

# Über die von der kubischen Böschungstorse abgeleitete Pirondini-Schar windschiefer Regelflächen

Von  
w. M. Walter Wunderlich (Wien)

(Mit 5 Abbildungen)

(Vorgelegt in der Sitzung der math.-nat. Klasse am 24. April 1980)

## 1. Einleitung

Werden die Erzeugenden einer windschiefen Regelfläche  $\Phi_0$  des dreidimensionalen euklidischen Raumes bei der Verebnung der Zentraltorse  $\Gamma$  mitgenommen, so gehen sie nach G. Darboux [1, S. 345] in die Strahlen eines Parallelenbüschels über. Die Berührungslinie  $k$  von  $\Phi_0$  und  $\Gamma$  — die Kehlcurve oder Striktionslinie — ist durch diese Eigenschaft unter den Flächenkurven auf  $\Phi_0$  gekennzeichnet [3, S. 143]. Verdreht man also alle Erzeugenden von  $\Phi_0$  um ihren auf  $k$  befindlichen Zentral- oder Kehlpunkt  $K$  in der Zentralebene — d. i. die gemeinsame Tangentialebene von  $\Phi_0$  und  $\Gamma$  in  $K$  — um denselben Winkel  $\omega$ , so erfüllen die Neulagen eine „abgeleitete“ Regelfläche  $\Phi_\omega$ , die ebenfalls  $k$  zur Striktionslinie und  $\Gamma$  zur Zentraltorse hat, weil diese Verdrehung bloß eine Verschiebung des Parallelenbüschels in der Verebnung bewirkt. Dies ist der Inhalt des Satzes von G. Pirondini [4, S. 296].

Ist speziell  $\Gamma$  ein (lotrecht gedachter) Zylinder und  $k$  eine krumme Geodätische desselben, so geht  $k$  bei der Verebnung von  $\Gamma$  in eine

Gerade über und ist daher eine Böschungslinie. Weiterhin erkennt man auf Grund des Satzes von Darboux, daß die Erzeugenden jeder Regelfläche  $\Phi$ , die  $k$  zur Striktionslinie und  $\Gamma$  zur Zentralorse hat, gegen eine (waagrechte) Grundebene  $\pi$  gleich geneigt sind. Unter den Flächen der  $\Phi$  enthaltenen Pirondini-Schar befindet sich insbesondere die von den Tangenten der Kehlcurve  $k$  gebildete Böschungstorse, die als Ausgangsfläche  $\Phi_0$  dienen mag. Sie ist zwar nicht windschief, doch sind die Begriffe Striktionslinie und Zentralorse unmißverständlich zu interpretieren.

Einer Anregung von J. Krames folgend, befaßt sich die vorliegende Studie mit den von der *kubischen Böschungstorse*  $\Phi_0$  abgeleiteten windschiefen Regelflächen  $\Phi$ . Dieselben erweisen sich als *algebraische Regelflächen 5. Grades* mit manchen bemerkenswerten Eigenschaften. So zeigt sich, daß sie jeweils einem *Gewinde* (linearen Strahlkomplex) angehören, das unter Umständen ausarten kann. In einem solchen Fall besitzt die Fläche  $\Phi$  entweder eine vierfache Leitgerade oder aber eine dreifache sowie eine einfache. Im allgemeinen Fall tritt ein *quadratischer Leitzyylinder* auf, der durch die mit dem Gewinde verbundene Nullkorrelation aus dem unendlich fernen Leitkreis von  $\Phi$  hervorgeht. Auf den echten Gewindeflächen existieren nach S. Lie und F. Klein zwei *ausgezeichnete Schmieglinien*, die sich hier als Gewindekurven 4. Ordnung erweisen. Die übrigen krummen Schmieglinien lassen sich ebenfalls explizit angeben und fallen gelegentlich algebraisch aus. Die *Doppelkurve* von  $\Phi$  ist im allgemeinen von 6. Ordnung, artet aber im Fall vorhandener Leitgeraden aus.

2. Die kubische Böschungstorse

Die *Gratlinie*  $k$  einer algebraischen Böschungstorse 3. Klasse ist bekanntlich eine *kubische Parabel*, die gemäß [5] in kartesischen Koordinaten bei freibleibender Einheit angesetzt werden kann mit

$$x = u - \frac{1}{3}u^3, \quad y = u^2, \quad z = a \left( u + \frac{1}{3}u^3 \right). \tag{2.1}$$

Die Konstante  $a = \operatorname{tg} \alpha$  legt dabei den Steigungswinkel  $\alpha$  gegen die Grundebene  $\pi$  ( $z = 0$ ) fest, wie man durch Betrachtung der Differentiale

$$dx : dy : dz = 1 - u^2 : 2u : a(1 + u^2) \tag{2.2}$$

erkennt, die der Relation  $dz^2 = a^2(dx^2 + dy^2)$  genügen. Der verwendete Kurvenparameter  $u$  hängt vermöge  $u = \operatorname{tg}(\varphi/2)$  mit dem Tangentenazimut  $\varphi$  zusammen, das durch  $\operatorname{tg} \varphi = dy/dx$  bestimmt ist.

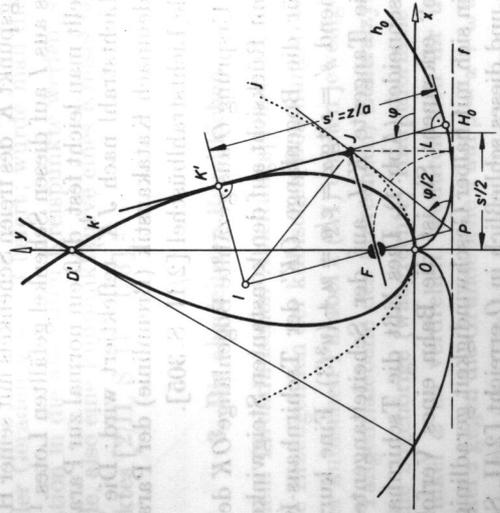


Abb. 1. Kinematische Erzeugung und Rektifikation der Tschirnhaus-Kubik.

