (7) der die Gewindekurve k als Hauptgeodätische tragenden Schraubfläche Φ vereinfacht sich zu

$$x = a\cos(u + v) + b\cos(u - v),$$
$$y = a\sin(u + v) - b\sin(u - v), \tag{11}$$
$$z = p\,u - c\,v.$$

Die auf Φ verlaufenden Flächenkurven (8) und (9), definiert durch $v = \pm u$, erweisen sich jetzt als *gewöhnliche Schraublinien* mit den Basisradien b bzw. a und den Ganghöhen $h_{1,2} = -\pi(c \pm p)$. Hieraus folgt, daß Φ eine *Schraubschiebfläche* ist, die durch Verschiebung der Schraublinie $v = -u$ längs der Schraublinie $v = u$ oder umgekehrt

entsteht [4]. Ihre *Schichtenlinie* $z = 0$, gekennzeichnet durch $v = p\,u/c$, ist daher eine *Radlinie* mit der Charakteristik $(p + c):(p - c)$. Abgesehen von den genannten ausgezeichneten Flächenkurven trägt Φ noch ∞^1 Schraubscharen von weiteren Trochoidenschraublinien [2], die aus $v/u = \text{const}$ hervorgehen und im Grundriß als Radlinien erscheinen.

Als komplexgeometrisches Gegenstück wären die *Schraubminimalflächen* anzuführen, die bekanntlich auch zu den Schraubschiebflächen gehören, weil sie nach S. LIE durch Verschiebung einer Minimalschraublinie längs einer anderen erzeugt werden können. Diese Flächen — Zwischenformen bei der Verbiegung der Katenoids zur Wendelfläche — besitzen als Hauptgeodätische ihre Eigenschattengrenzen für achsennormale Parallelbeleuchtung. Im Grundriß erscheinen diese Gewindekurven als *Hyperbeln*, während die Lichtzylinder Kettenlinien zu Querschnitten haben [9]. Im Hinblick auf (10) lassen sich die Schraubminimalflächen mittels konjugiert-komplexer Werte $a = m + i\,n$, $b = m - i\,n$ (m, n reell) in die voranstehenden Entwicklungen einordnen, wenn man den Schraubparameter mit $c = 2n$ festsetzt; der reelle Zug der Gewindekurve k wird dabei mit rein-imaginären Werten der Veränderlichen u durchlaufen.

5. Ein *zweiter Sonderfall* stellt sich ein, wenn das linearen Glied $p\,u$ in (6) verschwindet, was unter der Nebenbedingung

$$\alpha a^2 + \beta b^2 = 0 \tag{12}$$

eintritt. Um Ausartungen zu vermeiden, ist die im vorigen Abschnitt behandelte Annahme $\alpha + \beta = 0$ ($q = 0$) auszuschließen. Die Gewindekurve k ist dann Bahn eines *„harmonischen Planetenumschwungs"* $\mathfrak{B}$ (ohne fortschreitende Komponente). Sie verläuft auf einer ringförmigen *Drehfläche* Ψ, beschrieben durch

$$x = a\cos(\alpha u + v) + b\cos(\beta u + v),$$
$$y = a\sin(\alpha u + v) + b\sin(\beta u + v), \tag{13}$$
$$z = q\sin(\alpha - \beta)u.$$

Unter den auf Ψ verlaufenden Flächenkurven sind die durch $v = -\alpha u$ bzw. $v = -\beta u$ erklärten *Ellipsen* l_1, l_2 hervorzuheben, die in den Ebenen $q y + b z = 0$ bzw. $q y - a z = 0$ liegen. Da sie im Grundriß als Kreise erscheinen (Abb. 1), sind sie im Sinne K. STRUBECKERS [7] als „Kreise" des durch das Bogenelementquadrat $ds^2 =$

