

Bertrandsche Gewindekurvenpaare

Von

Walter Wunderlich (Wien)

(Vorgelegt in der Sitzung der math.-nat. Klasse am 26. März 1981)

Herrn Prof. J. Krames zum 85. Geburtstag gewidmet

1. Bertrand-Kurven

Ein *Bertrandsches Kurvenpaar* wird von zwei Raumkurven k_1 und k_2 mit durchwegs gemeinsamen *Hauptnormalen* gebildet [1]. Diese Hauptnormalen erfüllen eine windschiefe Regelfläche Φ , auf der k_1 und k_2 als Schmieginien und Orthogonaltrajektorien der Erzeugendenschar verlaufen, woraus unmittelbar folgt, daß „assoziierte“ (d. h. zur selben Hauptnormalen gehörige) Punkte $P_1 \in k_1$ und $P_2 \in k_2$ einen *konstanten Abstand* $2a$ besitzen. — Eine weitere Orthogonaltrajektorie ist die „*Mittellinie*“ k_0 , die sämtliche Abstandsstrecken $P_1 P_2$ halbiert.

Verlegt man unter Annahme eines dreidimensionalen euklidischen Raumes das zum laufenden Punkt P einer Raumkurve k gehörende (orthonormierte) *begleitende Dreibein*, bestehend aus dem Tangentenvektor e_1 , dem Hauptnormalenvektor e_2 und dem Binormalenvektor e_3 , in den Koordinatenursprung O , so vollführt es dort eine *Bündelbewegung*, wenn P längs k wandert. Die Endpunkte der drei Einheitsvektoren e_1, e_2, e_3 beschreiben dabei auf der Einheitskugel Σ der Reihe nach: das sphärische Tangentenbild e_1 , das sphärische Hauptnormalenbild e_2 und das sphärische Binormalenbild e_3 . Nach einem Grundsatz der Kinematik kann die genannte Bündelbewegung in jedem Augenblick als infinitesimale Drehung um einen wohlbestimmten Bündel-

strahl d angesehen werden. Im Einklang mit den Frenetschen Ableitungsgleichungen der Kurventheorie liegt diese Momentanachse d (der Darboux'sche Drehvektor) stets in der von ϵ_1 und ϵ_3 aufgespannten Ebene ϵ , und die in Rede stehende Bündelbewegung kann daher — entsprechende Differenzierbarkeit vorausgesetzt — als *Rollvorgang* der Ebene ϵ auf einem gewissen Kegel Δ aufgefaßt werden, den sie jeweils längs der Momentanachse d berührt. Hieraus folgt, daß die sphärischen Bildkurven ϵ_1 und ϵ_3 *sphärische Enolventen* der Kurve $\Sigma \cap \Delta$ sind, die wiederum sphärisch polar zum sphärischen Hauptnormalenbild ϵ_2 ist.

Die Anwendung der dargelegten Vorstellung auf ein Bertrandsches Kurvenpaar — dessen Bestandteile k_1 und k_2 definitionsgemäß dasselbe sphärische Hauptnormalenbild ϵ_2 haben — lehrt nun, daß die beiden assoziierten Dreibeine eine gemeinsame Bündelbewegung ausführen. Hieraus folgt (ohne die sonst übliche Rechnung), daß assoziierte Tangenten und assoziierte Schmiegebene einen *unveränderlichen „Schränkwinkel“* α bilden.

Eine klassische und kennzeichnende Eigenschaft für jede der beiden Teilkurven eines Bertrand-Paares k_1 , k_2 betrifft deren *Krummung* κ_i und *Torsion* τ_i , die durch je eine lineare Relation

$$2a(\kappa_i + \tau_i \cot \alpha) = 1 \quad (i = 1, 2) \quad (1.1)$$

verknüpft sind. Ferner sind diese Größen durch

$$(1 - 2a\kappa_1)(1 - 2a\kappa_2) = \cos^2 \alpha, \quad \tau_1 \tau_2 = \frac{\sin^2 \alpha}{4a^2} \quad (1.2)$$

gekoppelt [3, S. 72 f.; 8, S. 230 ff.; 11, S. 229 ff.].

Unter die Bertrand-Kurven fallen mit $\alpha = \pi/2$ die *Kurven konstanter Krümmung* ($\kappa_1 = \kappa_2 = 1/2a$), sowie als Grenzfall mit $\alpha = 0$ die *Kurven konstanter Torsion*, bei welchen k_1 und k_2 wegen $a = 0$ vereinigt sind. — An Beispielen echter Bertrand-Kurven herrscht trotz der umfassenden Monographie von B. Gambier [2] ausgesprochener Mangel. Man begnügt sich meist mit dem Hinweis auf die dürftige Illustration durch gewöhnliche Schraublinien ($\kappa_1, \kappa_2, \tau_1, \tau_2 = \text{const.}$),

weil der interessante, von E. Salkowski betrachtete Fall der Bertrandschen Kurven mit fester Hauptnormalenneigung [7, 12] ziemlich in Vergessenheit geraten ist.