Der die Basis des rektifizierenden (Zentral-)Zylinders  $\Gamma$  darstellende Grundriß  $k'$  der Böschungskubik  $k$  ist die wohlbekannte „Tschirnhaus-Kubik“ [5], manchmal auch als „Trisektrix von Catalan“ bezeichnet. Faßt man dieselbe etwa als negative Fußpunktkurve einer Parabel bezüglich ihres Brennpunktes auf [2/1, S. 90], so wird damit eine einfache kinematische Erzeugung bereitgestellt (Abb. 1): Wandert der Scheitel  $J$  eines rechten Winkels auf einer Parabel  $j$ , während ein Schenkel durch den festen Brennpunkt  $F$  geführt wird, so hüllt der zweite Schenkel eine Tschirnhaus-Kubik ein. Konstruktiv

wird man den zum Schenkel  $FJ$  normalen Fokalstrahl mit der Leitgeraden  $f$  schneiden; durch den so erreichten Pol  $P$  von  $FJ$  geht die Parabeltangente  $PJ$ , die auf Grund der Reflexionseigenschaft der Parabel mit  $FJ$  und dem in  $J$  einfallenden Durchmesser gleiche Winkel bildet. Schlägt man also die Strecke  $PF$  von  $P$  aus auf  $f$  ab, so erhält man den Fußpunkt des genannten Durchmessers, was eine bequeme Ermittlung des Parabelpunktes  $J$  erlaubt. Sucht man anschließend noch das Momentanzentrum  $I$  der Bewegung des rechten Winkels auf (im Schnitt der beiden Führungsnormale bei  $F$  und  $J$ ), so ergibt sich der Berührungspunkt  $K'$  des freien Schenkels mit seiner Hüllbahn  $k'$  als Fußpunkt des aus  $I$  auf diesen Schenkel gefällten Lotes.<sup>1</sup> — An Hand von Abb. 1 stellt man leicht fest, daß ein normal zur Parabelachse in  $J$  einfallender Lichtstrahl nach  $JK'$  reflektiert wird: Die Tschirnhaus-Kubik  $k'$  ist demnach Katakaustik (Brennlinie) der Parabel  $j$  für das achsennormale Lichtstrahlbüschel [2/II, S. 305].

Die vom Ursprung  $O$  aus gezählte Bogenlänge  $OK$  der Böschungskubik  $k$  hat mit Rücksicht auf den konstanten Steigungswinkel  $\alpha$  den Wert  $s = z/\sin \alpha$ ; für die Bogenlänge  $OK'$  der Tschirnhaus-Kubik  $k'$  gilt dementsprechend  $s' = z/\operatorname{tg} \alpha = z/a = u + (u^3/3)$ . Eine kurze Rechnung lehrt, daß die Tangente  $K'L$  auf der Scheiteltangente die Strecke  $OL = s'/2$  abschneidet (Abb. 1). Dies läßt die Tschirnhaus-Kubik als „Hundekurve“ erkennen: Sie ist die Bahn eines Verfolgers  $K'$ , der ständig auf ein sich mit halber Geschwindigkeit geradlinig bewegendes Ziel  $L$  zuhält und dieses schließlich in  $O$  erreicht [2/II, S. 247].

Trägt man auf den Tangenten von  $k$  die Bogenlänge  $s$  rückläufig auf (oder auf den Tangenten von  $k'$  die Bogenlänge  $s'$ ), so gelangt man zu der in der Grundebene  $\pi$  ( $z = 0$ ) verlaufenden *Basisspur*  $h_0$  der kubischen Böschungstorse  $\Phi_0$ ; sie fällt mit der von  $O$  ausgehenden Evolute der Tschirnhaus-Kubik  $k'$  zusammen und wird beschrieben

<sup>1</sup> Für die durch die ersten beiden Gleichungen (2.1) beschriebene Tschirnhaus-Kubik  $k'$  ist der Parameter der Parabel  $j$  mit  $2/3$  anzunehmen. Der Krümmungsradius in Scheitel  $O$  hat den Betrag  $1/2$ . In dem der Achse angehörenden Doppelpunkt  $D(0, 3)$  schließen die Tangenten einen Winkel von  $60^\circ$  ein; der Fernpunkt (in achsennormaler Richtung) ist Wendepunkt mit der Ferngeraden als Wendetangente.

durch

$$x = \frac{4u^3}{3(u^2 + 1)}, \quad y = \frac{u^4 - 3u^2}{3(u^2 + 1)}. \quad (2.3)$$

Es handelt sich mithin um eine *rationalen Quartik* (im Einklang mit der Ordnung 4 von  $\Phi_0$ ). Sie weist drei von der Gratlinie  $k$  herrührende Spitzen auf, die sich ergeben, wenn man in (2.1)  $z = 0$  setzt: Zu  $u = 0$  gehört die reelle Spitze  $O$ , während  $u^2 = -3$  zwei konjugiert-imaginäre Spitzen auf der Geraden  $y = -3$  liefert; würde man dieselben durch eine Kollineation in die absoluten Kreispunkte werfen, so ergäbe sich eine Kardioidenform, also eine Fußpunktkurve eines Kreises bezüglich eines Umfangspunktes [2/II, S. 147, 153].<sup>2</sup>