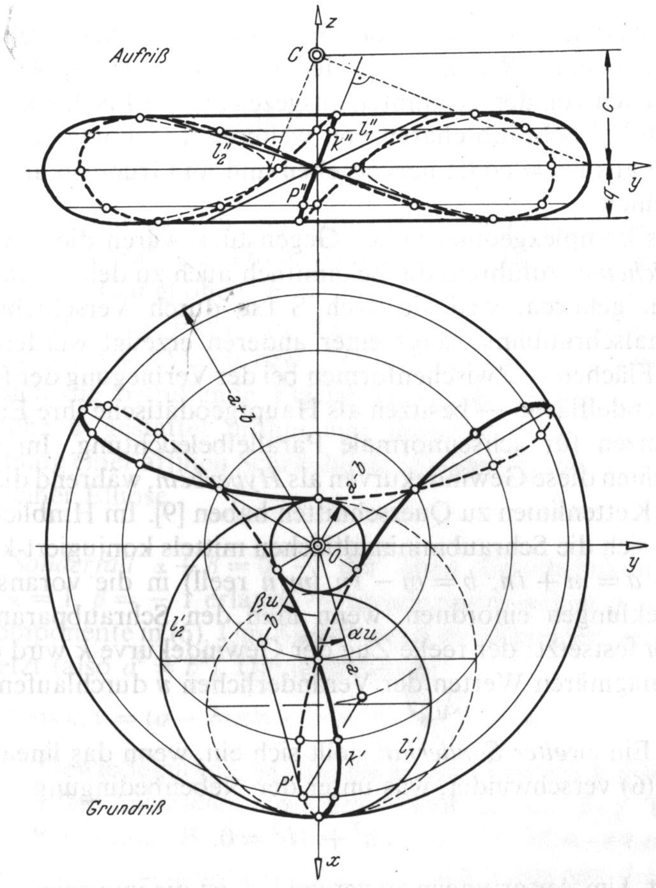

Abb. 1. Algebraische Gewindekurve 6. Ordnung
($\alpha = 1, \beta = -2;\ a = \sqrt{2},\ b = 1,\ c = 1;\ p = 0,\ q = -\sqrt{2/3}$)

$= dx^2 + dy^2$ metrisierten „isotropen Raumes“ aufzufassen. Demzufolge kann die Drehfläche Ψ als „*isotrope Drehzyklide*“ angesprochen werden. Es handelt sich um eine *algebraische Drehfläche 4. Ordnung*, deren Meridian wegen

$$x^2 + y^2 = a^2 + b^2 + 2\,a\,b\cos(\alpha - \beta)\,u$$

die zu $x = 0$ gehörige Gleichung

$$q^2(y^2 - a^2 - b^2)^2 + 4\,a^2 b^2 (z^2 - q^2) = 0 \qquad (14)$$

hat. Diese doppelt-symmetrische Quartik besteht aus zwei kongruen-

ten Ovalen (Abb. 1) und weist eine isolierte Selbstberührung im Fernpunkt der z-Achse auf.

Die Gewindekurve k kann als Bahn des Schnittpunktes P der Ellipsen l_1 und l_2 angesehen werden, wenn dieselben mit den konstanten Winkelgeschwindigkeiten α und β um die z-Achse kreisen. Da diese Drehungen mit Rücksicht auf (12) im reellen Fall stets gegensinnig erfolgen, ist der Grundriß k' von k (5) eine *Hypotrochoide*.

6. Bei *rationalem Geschwindigkeitsverhältnis* α/β fallen die im vorigen Abschnitt behandelten *Gewindekurven* k geschlossen und daher *algebraisch* aus. Um ihre Ordnung N zu bestimmen, seien die Werte $\alpha > 0$ und $\beta < 0$ ganz und teilerfremd vorausgesetzt, wobei jedoch mit Rücksicht auf $q \neq 0$ die Annahme $\alpha = 1, \beta = -1$ auszuschließen ist (wegen der Gleichberechtigung der beiden Geschwindigkeiten könnte sogar $\beta < -\alpha$ festgesetzt werden). Nach Übergang zum rationalisierenden (komplexen) Parameter $t = e^{iu}$ in der Darstellung (13), in der $v = 0$ zu setzen ist, ergibt sich die *Ordnung* von k mit

$$N = 2(\alpha - \beta)\,. \qquad (15)$$

Die Ordnung der Hypotrochoide k' (5) beträgt hingegen bloß $N' = 2\max(\alpha, -\beta)$. Der Ordnungsunterschied beruht darauf, daß der Fernpunkt der z-Achse der Kurve k mit der Vielfachheit $2\min(\alpha, -\beta)$ angehört. Die übrigen *Parallelprojektionen* von k haben