2. Gewindekurven

Als *Gewindekurven* bezeichnet man die von S. Lie [4, S. 230 f.] eingeführten Raumkurven, deren sämtliche Tangenten einem *linearen Strahlkomplex* („Gewinde“) angehören. Ein solches Gewinde \mathfrak{G} ist eigentlich ein projektiver Begriff, es kann aber auch metrisch als Gesamtheit der ∞^3 Bahnnormalen einer *Schraubung*

$$x = x_0 \cos u - y_0 \sin u, \quad y = x_0 \sin u + y_0 \cos u, \quad z = z_0 - cu \quad (2.1)$$

erklärt werden [3, S. 84 ff.; 4, S. 209 ff.; 6, S. 160]. Jeder Gewindestrahl $g \in \mathfrak{G}$ ist Bahnnormale aller seiner ∞^1 Punkte, insbesondere die Binnormale der Bahnschraublinie seines achsennächsten Punktes Q . Durch Ableitung der Gleichungen (2.1) nach u ergibt sich, daß die Bahntangente eines Punktes $Q(x, y, z)$ den Richtungsvektor $(y, -x, c)$ hat, die Bahnnormale g mithin den Richtungsvektor $(-y, x, r^2/c)$ besitzt, wobei $r^2 = x^2 + y^2$ den Abstand r von der Schraub- und Gewindeachse $x = y = 0$ festlegt. Ist $c > 0$, dann stellt (2.1) eine Linkschraubung dar, und alle Gewindestrahlen sind gegen die Achse rechts gewunden, sofern sie dieselbe nicht treffen (was unter rechtem Winkel geschieht); c wird der „Parameter“ des Gewindes \mathfrak{G} genannt.

Die durch einen vorgelegten Punkt P gehenden ∞^1 Gewindestrahlen $g \in \mathfrak{G}$ erfüllen ein Strahlbüschel in der Bahnnormalebene π von P ; diese heißt die „Nullebene“ von P , und umgekehrt ist P der „Nullpunkt“ von π . Die eineindeutige Zuordnung $P \rightarrow \pi$ ist das von F.A. Möbius entdeckte *lineare Nullsystem*, eine involutorische Korrelation. Variiert P auf einer Geraden p , so dreht sich die Nullebene π um eine Gerade \bar{p} , die „Nulpolare“ von p ; umgekehrt ist p die Nullpolare von \bar{p} . Alle ∞^2 Treffgeraden von p und \bar{p} sind Gewindestrahlen, und diese fallen mit ihren Nullpolaren zusammen ($g = \bar{g}$). Das Gemeinklot von p und \bar{p} ist Normalen der Gewindeachse.

Die Haupt eigenschaft der erwähnten *Gewindekurven* besteht darin, daß für jeden Punkt P einer solchen Kurve k die Schmiegebene mit der

Nullebene π zusammenfällt. Nach S. Lie und F. Klein gelangt man zu Gewindekurven, wenn man von einer beliebigen, durchwegs aus Ge-windestrahlen $g \in \mathfrak{G}$ bestehenden windschiefen Regelfläche Φ ausgeht und auf jeder ihrer Erzeugenden g jene beiden Punkte P_1 und P_2 aufsucht, deren Nullebenen π_1 und π_2 die Fläche Φ in P_1 bzw. P_2 berühren. Diese Aufgabe läuft auf die Ermittlung der Doppelpunkte P_1, P_2 einer Projektivität auf g hinaus und verlangt lediglich die Auflösung einer quadratischen Gleichung (vgl. Abschnitt 3). Die von den so bestimmten Punkten P_1 und P_2 erfüllten Flächenkurven k_1 und k_2 sind nun, wie unmittelbar einzusehen, Gewindekurven und gleichzeitig *ausgezeichnete Schmieglelinien der Gewindefläche Φ* [3, S. 87 f.; 4, S. 234 f.; 6, S. 161 ff.].

Die bekanntesten Beispiele für Gewindekurven sind neben den algebraischen Raumkurven 3. Ordnung die Schraublinien, und zwar nicht nur die euklidischen, sondern auch die nichteuklidischen im projektiven Modell [10], darunter auch die Kugelloxodromen. Andere spezielle Gewindekurven hat der Verfasser kürzlich in [13] und [14] vorgestellt. Ansonsten ist eine Gewindekurve k durch ihre Normalprojektion k' auf eine achsennormale Ebene — im folgenden kurz als „Grundriß“ angesprochen — bis auf Translationen längs der Gewindeachse bestimmt [3, 4].

Nullstrahl. Die *Hauptnormalenfläche Φ* ist demnach *Gewindefläche*, und k_1 ist eine der beiden Lieschen Schmieglelinien von Φ . Die zweite ausgezeichnete Schmieglelinie ist dann ebenfalls Gewindekurve in \mathfrak{G} , doch bedeutet dies noch nicht, daß sie den zweiten Bestandteil k_2 des Bertrand-Paares darstellt. Dies sei jedoch bei der Behandlung des gestellten Problems ausdrücklich gefordert. Damit werden hier Bertrand-Paare, bei welchen nur ein Bestandteil Gewindekurve ist oder die beiden Teilkurven verschiedenen Gewinden angehören, bewußt ausgeschlossen.

Jede Erzeugende g der Gewindefläche Φ ist gemäß Abschnitt 2 Schraubbinormale ihres achsennächsten Punktes Q , und die von den Punkten Q gebildete Flächenkurve l mag zur Festlegung von Φ dienen. In Zylinderkoordinaten r, u, z sei diese „Leitkurve“ l durch die zweimal stetig differenzierbaren Funktionen $r(u)$ und $z(u)$ beschrieben. Die Bahnbinormale g des Punktes $Q \in l$ mit den kartesischen Koordinaten

$$x = r(u) \cos u, y = r(u) \sin u, z = z(u) \quad (3.1)$$

hat den Richtungsvektor $(-c \sin u, c \cos u, r)$. Die *Gewindefläche Φ* läßt sich mithin ansetzen durch

$$\mathfrak{x} \begin{cases} X = r \cos u - cv \sin u, \\ Y = r \sin u + cv \cos u, \\ Z = z + vr. \end{cases} \quad (3.2)$$

Mit Hilfe der partiellen Ableitungen des so erklärtens Ortsvektors \mathfrak{x} , also

$$\mathfrak{x}_u \begin{cases} X_u = (\dot{r} - cv) \cos u - r \sin u, \\ Y_u = (\dot{r} - cv) \sin u + r \cos u, \\ Z_u = \dot{z} + v\dot{r}, \end{cases} \quad (3.3)$$