### 3. Die abgeleiteten Regelflächen

Gemäß dem Pirondinischen Ableitungsprozeß (Abschnitt 1) sind nun sämtliche Erzeugenden der kubischen Böschungstorse  $\Phi_0$ , also die Tangenten der kubischen Parabel  $k$  (2.1) um den jeweiligen Gratpunkt  $K \in k$  in der Tangentialebene des (lotrechten) Zentralzylinders  $\Gamma \supset k$  — d. h. um die zugehörige (waagrechte) Hauptnormale von  $k$  — um denselben Winkel  $\omega$  zu verdrehen, wodurch sich ihr ursprünglicher Neigungswinkel  $\alpha$  gegen die Grundebene  $\pi$  auf  $\beta = \alpha + \omega$  ändert. Die so gewonnene *Regelfläche*  $\Phi_\omega = \Phi$  hat dieselbe Kehlcurve  $k$  und denselben Zentralzylinder  $\Gamma$  wie die Ausgangsfläche  $\Phi_0$ ; sie wird in Parameterform dargestellt durch

$$x = u - \frac{1}{3}u^3 - (1 - u^2)v, \quad y = u^2 - 2uv, \quad (3.1)$$

$$z = a \left( u + \frac{1}{3}u^3 \right) - b(1 + u^2)v \quad \text{mit} \quad b = \operatorname{tg} \beta;$$

<sup>2</sup> Die recht ähnlich aussehende Evolute der Tschirnhaus-Kubik ist zwar auch eine rationale Quartik, jedoch kollinear zu einer Fußpunktkurve einer Ellipse (mit dem Achsenverhältnis 2:1).



Bedingungen für die einzelnen Potenzen von  $u$  die notwendigen Beziehungen

$$\begin{aligned}
 a_1 + b a_3 &= 0, & 2 a_2 + (a - b) a_5 &= 0, \\
 -a_1 + b a_3 + (b - 2 a) a_4 + a_6 &= 0, & & \\
 (a + b) a_5 &= 0, & (3 b - 2 a) a_4 + a_6 &= 0, & (b - a) a_5 &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{4.1}$$

Hieraus folgt zunächst  $a_2 = 0$ , sodann unter Ausschluß des trivialen Falles  $a = b = 0$  auch  $a_5 = 0$ . Die restlichen Koeffizienten ergeben sich aus dem verbleibenden Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
 a_1 + b a_3 &= 0, & a_1 + b a_3 &= 0, \\
 -a_1 + b a_3 + (b - 2 a) a_4 + a_6 &= 0, & & \\
 (3 b - 2 a) a_4 + a_6 &= 0 & &
 \end{aligned}
 \tag{4.2}$$

über  $b(a_3 - a_4) = 0$ . Dementsprechend sind zwei Fälle zu unterscheiden:

A.  $b \neq 0$ . Mit  $a_3 = a_4$  findet man

$$a_1 : a_2 : a_3 : a_4 : a_5 : a_6 = -b : 0 : 1 : 1 : 0 : 2 a - 3 b.
 \tag{4.3}$$

Die Fläche  $\Phi$  ist demnach in dem einzigen linearen Strahlkomplex

$$-b p_1 + p_3 + p_4 + (2 a - 3 b) p_6 = 0
 \tag{4.4}$$

enthalten, der für  $a \neq 2 b$  regulär, für  $a = 2 b$  jedoch singular ist.  $\Phi$  ist daher für  $a \neq 2 b \neq 0$  eine echte *Gewindfläche*. Für  $a = 2 b \neq 0$  besitzt  $\Phi$  hingegen eine *eigentliche Leitgerade*  $g$  mit den Plücker-Koordinaten  $1 : 0 : b : -b : 0 : 1$ , das ist die Gerade

$$y = -1, \quad z = b x;
 \tag{4.5}$$

sie wird sich in Abschnitt 6 als vierfache Gerade erweisen (Abb. 4).

**B.**  $b = 0$  ( $a \neq 0$ ). In diesem Fall sind die Gleichungen (4.2) linear abhängig, und man bekommt

$$a_1 : a_2 : a_3 : a_4 : a_5 : a_6 = 0 : 0 : m : 1 : 0 : 2 a
 \tag{4.6}$$

mit beliebigem  $m$ . Die Fläche  $\Phi$  ist jetzt in den  $\infty^1$  linearen Strahlkomplexen

$$m p_3 + p_4 + 2 a p_6 = 0
 \tag{4.7}$$

enthalten; diese bilden das von den beiden Gebüschen  $p_3 = 0$  und  $p_4 + 2 a p_6 = 0$  aufgespannte Strahlnetz.  $\Phi$  ist daher eine Netzfläche, und zwar ein *Konoid* mit der Grundebene  $\pi$  ( $z = 0$ ) als Richtebene und der eigentlichen Leitgeraden  $f$

$$y = 0, \quad z = 2 a x,
 \tag{4.8}$$

die sich in Abschnitt 6 als dreifache Gerade erweisen wird (Abb. 5).

### 5. Quadratische Leitzyylinder

Unter Ausschluß der Torse  $\Phi_0$  ( $a = b$ ) gestattet jede *echte Gewindfläche*  $\Phi$  ( $a \neq 2 b \neq 0$ ) die mit dem regulären Trägergewinde (4.4) verknüpfte *Nullkorrelation*  $\mathfrak{R}$ , welche sie erzeugendenweise in sich überführt und jedem Flächenpunkt eine (im allgemeinen jedoch nicht seine) Tangentialebene zuordnet. In homogenen Koordinaten  $x_0 : x_1 : x_2 : x_3 = 1 : x : y : z$  wird  $\mathfrak{R}$  beschrieben durch

$$\begin{aligned}
 & (b x_1 - x_3) x_0' - [b x_0 + (2 a - 3 b) x_2] x_1' + \\
 & + [(2 a - 3 b) x_1 - x_3] x_2' + (x_0 + x_2) x_3' = 0.
 \end{aligned}
 \tag{5.1}$$

$\mathfrak{R}$  weist damit jedem Raumpunkt  $X(x_0 : x_1 : x_2 : x_3)$  die ihm enthaltene Nullebene  $\xi'$  zu, die durch (5.1) in laufenden Koordinaten  $x_i'$  beschrieben wird.