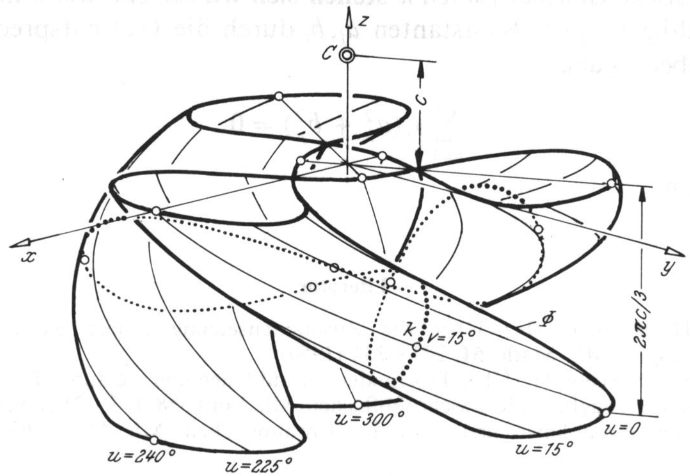

Abb. 2. Schraubfläche mit der Gewindesextik aus Abb. 1 als Hauptgeodätischer

durchwegs die Ordnung N; es handelt sich dabei um *höhere Radlinien* [8], und zwar um solche 4. bzw. 6. Stufe, je nachdem ob die Bildebene zur z-Achse normal ist oder nicht. Die Wendepunkte der Bildkurve liegen jeweils auf einer Geraden, nämlich auf der Spur der Nullebene des Projektionszentrums.

Die Abbildungen 1 und 2 illustrieren die einfachste Annahme $\alpha = 1$, $\beta = -2$. Die Gewindekurve k ist gemäß (15) eine Sextik, ihr Grundriß k' eine Quartik. Ihr Aufriß k'' in Abb. 1 und ihr axonometrisches Bild in Abb. 2 sind Radlinien 6. Stufe mit der Charakteristik $1:-1:2:-2:3:-3$. Abb. 2 vermittelt auch eine Vorstellung von jener Schraubfläche Φ (7), auf welcher die Gewindekurve k als Hauptgeodätische verläuft.

8. Eine umfassende Familie von speziellen Gewindekurven ergibt sich, wenn als Grundriß k' eine *Radlinie beliebiger Stufe* s angenommen wird [8], was auf den verallgemeinerten Ansatz

$$x = \sum_{j=0}^{s} (a_j \cos \alpha_j u - b_j \sin \alpha_j u)\,, \qquad y = \sum_{j=0}^{s} (a_j \sin \alpha_j u + b_j \cos \alpha_j u) \text{ mit } \alpha_0 = 0 \tag{16}$$

hinausläuft. Der Ansatz (5) ordnet sich mit $s = 2$ und $a_0 = b_j = 0$ ein. *Algebraische Gewindekurven* k stellen sich wieder ein, wenn man bei ganzzahligen α_j die Konstanten a_j, b_j durch die (12) entsprechende Nebenbedingung

$$\sum_{j=1}^{s} \alpha_j (a_j^2 + b_j^2) = 0 \tag{17}$$

abstimmt.

Literatur

[1] HOHENBERG, F.: Über die Zusammensetzung zweier gleichförmiger Schraubungen. Mh. Math. **54**, 221—234 (1950).

[2] HORNINGER, H.: Über Trochoidenschraublinien und die durch Trochoidenschraubung erzeugbaren Kreisschraubflächen. Mh. Math. **58**, 193—212 (1954). Über Trochoidenschraublinien und zyklische Schraubflächen. Mh. Math. **63**, 39—58 (1958).

[3] LIE, S., SCHEFFERS, G.: Geometrie der Berührungstransformationen. Leipzig: Teubner. 1896.

[4] MÜLLER, E.: Über Schiebflächen, deren eine Erzeugendenschar aus gewöhnlichen Schraublinien besteht. Sb. Akad. Wiss. Wien **118**, 3—13 (1919).

[5] MÜLLER, E.: Schraubflächen und Strahlgewinde. Sb. Akad. Wiss. Wien **125**, 921—965 (1916).

[6] STRUBECKER, K.: Über die Schraubungen des elliptischen Raumes. Sb. Akad. Wiss. Wien **139**, 421—450 (1930).

[7] STRUBECKER, K.: Differentialgeometrie des isotropen Raumes, I. Sb. Akad. Wiss. Wien **150**, 1—53 (1941).

[8] WUNDERLICH, W.: Höhere Radlinien. Österr. Ing. Arch. **1**, 277—296 (1947).

[9] WUNDERLICH, W.: Beitrag zur Kenntnis der Minimalschraubflächen. Comp. Math. **10**, 297—311 (1952).

[10] WUNDERLICH, W.: Zyklische Strahlkomplexe und geodätische Linien auf euklidischen und nichteuklidischen Dreh- und Schraubflächen. Math. Z. **85**, 407—418 (1964).

Prof. Dr. W. WUNDERLICH
Institut für Geometrie
Technische Universität Wien
Gußhausstraße 27
A-1040 Wien, Österreich

Printed in Austria