(wobei $\dot{r} = dr/du$ und $\dot{z} = dz/du$), gelangt man über das Vektorprodukt

$\mathfrak{X}_u \times \mathfrak{X}_v$ zur Flächennormale

$v(u)$ erfüllt, wenn die zwei nachstehenden Relationen gelten:

$$\begin{cases} \xi = (r^2 - cv\dot{r} - c\dot{z}) \cos u + r(\dot{r} - cv) \sin u, \\ \eta = (r^2 - cv\dot{r} - c\dot{z}) \sin u - r(\dot{r} - cv) \cos u, \\ \mathfrak{n} = c(\dot{r} - cv). \end{cases} \quad (3.4)$$

Jene beiden Punkte P_1 und P_2 einer Erzeugenden g ($u = \text{const}$), für welche die Nullebene mit der Tangentialebene vom Φ zusammenfällt, wo also die Schraubtangente auch Flächennormale ist, ergeben sich aus der Bedingung $\mathfrak{n} = \lambda(Y, -X, c)$. Durch Einsetzen des Proportionalitätsfaktors $\lambda = \zeta/c = \dot{r} - cv$ in $\xi = \lambda Y$ oder $\eta = -\lambda X$ findet man dann die maßgebende, in v quadratische Gleichung

$$c^2 v^2 - 2cv\dot{v} + r^2 - c\dot{z} = 0. \quad (3.5)$$

Die durch Auflösung gewonnenen Parameterwerte

$$v = \frac{1}{c}(\dot{r} \pm w) \text{ mit } w^2 = \dot{r}^2 - r^2 + c\dot{z} \quad (3.6)$$

legen dann über (3.2) die gesuchten Punkte P_1, P_2 fest und führen so zu einer Parameterdarstellung des Lieschen Schmieginienpaars k_1, k_2 von Φ :

$$\mathfrak{X}_{1,2} = \begin{cases} X_{1,2} = r \cos u - (\dot{r} \pm w) \sin u, \\ Y_{1,2} = r \sin u + (\dot{r} \pm w) \cos u, \\ Z_{1,2} = z + (\dot{r} \pm w)r/c. \end{cases} \quad (3.7)$$

Notwendig und hinreichend dafür, daß die Schmieginien (3.7) ein *Bertrand-Paar* bilden, ist, daß sie die Erzeugendschar $u = \text{const}$ der Regelfläche Φ (3.2) rechtwinklig durchsetzen. Die entsprechende *Orthogonalitätsbedingung* $(\mathfrak{X}_u + v \mathfrak{X}_v) \mathfrak{X}_v = 0$ für die Funktion $v(u)$ lautet mit Rücksicht auf (3.3):

$$(r^2 + c^2)\dot{v} + r(\dot{rv} + \dot{z} + c) = 0. \quad (3.8)$$

Sie wird dann und nur dann von beiden in (3.6) erklärten Funktionen

$$\begin{cases} (r^2 + c^2)\dot{v} + r\dot{r}w = 0, \\ (r^2 + c^2)\dot{r} + r\dot{r}^2 + cr(\dot{z} + c) = 0. \end{cases} \quad (3.9)$$

Denkt man sich hierin w und \dot{w} auf Grund von (3.6) durch r und z ausgedrückt, so hat man im Prinzip zwei Differentialgleichungen zur Bestimmung der beiden unbekannten Funktionen $r(u)$ und $z(u)$.

Die erste Gleichung (3.9) läßt sich durch Trennung der Variablen (oder nach Multiplikation mit $2w$ sofort) integrieren und liefert

$$(r^2 + c^2)u^2 = a^2c^2.$$

Hierbei wurde die Bezeichnung der Integrationskonstanten mit a^2c^2 so gewählt, daß $2a$ den festen Abstand der beiden Kurven k_1 und k_2 bedeutet, was anhand von (3.6) leicht zu bestätigen ist.

Elimination von w^2 aus (3.6) und (3.10) ergibt die Gleichung

$$(r^2 + c^2)(\dot{r}^2 - r^2 + c\dot{z}) = a^2c^2. \quad (3.11)$$

Die Elimination von $c\dot{z}$ mittels der zweiten Gleichung (3.9) führt schließlich auf eine Bestimmungsgleichung für $r(u)$ allein, nämlich

$$\dot{r}^2 + a^2c^2/r^2 - r^2 + c^2 = 0. \quad (3.12)$$

Integration nach Multiplikation mit $2\dot{r}$ ($\neq 0$) liefert zunächst die Relation

$$r^2 + r^2 = \frac{a^2c^2}{r^2 + c^2} + b^2 \quad (a, b, c = \text{const}). \quad (3.13)$$

Die formal als Quadrat geschriebene Integrationskonstante b^2 mag auch negativ sein; sie darf aber nicht unter $-a^2$ sinken, wenn reelle Wertepaare r, \dot{r} vorhanden sein sollen. Die zurückgestellte Annahme $\dot{r} = 0$ wird in Abschnitt 6 erörtert werden.

Ansonsten ist jetzt wieder Trennung der Variablen möglich, und man gewinnt (bei Unterdrückung der unwesentlichen Integrationskonstante) mit

$$u = \int_0^r \sqrt{\frac{c^2 + r^2}{(a^2 + b^2)c^2 + (b^2 - c^2)r^2 - r^4}} dr \quad (3.14)$$

die Umkehrfunktion von $r(u)$. Auf Grund der nunmehr bekannten Polargleichung $r = r(u)$ wird zunächst der Grundriß l' der Leitkurve l (3.1) erfaßt, unter Heranziehung des in (3.10) erklärten Wertes w ist überdies der Grundriß des Bertrand-Paares k_1, k_2 (3.7) zu finden. — Die noch fehlende Kotenfunktion $z(u)$ ergibt sich über (3.11) und (3.13) mit

$$z = \frac{1}{c} \int_0^r (2r^2 - b^2) du. \quad (3.15)$$

Nummehr sind die Leitkurve l sowie die Bertrand-Kurven k_1 und k_2 vermöge ihrer Darstellungen (3.1) bzw. (3.7) vollkommen bestimmt. Damit ist die aufgeworfene Frage nach Bertrandschen Gewindekurvenpaaren als grundsätzlich beantwortet anzusehen.