<sup>3</sup> In bekannter Weise hat man bloß in (4.4)  $p_1 = x_0, x_1' = -x_1, x_0' = 0$  usw. zu setzen.

Auf Grund der gleichen Steigung  $b$  sämtlicher Erzeugenden von  $\Phi$  enthält die Fläche einen *uneigentlichen Leitkreis*  $l$ , erfüllt von den Fernpunkten  $v = \infty$  der Erzeugenden und gemäß (3.1) erfaßt durch

$$x_0 : x_1 : x_2 : x_3 = 0 : 1 - u^2 : 2u : b(1 + u^2). \quad (5.2)$$

Diesem Fernkreis  $l$  entspricht vermöge der Korrelation  $\mathfrak{K}$  ein *quadratischer Tangentialzylinder*  $\Lambda$  von  $\Phi$ , eingehüllt von den Punkten (5.2) vermöge (5.1) zugeordneten Nullebenen

$$b u^2 \cdot x_0' + (2a - 3b) u \cdot x_1' + [(a - b) u^2 - a + 2b] \cdot x_2' - u \cdot x_3' = 0. \quad (5.3)$$

Unter Heranziehung der Ableitung nach  $u$  erhält man die Parameterdarstellung des „Leitzylinders“  $\Lambda$  mit

$$[2(a - 3b)x_1' - x_3']^2 + 4(a - 2b)[bx_0' + (a - b)x_2']x_2' = 0. \quad (5.4)$$

Sein Profilkesschnitt in der  $yz$ -Ebene ( $x_1' = 0$ ) hat, inhomogen und mit Unterdrückung des Akzents geschrieben, die Gleichung

$$z^2 + 4(a - 2b)[(a - b)y + b]y = 0, \quad (5.5)$$

und ist also für  $1 < a/b < 2$  eine Hyperbel, sonst eine Ellipse (Abb. 3). Die unendlich ferne Spitze des Zylinders  $\Lambda$  befindet sich im Nullpunkt  $W(0 : 1 : 0 : 2a - 3b)$  der Fernebene  $x_0' = 0$ . Die beiden aus  $W$  an den Leitkreis  $l$  legbaren Tangenten sind Gewindestrahlen und gehören daher dem Leitzylinder  $\Lambda$  an; liegt also  $W$  innerhalb von  $l$ , so ist  $\Lambda$  elliptisch, andernfalls hyperbolisch ( $W \in l$  ist mit  $a = 2b$  ausgeschlossen).

Die *Berührungslinie* des Zylinders  $\Lambda$  mit der Regelfläche  $\Phi$  entspricht in der Nullkorrelation  $\mathfrak{K}$  der asymptotischen Torse, die  $\Phi$  längs  $l$  berührt. Deren Erzeugenden sind den Tangenten  $t$  von  $l$  zugeordnet. Man erhält also den Berührungspunkt der Tangentialebene (5.3), wenn man die zum Parameterwert  $u$  gehörige Erzeugende (3.1) von  $\Phi$  mit der Nullebene irgendeines Punktes von  $l$  schneidet, etwa des durch Ab-

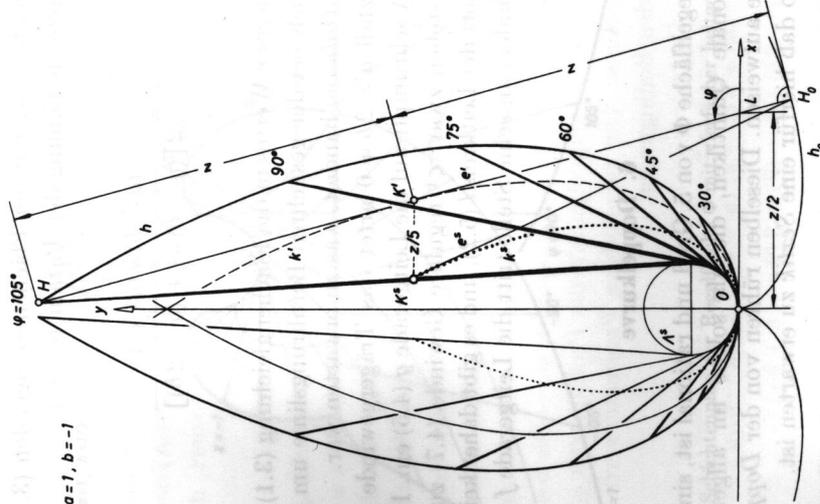


Abb. 3. Schrägriß der Binormalenfläche einer Böschungskubik in Richtung des elliptischen Leitzylinders auf die Grundebene.

leitung von (5.2) bestimmten Punktes

$$x_0 : x_1 : x_2 : x_3 = 0 : -u : 1 : b u. \quad (5.6)$$

Dessen durch (5.1) erklärte Nullebene hat nach Rückkehr zu den inhomogenen Koordinaten die Gleichung

$$(2a - 3b)x + 2(a - b)uy - z + 2bu = 0. \quad (5.7)$$

Für ihren Schnittpunkt mit der Flächenerzeugenden (3.1) findet man dann nach kurzer Rechnung den Parameterwert

$$v = \frac{(a-b)u(a^2+1)}{2[(a-b)u^2+(a-2b)]} \quad (5.8)$$

Eintragung dieses  $v$ -Wertes in die Flächengleichung (3.1) lehrt schließlich, daß es sich bei der gesuchten Berührungslinie um eine *rationale Raumkurve 5. Ordnung* handelt, was zu erwarten war.

Im Grenzfall  $a = 2b \neq 0$  artet das Trärgewinde aus, und der Leitzylinder  $\Lambda$  schrumpft auf die Leitgerade  $g$  (4.5) ein. Im Falle  $b = 0$  des Konoids stehen zwar  $\infty^1$  reguläre Gewinde (4.7) zur Verfügung, doch degeneriert der Leitkreis  $l$  (5.2), und es gibt daher keinen quadratischen Leitzylinder; an seine Stelle tritt die Leitgerade  $f$  (4.8).

### 6. Doppelkurve

Da die Regelfläche  $\Phi$  von 5. Grad und rational ist, sind ihre ebenen Schnitte rationale Quintiken, die als solche im allgemeinen sechs Doppelpunkte aufweisen. Dieselben rühren von der *Doppelkurve*  $d$  der Fläche her, so daß hierfür eine *Sextik* zu erwarten ist.

Wird die Schnittebene  $\tau$  insbesondere durch eine Erzeugende  $e$  von  $\Phi$  gelegt, so zerfällt die Schnittkurve 5. Ordnung in die Gerade  $e$  und eine rationale Quartik  $q$ . Von den vier Punkten, die  $e$  und  $q$  gemeinsam haben, ist einer der auf  $e$  befindliche Berührungspunkt von  $\tau$  mit  $\Phi$ , während die drei restlichen von der Doppelkurve  $d$  stammen; die übrigen drei Punkte von  $d$  in  $\tau$  sind die Doppelpunkte der Quartik  $q$ . Hieraus ist zu entnehmen, daß die Doppelsextik  $d$  von  $\Phi$  die Flächen-erzeugenden  $e$  zu *Trisekanten* hat.

Verwendet man speziell die zu  $u = \infty$  gehörige *Fernerzeugende*  $w$  von  $\Phi$ , d. i. zufolge ihrer aus (3.2) zu entnehmenden Plücker-Koordinaten  $0:0:0:1:0$  die Ferngerade der  $xz$ -Ebene, dann hat man die durch  $y = \text{const}$  gekennzeichneten Ebenen  $\tau$  zu betrachten. Ein solcher

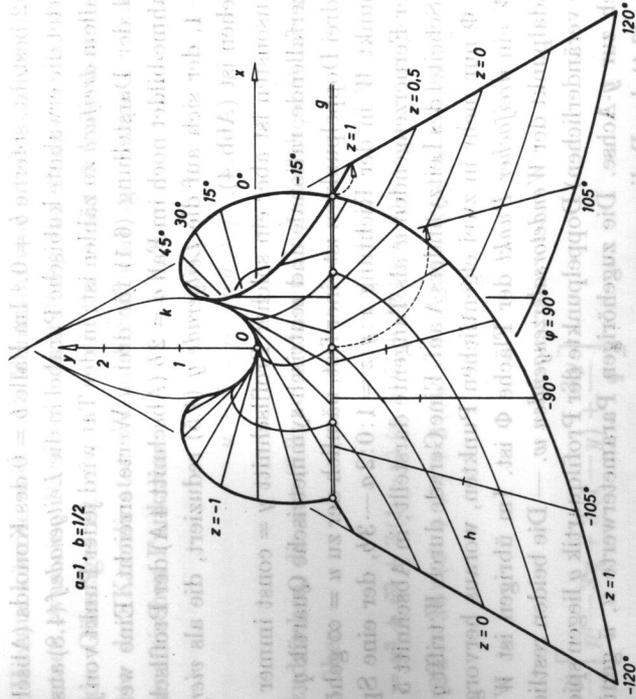


Abb. 4. Schichtenplan der Regelfläche  $\Phi$  mit vierfacher Leitgerade  $g$ .

„Profilschnitt“  $q$ , gemäß (3.1) mit  $v = (a^2 - y)/2u$  erfährt, wird durch

$$x = \frac{1}{6}u^3 + \frac{1-y}{2}u + \frac{y}{2u}, \quad (6.1)$$

$$z = \frac{2a-3b}{6}u^3 + \frac{2a-b+by}{2}u + \frac{by}{2u} \quad \text{mit } y = \text{const}$$

dargestellt und ist daher im allgemeinen tatsächlich eine *rationale Quartik*. Abzusehen ist dabei von dem zerfallenden Profilschnitt  $y = 0$ , der aus der Scheitelerzeugenden  $u = 0$  und einer kubischen Parabel

$v = u/2$  besteht, sofern  $b \neq 0$ .<sup>4</sup> Im Falle  $b = 0$  des Konoids (Abschnitt 4B) artet die erwähnte kubische Parabel in die *Leitgerade*  $f$  (4.8) aus, die nach allem *dreifach* zu zählen ist; in der Tat wird jeder Punkt von  $f$  auf Grund der Darstellung (6.1) für drei  $u$ -Werte erreicht. Eine weitere Ausnahme bildet noch im Fall  $a = 2b$  (Abschnitt 4A) der Profilschnitt  $y = -1$ , der sich auf die *Leitgerade*  $g$  (4.5) reduziert, die als *vierfach* anzusehen ist (Abb. 4).