Zwecks nachträglicher Deutung der in (3.13) eingeführten Konstante b^2 sei noch der *Schränkungswinkel* α des Bertrand-Paares ermittelt. Hierzu verwendet man am besten die beiden Binormalen in den assoziierten Punkten P_1 und P_2 (3.7). Gemäß Abschnitt 2 sind sie mit den Schraubtangentialen von P_1 und P_2 identisch und haben daher die Richtungsvektoren

$$\begin{aligned} \mathfrak{s}_{1,2} &= \begin{cases} Y_{1,2} = (\dot{r} \pm w) \cos u + r \sin u, \\ -X_{1,2} = (\dot{r} \pm w) \sin u - r \cos u, \end{cases} \quad (3.16) \\ &\quad c. \end{aligned}$$

Der Winkel $\pi - \alpha = \mathfrak{s}_1 \mathfrak{s}_2$ kann dann über das Skalarprodukt

$$\mathfrak{s}_1 \mathfrak{s}_2 = \dot{r}^2 + r^2 - w^2 - c^2 = b^2 + c^2 \quad (3.17)$$

und das Vektorprodukt

$$\mathfrak{s}_1 \times \mathfrak{s}_2 = 2w(c \sin u, -c \cos u, -r) \quad (3.18)$$

bequem berechnet werden. Man findet so den erwartungsgemäß konstanten Wert

$$-\tan \alpha = \frac{|\mathfrak{s}_1 \times \mathfrak{s}_2|}{\mathfrak{s}_1 \cdot \mathfrak{s}_2} = \frac{2ac}{b^2 + c^2}, \quad (3.19)$$

wobei $ac > 0$ angenommen wurde.

4. Auswertung des Grundrisses

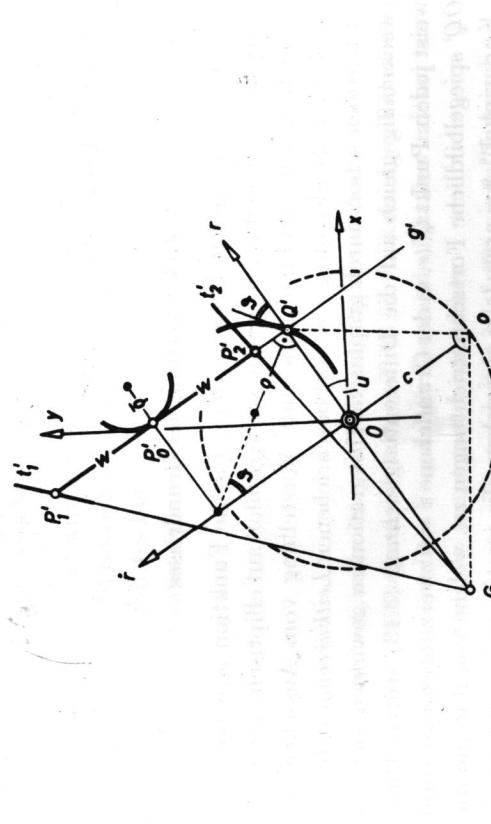
Das grundlegende Integral (3.14) für die Funktion $u(r)$ läßt sich leider nicht elementar auswerten, sondern bloß auf elliptische Integrale 3. Gattung zurückführen. Eine gute Vorstellung vom Aussehen des durch die Polargleichung $r = r(u)$ beschriebenen *Leitkurvengrundrisses* l' ist jedoch schon durch graphische Integration zu gewinnen, die sich zweckmäßig gleich auf die Differentialgleichung (3.13) stützt. Diese weist jedem Punkt $Q'(r, u)$ der Grundebene $z = 0$ zwei zum Radialstrahl OQ' spiegelbildliche Fortschreitrichtungen zu, welche von ihm um die „Kurswinkel“ $\vartheta = \arctg(r/\dot{r})$ abweichen, die jeweils zwei gegen gleiche Werte annehmen. Diese Winkel fallen reell aus, wenn Q' innerhalb des zu $\dot{r} = 0$ gehörigen Grenzkreises liegt, dessen Radius r^* gemäß (3.13) bestimmt wird durch

$$2r^{*2} = b^2 - c^2 + \sqrt{(b^2 + c^2)^2 + 4a^2c^2}. \quad (4.1)$$

Der zunächst im Parameterintervall $0 \leq r \leq r^*$ definierte Kurvenbogen geht vom Ursprung $O(0, 0)$ aus und verläuft bis zum Grenzkreis $r = r^*$, den er an einer bestimmten Stelle $u = u^*$ berührt, durchaus regulär und einsinnig gekrümmt. Der dem folgenden Abschnitt $u^* \leq u \leq 2u^*$ entsprechende nächste Teilbogen ist das Spiegelbild des ersten bezüglich des Radialstrahls $u = u^*$ (Abb. 2). Die periodisch erfolgende Fortsetzung läßt erkennen, daß der Leitkurvengrundriß l' die Gestalt einer *Rosette* besitzt, die im allgemeinen aus unendlich vielen kongruenten

und achsensymmetrischen Blättern besteht. Durch spezielle Abstimmung der Kenngrößen a, b, c ließe sich wohl erreichen, daß der Quotient u^*/π rational wird; die dann geschlossene und endlichblättrige Rosette bleibt trotzdem transzendent.