Ansonsten ist aber ein solcher Profilschnitt  $y = \text{const}$  immer eine nichtzerfallende, rationale und zentrisch-symmetrische Quartik  $q$ . Von ihren drei Doppelpunkten ist einer fest, nämlich der zu  $u = \infty$  gehörige Fernpunkt  $W$  in der Richtung  $x:y:z = 1:0:2a-3b$ , der eine Spitze mit der Fernerzeugenden  $w$  als Tangente darstellt; in Abschnitt 5 trat  $W$  als Scheitel des Leitzylinders  $\Lambda$  auf. Eine Gerade durch  $W$  trifft  $q$  und damit  $\Phi$  nur mehr in zwei eigentlichen Punkten, woraus hervorgeht, daß  $W$  ein *dreifacher Punkt* der Fläche  $\Phi$  ist. Im übrigen ist  $W$  der Kuspaldpunkt der *Wendetsalerzeugenden*  $w$ . — Die beiden restlichen (mit  $y$  veränderlichen) Doppelpunkte der Profilquartik  $q$  liegen spiegelbildlich zur  $y$ -Achse. Die zugehörigen Parameterwerte  $u, \bar{u}$  genügen zufolge (6.1) den Bedingungen

$$\begin{aligned} u^3 - \bar{u}^3 + 3(1-y)(u-\bar{u}) - 3y(u-\bar{u})u\bar{u} &= 0, \\ (2a-3b)(u^3 - \bar{u}^3) + 3(2a-b+by)(u-\bar{u}) &= 0, \\ -3by(u-\bar{u})/u\bar{u} &= 0. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Nach Division durch  $u-\bar{u} (\neq 0)$  führt dies unter der Voraussetzung  $a \neq 2b$  auf

$$u^2 + u\bar{u} + \bar{u}^2 = \frac{3(by+a-b)}{2b-a}, \quad u\bar{u} = \frac{(2b-a)y}{(a-b)y+b}. \quad (6.3)$$

<sup>4</sup> Dieser kubischen Parabel entspricht vermöge der unter der Voraussetzung  $a \neq 2b$  bestehenden Nullkorrelation  $\mathfrak{R}$  (5.1) ein *kubischer Leitzylinder*, dessen Erzeugenden die Richtung  $x:y:z = 1:0:b$  haben. — Der Profilquartik  $y = -1$  hingegen entspricht der kubische, längs der Kehlkubik  $k$  (2.1) berührende Zentralzylinder  $\Gamma$ .

Hieraus könnte man  $u$  als Funktion von  $y$  berechnen und in (6.1) einsetzen, was eine Parameterdarstellung der Doppelsextik  $d$  liefern würde. Günstiger ist es jedoch, die für  $u$  und  $\bar{u}$  übereinstimmenden Werte der Koordinaten zu addieren und die Summen durch die symmetrischen Funktionen

$$u + \bar{u} = p, \quad u\bar{u} = q \quad (6.4)$$

auszudrücken, die aus (6.3) zu gewinnen sind. Auf diese Weise gelangt man über

$$\begin{aligned} 12x &= u^3 + \bar{u}^3 + 3(1-y)(u+\bar{u}) + 3y(u+\bar{u})/u\bar{u}, \\ 12z &= (2a-3b)(u^3 + \bar{u}^3) + 3(by-b+2a) + 3by(u+\bar{u})/u\bar{u} \end{aligned} \quad (6.5)$$

zu

$$\begin{aligned} x &= \frac{p}{12} \left[ p^2 - 3q + 3(1-y) + \frac{3y}{q} \right], \\ z &= \frac{p}{12} \left[ (2a-3b)(p^2 - 3q) + 3(by-b+2a) + \frac{3by}{q} \right], \end{aligned} \quad (6.6)$$

wobei gemäß (6.3) und (6.4)

$$q = \frac{(2b-a)y}{(a-b)y+b}, \quad p^2 = \frac{3(by+a-b)}{2b-a} + q. \quad (6.7)$$

Durch Eintragen dieser Werte in (6.6) ergibt sich eine brauchbare Darstellung der Doppelsextik  $d$  mit  $y$  als Parameter. Quadrieren dieser Ausdrücke führt zu impliziten Darstellungen des Grundrisses  $d'$  bzw. des Auftrisses  $d''$  in Gestalt von Polynomen 6. Grades, was die Ordnung von  $d$  bestätigt.

Von Interesse ist die Projektion von  $d$  aus dem Fernpunkt  $W \in d$ , etwa auf die Aufrißebene  $x = 0$ . Da  $W$  auch dreifacher Punkt von  $d$  ist, wird sich die Ordnung der Bildkurve auf 3 reduzieren. Bildet man somit

den Ausdruck

$$(3b - 2a)x + z = p[(a - b)y + b], \quad (6.8)$$

dann liefert dessen Quadrat die Gleichung des Projektionszylinders. Dessen Schnitt mit der Bildebene  $x = 0$  wird beschrieben durch

$$(2b - a)z^2 = [(a - b)y + b] \cdot [3b(a - b)(y^2 + 1) + 2(2a^2 - 5ab + 5b^2)y], \quad (6.9)$$

ist also tatsächlich eine (zur  $y$ -Achse symmetrische) *Kubik*. Diese ist für gewöhnlich nicht rational, sondern vom Geschlecht 1, welches daher auch für die Doppelsextik  $d$  gilt.

### 7. Schmieglinien

Nach S. Lie existiert auf jeder echten Gewindefläche eine *ausgezeichnete Schmieglinie*, gebildet von jenen Flächenpunkten, deren Nullebene mit der Tangentialebene zusammenfällt; sie ist *Gewindekurve* und trifft jede Erzeugende in zwei Punkten [3, S. 161]. Da zu ihrer Bestimmung nur Differentiationen erforderlich sind, fällt sie bei algebraischen Gewindeflächen *algebraisch* aus.