Der durch die Polarkoordinaten r, φ festgelegte Radiusvektor OQ' eines Punktes $Q' \in l'$ ist das Ursprungslot auf jene Gerade g' , die den



111 7 1:1 - Internationales Grundwasserfeld

Grundriß der zu $Q \in l$ gehörigen Erzeugenden g der Gewindefläche Φ darstellt, denn g wurde ja als Schraubbinormale von Q eingeführt (Abb. 1). Die Schar der Erzeugendengrundrisse g' , beschrieben durch

$$x \cos u + y \sin u = r(u), \quad (4.2)$$

besitzt außer im Ausnahmefall $r = 0$, siehe Abschnitt 6) eine Hüllkurve, die durch ihre Stützfunktion $r(u)$ gekennzeichnet ist. Sie kann als der (scheinbare) Umriß der Regelfläche Φ für die Grundrißprojektion gedeutet werden, oder mit anderen Worten als Basis des achsenparallelen Berührungszyinders von Φ .

(4.2)

berechnen. Statt der Linienelemente 1. Ordnung verwendet man aber besser gleich jene 2. Ordnung, repräsentiert durch Stücke der Krümmungskreise. Diese sind unschwer zu erfassen, weil die Normalen in Q' und P'_0 wegen $\operatorname{tg} \vartheta = r/\rho$ den Punkt $(0, i)$ enthalten und die Krümmungsradien σ für Q' und $\bar{\sigma}$ für P'_0 mittels der geläufigen Formeln

$$\rho = \frac{r^2 + 2\bar{r}^2 - r\bar{r}}{(r^2 + \bar{r}^2)^{3/2}}, \quad \bar{\rho} = r + \bar{r}; \quad (4.6)$$

Die durch Ableitung von (4.2) nach u zu gewinnende Gleichung (4.3)

$$\rho = \frac{(r^2 + r_0^2)^{3/2}}{\bar{r}}, \quad \bar{r} = r + \ddot{r} \quad (4.6)$$

stellt die zur Tangente g' gehörige Normale der genannten Hüllkurve dar. Aus (4.2) und (4.3) ergeben sich für den Berührungs punkt von g' die Koordinaten

$$x = r \cos u - r \sin u, y = r \sin u + r \cos u. \quad (4.4)$$

Ein Vergleich mit (3.7) läßt erkennen, daß die in Rede stehende Hüllkurve mit dem Grundriß k_0' der in Abschnitt 1 erwähnten und

$$\begin{cases} X_0 = r \cos u - \dot{r} \sin u, \\ Y_0 = r \sin u + \dot{r} \cos u, \\ Z_0 = z + r \dot{\varphi} / c \end{cases} \quad (4.5)$$

beschriebenen *Mittellinie* k_0 des Bertrand-Paares k_1, k_2 zusammenfällt.
Demnach gilt

Satz 1: Die Hauptnormalenfläche Φ (3.2) des Bertrandschen Gewindegurvenpaars k_1, k_2 (3.7) wird längs der die Hauptnormalenstrecken halbierenden Mittellinie k_0 (4.3) von einem zur Gewindeachse parallelen Zylinder berührt.

Zur Bestätigung beachte man, daß für die gemäß (3.6) durch $v = \dot{r}/c$ gekennzeichneten Punkte $P_0 \in k_0$ die Flächennormale n (3.4) von

Eine effiziente *graphische Integration* im Grundrißfeld mag nun folgendermaßen vor sich gehen (Abb. 1): In einem kartesischen Koordinatensystem $(O; r, \dot{r})$ auf transparenter Folie vermerke man für eine bescheidene Anzahl von r -Werten die Punkte $Q'(r, 0)$ und $P'_0(r, \dot{r})$ samt ihrer Verbindungsgeraden g' , welche die zu P'_0 gehörige Tangente bedeutet; die benötigten Werte von \dot{r} sind aus (3.13) einfach zu berechnen. Statt der Linienelemente 1. Ordnung verwende man aber besser gleich jene 2. Ordnung, repräsentiert durch Stücke der Krümmungskreise. Diese sind unschwer zu erfassen, weil die Normalen in Q' und P'_0 wegen $\operatorname{tg} \vartheta = r/\dot{r}$ den Punkt $(0, \dot{r})$ enthalten und die Krümmungsradien ρ für Q' und $\bar{\rho}$ (für P'_0) mittels der geläufigen Formeln

$$\rho = \frac{r^2 + i^2}{(r^2 + i^2)^{3/2}}, \quad \bar{\rho} = r + ir \quad (4.6)$$

zu bestimmten sind, wobei \tilde{r} aus (3.12) zu entnehmen ist. Ausgehend von der zu $r = 0$ gehörigen Nullstellung ($Q = O$, P_0' auf der y -Achse), in welcher man die Krümmungskreisbögen ($\varphi = i/2 = \sqrt{a^2 + c^2}$; $\tilde{\rho} = 0$, also Spitze) auf die Zeichenfläche übertragen hat, wird die mit der Zirkelspitze in O festgehaltene Folie so weit gedreht, bis das nächste Elementpaar gut anschließt; nun werden die neuen Krümmungs-elemente (mittels der durchgestochenen Krümmungszentren) wieder auf die Zeichenfläche übertragen. Das analog fortgesetzte Verfahren führt schnell und sehr genau zum Ziel auf dem Grenzkreis $r = r^*$. Weitere Teile der gleichzeitig erhaltenen Kurven l' und k_0' sind dann durch kongruente Wiederholung hinzuzufügen. — Der *Mittelliniengrundriß* k_0' besteht ebenfalls aus kongruenten und achsensymmetrischen Bögen, die jedoch in Spitzen aneinanderschließen; die Kurve gemahnt so an eine Hypozykloide (vgl. Abb. 2 und 3). Der Leitliniengrundriß l' erscheint als Fußpunktcurve von k_0' bezüglich des Zentrums O .