Nach dem Vorgang von F. Klein kann man im vorliegenden Fall folgendermaßen verfahren: Man bestimmt zu einem Punkt  $X(u, v)$  der Fläche  $\Phi$  (3.1) gemäß (5.1) die Nullebene  $\xi'$ ; diese enthält die durch  $X$  gehende Erzeugende  $e(u)$  und berührt daher  $\Phi$  in einem Punkt  $X'(u, v')$ . Die solcherart auf der Erzeugenden  $e$  erklärte Zuordnung  $X \mapsto X'$  ist eine *projektive Involution*, deren Doppelpunkte zwei Punkte der Lieschen Schmieglinie sind. — Zur analytischen Durchführung beachte man, daß die Tangentialebene  $\xi'$  von  $X'$  neben den durch die partiellen Ableitungen von (3.1) erklärten Fernpunkten  $X'_u$  und  $X'_v$  auch den ihrer Verbindungsgeraden angehörenden, durch Addition ihrer homogenen Koordinaten erhältlichen Punkt  $\bar{X}$

$$\bar{x}_0 : \bar{x}_1 : \bar{x}_2 : \bar{x}_3 = 0 : 2uv' : -2v' : (a - b)(u^2 + 1) - 2bu'v', \quad (7.1)$$

enthält. Dessen gemäß (5.1) anzusetzende Nullebene

$$[4bu'v' - (a - b)(u^2 + 1)]x_0 + 2(2a - 3b)v' \cdot x_1 + (a - b)(4uv' - u^2 - 1)x_2 - 2v' \cdot x_3 = 0 \quad (7.2)$$

muß nach den Gesetzen der Nullkorrelation den Punkt  $X(u, v)$  enthalten. Setzt man also in (7.2) die Koordinaten  $x_0 : x_1 : x_2 : x_3 = 1 : x : y : z$  aus (3.1) ein, so erhält man nach einiger Rechnung als Ausdruck der *Kleinschen Involution*  $X \mapsto X'$  auf der Erzeugenden  $e$  ( $u = \text{const}$ ) die bilineare, in  $v$  und  $v'$  symmetrische Relation

$$4(u^2 - c^2)v'v - 2u(u^2 + 1)(v + v') + (u^2 + 1)^2 = 0 \quad (7.3)$$

mit  $c^2 = \frac{2b - a}{a - b}$ .

Die beiden Doppelpunkte dieser Involution, festgelegt durch

$$v = v' = \frac{u^2 + 1}{2(u \pm c)}, \quad (7.4)$$

gehören der Lieschen Schmieglinie an, die hier in zwei selbständige Kurven zerfällt ( $c = 0$  ist ja ausgeschlossen, da mit  $a = 2b$  das Gewinde entarten würde; vgl. Abschnitt 4A). Eintragung der  $v$ -Werte (7.4) in die Flächendarstellung (3.1) lehrt dann, daß es sich bei dem ausgetzeichneten Schmieglinienpaar (unter der Voraussetzung  $b \neq 0$ ) um zwei *rationale Quartiken* (*II. Art*) handelt, die natürlich nur für  $c^2 > 0$  reell ausfallen, also für  $1 < a/b < 2$ ; dies entspricht zufolge (5.5) dem Auftreten eines hyperbolischen Leitzyllinders  $\Lambda$ .

Auch die übrigen, nicht ausgezeichneten Schmieglinien der Regelfläche  $\Phi$  lassen sich explizit angeben. Zu diesem Zweck ist bekanntlich die zweite Grundform  $Ldu^2 + 2Mduv + Ndv^2$  gleich Null zu setzen. Gestützt auf die Parameterdarstellung (3.1) findet man für die Koeffizienten nach geläufigen Regeln die Verhältnisse

$$L : M : N = (b - a)(u^2 + 1)^2 + 4bv^2 : (a - b)(u^2 + 1)^2 : 0. \quad (7.5)$$

Nach Abspaltung der Erzeugendenschar  $u = \text{const}$  ( $du = 0$ ) ergeben sich dann die *krummen Schmieglinien* durch Integration der linearen Differentialgleichung

$$\left[ \frac{b}{a-b} \left( \frac{2y}{u^2+1} \right)^2 - 1 \right] du + 2dv = 0, \quad (7.6)$$

wobei der Fall der Torse  $a = b$  außer Betracht bleibt.

Eine erste Substitution

$$v = \frac{u^2+1}{2t} \quad \text{mit} \quad dv = \frac{u du}{t} - \frac{(u^2+1) dt}{2t^2} \quad (7.7)$$

liefert zunächst

$$\left( t^2 - 2tu - \frac{b}{a-b} \right) du + (u^2+1) dt = 0. \quad (7.8)$$

Die zweite Substitution

$$t = u + w \quad \text{mit} \quad dt = du + dw \quad (7.9)$$

führt dann mit Benützung der in (7.3) eingeführten Abkürzung  $c^2 = (2b-a)/(a-b)$  auf

$$(w^2 - c^2) du + (u^2+1) dw = 0. \quad (7.10)$$

Nun ist Trennung der Variablen möglich und elementare Integration ausführbar. Man erhält so die allgemeine Lösung

$$\text{arc tg } u = \int \frac{dw}{c^2 - w^2}, \quad 2v = \frac{u^2+1}{u+w}. \quad (7.11)$$

Je nach dem Vorzeichen von  $c^2$  sind zwei Fälle zu unterscheiden. Unter der Annahme  $c^2 > 0$ , also bei hyperbolischem Leitzyylinder  $\Lambda$

(5.4), ergibt die Auswertung des Integrals:

$$2c \cdot \text{arc tg } u = \ln \frac{c+w}{c-w} + C. \quad (7.12)$$

Die Schmieglinien sind demnach durchwegs *transzendent*, mit Ausnahme der zu den partikulären Lösungen  $w = \pm c$  von (7.10) gehörigen Lieschen Schmieglinien 4. Ordnung (7.4), die sich für  $C \rightarrow +\infty$  einstellen.

Bemerkenswerter ist der bei elliptischem Leitzyylinder  $\Lambda$  (5.4) vorliegende Fall  $c^2 < 0$ . Setzt man hier  $c^2 = -\bar{c}^2$  mit  $\bar{c} > 0$  (jedoch  $\bar{c} \neq 1$  wegen  $b \neq 0$ ), so ergibt die Integration von (7.11):

$$2\bar{c} \cdot \text{arc tg } u = C - 2 \text{arc tg } (w/\bar{c}). \quad (7.13)$$

Geht man, durch die in Abschnitt 2 erwähnte geometrische Bedeutung des Parameters  $u$  nahegelegt, mit

$$u = \text{tg } (\varphi/2), \quad w/\bar{c} = \text{tg } (\psi/2) \quad (7.14)$$

zu neuen Parametern  $\varphi, \psi$  über, so gilt gemäß (7.11):

$$2v = \frac{1 + \text{tg}^2(\varphi/2)}{\text{tg}(\varphi/2) + \bar{c} \text{tg}(\psi/2)} \quad \text{mit} \quad \psi = C - \bar{c}\varphi, \quad (7.15)$$

und es ist zu erkennen, daß hier *rational-algebraische Schmieglinien* auftreten, falls  $\bar{c}$  rational ist. Schreibt man in einem solchen Fall  $\bar{c} = \lambda/\mu$  als gekürzten Bruch natürlicher Zahlen  $\lambda, \mu$  an, so findet man nach Übergang zum (komplexen) rationalisierenden Parameter  $r = \exp(i\varphi/\mu)$  durch Betrachtung der entsprechend umgeformten Darstellung (3.1) die *Ordnung*  $n = \lambda + 4\mu$ . Der niedrigste Wert stellt sich für  $a:b = 2:3$  über  $\bar{c} = 2$  mit  $n = 6$  ein — von den imaginären Lieschen Schmieglinien (7.4) abgesehen.

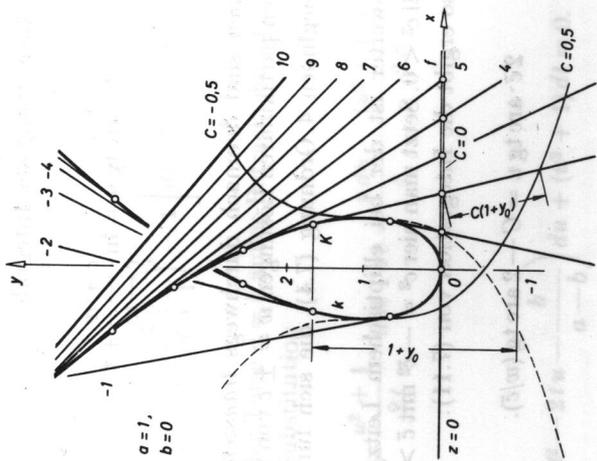


Abb. 5. Konoid  $\Phi$  in kotierter Projektion mit kubischen Schmieglinien.

In dem zurückgestellten Fall  $\bar{c} = 1$  ( $b = 0$ ) des Konoids  $\Phi$  gilt zufolge (7.6) — und im Einklang mit (7.15) — die Relation

$$v = \frac{u}{2} + C. \tag{7.16}$$

Die Eintragung in (3.1) lehrt, daß in diesem Fall die krummen Schmieglinien durchwegs *kubische Parabeln* sind, mit Ausnahme der zu  $C = 0$  gehörigen dreifachen Leitgeraden  $f$  (4.8). Sie sind allesamt als Liesche Schmieglinien aufzufassen, weil das Konoid in den  $\infty^1$  Geraden (4.7) enthalten ist. — In Abb. 5 wurden zwei der Schmieglinien wiedergegeben; sie lassen sich auf Grund der Beziehung (7.16) leicht konstruieren: der Erzeugendenabschnitt zwischen  $f$  und der Schmieglinie hat die Länge  $C(1 + y_0)$ ; wenn  $y_0$  die Ordinate des Zentralpunkts  $K$  ( $v = 0$ ) bezeichnet.

Ausständig ist jetzt nur noch die Annahme  $c = 0$  ( $a = 2b$ ), welche die Fläche mit einer vierfachen Leitgeraden  $g$  (4.5) kennzeichnet. Hier ergibt die Integration von (7.11) die Lösung

$$\text{arc tg } u = \frac{1}{w} + C, \tag{7.17}$$

die durchwegs *transzendente* Schmieglinien liefert, von der Leitgeraden  $g$  ( $w = 0$ ) abgesehen.

Literatur

[1] Darboux, G.: Leçons sur la théorie générale des surfaces, IV. Paris, 1896.  
 [2] Loria, G., und F. Schütte: Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven I, II. Leipzig/Berlin, 2. Aufl. 1910.  
 [3] Müller, E., und J. Krames: Konstruktive Behandlung der Regelflächen (Vorlesungen über darstellende Geometrie, Bd. III). Leipzig/Wien, 1931.  
 [4] Pirondini, G.: Studi geometrici relativi specialmente alle superficie gobbe. Giom. Mat. 23 (1885), 288—331.  
 [5] Wunderlich, W.: Algebraische Böschungslinien dritter und vierter Ordnung. Sb. Österr. Akad. d. Wiss. 181 (1973), 353—376.  
 [6] Wunderlich, W.: Raumkurven konstanter Krümmung und Regelflächen mit oskulierendem Striktionsband. Demonstr. Math. 6 (1973), 407—417. — Regelflächen mit oskulierendem Striktionsband. Sb. Österr. Akad. d. Wiss. 188 (1979), 361—384.