Mit geringer Erweiterung des geschilderten Verfahrens gelangt man auch noch zu den *Grundrissen* k_1', k_2' der *Bertrand-Kurven* k_1, k_2 . Man braucht hierzu nur auf der Folie die Punkte P_1' und P_2' zu vermerken, indem man jeweils auf der Ordinatenlinie g' vom P_0' aus die durch (3.10) bestimmten Strecken $\pm w$ abträgt (Abb. 1); die Punkte sind dann beim Integrationsprozeß ebenfalls durchzustechen.

Eine einfache *Tangentenkonstruktion* der Bertrand-Kurven steigert die Genauigkeit. Hierzu bedenke man, daß alle ∞^2 Normalen einer Erzeugenden g von Φ die Ferringrade h der Normalebene von g treffen.

Die in dem Normalennetz enthaltenen Gewindestrahlen — zu denen auch die gesuchten Tangenten t_1 von k_1 und t_2 von k_2 gehören — treffen dann auch die Nullpolare \tilde{h} von h (Abschnitt 2). Da h in der Fernebe liegt, geht \tilde{h} durch deren Nullpunkt, ist also parallel zur Gewindeachse und erscheint im Grundriß als Punkt \tilde{h}' , von dem leicht zu zeigen ist, daß er in den Antipol G des Erzeugendengrundrisses g' bezüglich des um O mit dem Radius c geschlagenen „Parameterkreises“ \circ fällt. Dieser auf der Folie der r -Achse angehörende Punkt $G(-c^2/r, 0)$ stellt also, durchgestochen, den Schnittpunkt der Tangentengrundrisse t_1', t_2' bereit (Abb. 1).

Faßt man nun den genannten Parameterkreis \circ als reellen Vertreter des nullteiligen Kreises \tilde{o} mit dem Radius $i c$ auf, und erklärt man

diesen zum absoluten Gebilde einer projektiven Maßbestimmung in der Grundebene, dann ist G der absolute Pol von g' . Im Sinne der damit begründeten *elliptischen Metrik* nach Cayley-Kleinschem Muster sind also die Tangenten $t_1' = P_1'G$ und $t_2' = P_2'G$ als „normal“ zu g' anzusehen. Dies bedeutet weiterhin, daß die Kurven k_1' und k_2' nichteuklidische Evolventen ihrer gemeinsamen Evolute k_0' und daher äquidistant sind.

Der elliptische Rollvorgang der Strecke $P_1'P_2'$ auf dem Mittelliniengrundriß k_0' hängt im übrigen aufs engste mit der in Abschnitt 1 betrachteten gemeinsamen Bündelbewegung der beiden in den Ursprung O verlegten begleitenden Dreibeine der Bertrandschen Gewindekurven k_1, k_2 zusammen, und zwar vermöge des mit dem Gewinde \mathfrak{G} verknüpften linearen Nullsystems. Bedenkt man nämlich, daß dem die euklidische Bündelmetrik regelnden Minimalkegel $\Omega(x^2 + y^2 + z^2 = 0)$ durch die Nullkorrelation der nullteilige Maßkreis $\tilde{\Omega}(x^2 + y^2 + c^2 = 0)$ in der Grundebebene zugeordnet wird, so ist klar, daß jeder Bewegung (Drehung) des euklidischen Bündels eine Bewegung (Drehung) der elliptischen Grundebebene entspricht. Aus der Tatsache, daß assozierte Tangenten bzw. Schmiegebenen den konstanten Schrankwinkel $\alpha = \varphi_{t_1't_2} = \varphi_{\tau_1\tau_2}$ bilden (Abschnitt 1), folgt ferner, daß im Grundriß der elliptische Winkel $t_1't_2'$ und die elliptische Länge $P_1'P_2'$ den unveränderlichen Betrag α aufweisen. Mit anderen Worten besagt diese Feststellung, daß der Winkel $t_1't_2'$ sowie die Strecke $P_1'P_2'$ aus dem Augpunkt $C(0, 0, c)$ unter konstantem euklidischen Gesichtswinkel α erscheinen¹.

Ergänzend wäre zu bemerken, daß die Symmetrieeigenschaften der Rosette l' und des Mittelliniengrundrisses k_0' entsprechende Eigen-

¹ Hinter diesen Zusammenhängen stehen zwei bemerkenswerte Eigenschaften der hier verwendeten Grundrißprojektion eines Gewindes, die auf dem Umstand beruhen, daß dem absoluten Kegelschnitt des (projektiv und ins Komplexe erweiterten) euklidischen Raumes vermöge der mit dem Gewinde verknüpften Nullkorrelation der nullteilige Drehzyylinder $x^2 + y^2 + c^2 = 0$ mit dem Basiskreis \tilde{o} zugeordnet wird. Es gilt nämlich: *Der euklidische Winkel zweier Ebenen stimmt mit dem elliptischen Abstand der Grundrisse ihrer Nullpunkte überein*. Ferner: *Der euklidische Winkel zweier Geraden stimmt mit dem elliptischen Winkel der Grundrisse ihrer Nullpolaren überein*. — Diese anscheinend noch nicht bemerkten Gesetze sind speziell beim Stadium von Gewindekurven verwertbar.

schaften der Kurven k_1' und k_2' nach sich ziehen: Diese haben das Aussehen von Schleifenlinien, die aus kongruenten und axialsymmetrischen, periodisch aneinander gereihten Teilbögen bestehen; sie gehen durch gewisse Spiegelungen an Radialstrahlen ebenso wie durch gewisse Drehungen um das Zentrum O in sich und ineinander über (Abb. 2 und 3). — Zusammenfassend gilt

Satz 2: Die Grundrisse k_1' , k_2' der Bertrandschen Gewindekurven k_1 , k_2 (3.7) sind aus kongruenten und axialsymmetrischen, periodisch aneinander gereihten Teilbögen aufgebaut und gehen durch gewisse Drehungen um den Ursprung O ineinander über. Im Sinne der auf den nullteiligen Kreis \tilde{o} ($x^2 + y^2 + c^2 = 0$) gegründeten elliptischen Metrik in der Grundebene $z = 0$ sind sie als Evolventen des Mittelliniengrundrisses k_0' (4.5) aufzufassen; assoziierte Punkte haben im Grundriß konstante elliptische Entfernung α (3.19), und assoziierte Tangenten bilden im Grundriß den festen elliptischen Winkel α .

Für den Zeichner seien noch die zu $r = 0$ gehörigen Beträge der Scheitelkrümmungsradien von k_1' und k_2' mitgeteilt:

$$\rho_{1,2} = ac^2/(a^2 + b^2 + c^2 \pm a\sqrt{a^2 + b^2}). \quad (4.7)$$

5. Übergang zu den Raumkurven

Durch ihre Grundrisse k_1' und k_2' — die gestaltlich an verschlungene Hypotrochoiden erinnern — sind nun die Bertrandschen Gewindekurven k_1 und k_2 bis auf Translationen längs der Gewindeachse $x = y = 0$ bestimmt (Abschnitt 2). Auf Grund der festgestellten Kongruenz der Kurven k_1' und k_2' und ihrer Symmetrieeigenschaften bestehen entsprechende Beziehungen auch für die Raumkurven selbst. Sie seien zusammengefaßt in

Satz 3: Die beiden Bestandteile k_1 und k_2 des Bertrandschen Gewindekurvenpaars (3.7) sind zueinander kongruent. Jeder von ihnen hat periodische Struktur und ist aus kongruenten, axialsymmetrischen, glatt

aneinander gereihten Teilbögen aufgebaut, die durch gewisse Schraubungen um die Gewindeachse ineinander übergehen.²

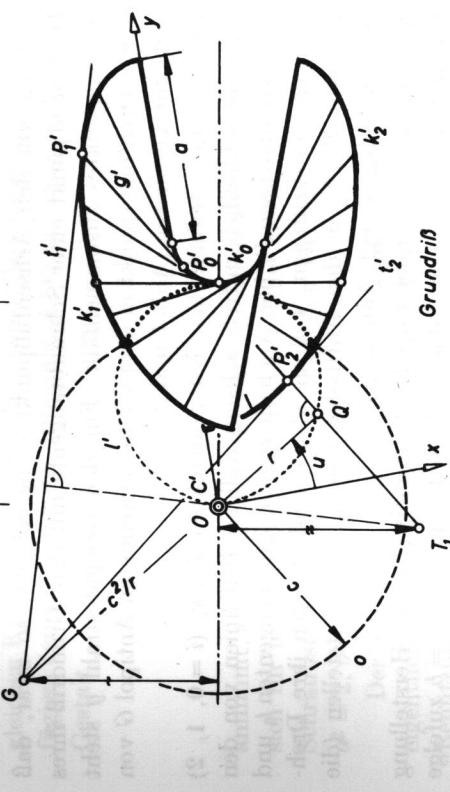
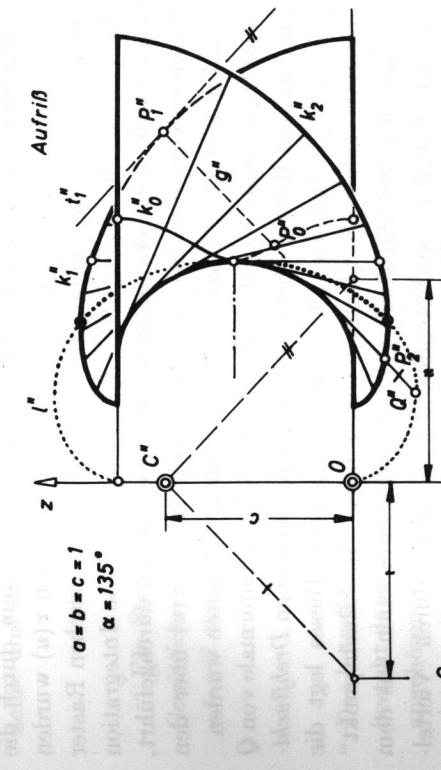


Abb. 2. Bertrandsches Gewindekurvenpaar

Zur Illustration der Ausführungen wurde die bequeme, jedoch alle typischen Merkmale aufweisende Annahme $a = b = c = 1$ gewählt.

² Aus kongruenten, jedoch mit Spitzen behafteten Teilbögen baut sich in ähnlicher Schraubustruktur auch das von E. Salkowski [7] betrachtete Bertrandsche Kurvenpaar fester Hauptnormalensteigung auf, dessen beide Bestandteile ebenfalls zueinander kongruent sind [12].

Nach Bereitstellung des Grundrisses in Abb. 2 mittels der in Abschnitt 4 dargelegten Methode wurde zur Ermittlung der Höhenkoten der folgende, allgemein gangbare Weg eingeschlagen. Aus dem durch die Rosette ℓ' repräsentierten Polardiagramm der Funktion $r(u)$ wurden einige Wertepaare r, u entnommen, um in einem kartesischen Raster ein Schaubild der Funktion $(2r^2 - b^2)/c$ anzulegen. Die Integration (3.15) wurde sodann in gebräuchlicher Weise graphisch durchgeführt, worauf durch Auftragen der so gewonnenen Koten $z(u)$ über den benutzten Punkten $Q' \in \ell'$ Punkte Q der Leitkurve ℓ erhalten wurden.

Der zu Q gehörige Gewindestrahl g — die Schraubbinormale von Q — wurde dann mit Hilfe des bei der Schraubung nützlichen *Drehfluchtprinzips* von Th. Schmid [9, S. 216] aufgesucht. Dieses legt die Richtung einer beliebigen Geraden durch ihren „Drehfluchtpunkt“ fest, der aus dem gewöhnlichen, bei der Zentralprojektion aus dem Achsenpunkt $C(0, 0, c)$ auftretenden Fluchtpunkt durch Viertel-schwenkung um den Achsenfußpunkt O hervorgeht, so zwar, daß der Drehfluchtpunkt einer Schraubtangente mit dem Grundriß ihres Berührungs punktes zusammenfällt. Für den Gewindestrahl g steht daher sein Drehfluchtpunkt in dem schon verwendeten Antipol G von g' bereits zur Verfügung (Abb. 1 und 2).

Zu den auf g befindlichen Kurvenpunkten $P_i \in k_i$ ($i = 0, 1, 2$) gelangt man schließlich mittels achsenparalleler Hilfslinien von den bekannten Grundrissen P'_i her. Auch die zugehörigen Tangenten t_1 und t_2 sind leicht hinzuzufügen, weil sie als Gewindestrahlen ihre Drehfluchtpunkte T_1, T_2 in den Antipolen von t'_1, t'_2 bereitstellen (die übrigens auf g' liegen, vgl. Abb. 2)³.

Zu erwähnen wäre noch folgende Einzelheit: Bei der Herstellung der Foliengröße gemäß Abb. 1 fällt auf, daß zum Wert $r = b$ zufolge (3.13) und (3.10) die Werte $r = \pm w$ gehören, sodaß entweder P_2 oder P_1 mit Q zusammenfällt. Es handelt sich um die Schnittpunkte der

Leitkurve ℓ mit den Bertrand-Kurven k_2 bzw. k_1 ; sie sind allerdings nur bei $b^2 > 0$ reell. Die Tangenten t_2 bzw. t_1 daselbst treffen die Gewinde-achse und sind daher parallel zur Grundebene (Abb. 2).

6. Grenz- und Sonderfälle

Ein Sonderfall der bisher anscheinend noch nicht untersuchten *Gewindekurven konstanter Krümmung* stellt sich gemäß Abschnitt 1 mit $\alpha = \pi/2$ ein, also wegen (3.19) für

$$b^2 = -c^2 < 0. \quad (6.1)$$

Das betreffende, nach wie vor durch (3.7) beschriebene Bertrand-Paar besteht dann aus einer Gewindekurve k_1 und ihrer demselben Gewinde angehörenden *kongruenten Planevolute* k_2 ; beide Kurven haben den gleichen Krümmungsradius $2a = \text{const}$. Ansonsten ist nur eine geringfügige Vereinfachung des Integrals (3.14) zu vermerken, das jetzt die Gestalt

$$u = \int_0^r \sqrt{\frac{c^2 + r^2}{a^2 c^2 - (c^2 + r^2)^2}} dr \quad (6.2)$$

annimmt, aber auch nicht elementar auswertbar ist. Reelle Kurven, die sich für $a > c > 0$ ergeben, weisen wieder die in Satz 3 geschilderte Schraubstruktur auf. Abb. 3 zeigt den Grundriß für die Annahme $a^2 = 2, b^2 = -1, c = 1$.

Der Grenzfall $a = 0$ ($\alpha = 0$) vereinigt *Bertrand-Kurven* sollte eigentlich Gewindekurven konstanter Torsion erwarten lassen. Mit Benützung der noch immer gültigen Integrale (3.14) und (3.15) gelangt man zwar zu einer durchaus regulären Leitkurve ℓ in Gestalt einer Ellipse

$$r = b \sin u, \quad z = -\frac{b^2}{2c} \sin 2u, \quad (6.3)$$

³ Die zeichnerisch gewonnenen Ergebnisse in Abb. 2 und 3 wurden durch numerische Auswertungen überprüft, die im Rechenzentrum der Österreichischen Akademie der Wissenschaften von Herrn Dr. F. J. Firneis durchgeführt wurden, dem ich hierfür sowie für benötigte Interpolationen zu besonderem Dank verpflichtet bin. Die Übereinstimmung erwies sich als äußerst befriedigend.

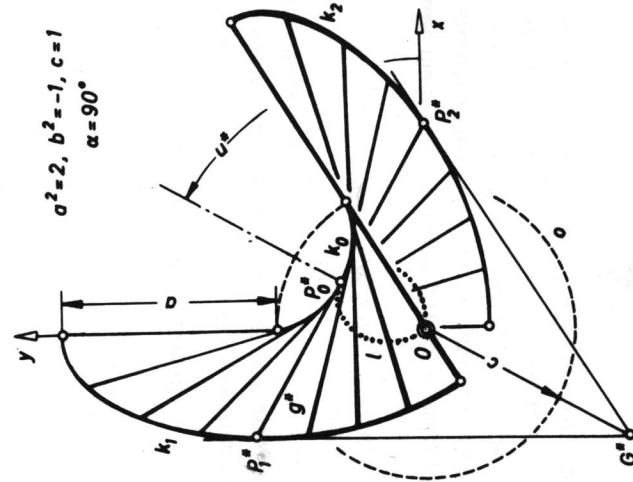


Abb. 3. Gewindekurve konstanter Krümmung samt Planevolute

$$X_{1,2} = \mp a \sin u, Y_{1,2} = \pm a \cos u, Z_{1,2} = \frac{a^2}{c} u \quad (6.4)$$

gebildet, die durch Spiegelung an der Schraub- und Gewindeachse $x = y = 0$ miteinander vertauscht werden. Der Schrämkwinkel α ist durch $\operatorname{tg}(\alpha/2) = c/a$ bestimmt.

Mit den Schraublinien (6.4) ist man nun doch auf Bertrandsche Paare von Gewindekurven konstanter Torsion gestoßen, die allerdings nicht vereinigt sind. *Gewöhnliche Schraublinien* sind übrigens die *einzigen Gewindekurven konstanter Torsion*. Einfacher als bei G. Loria [5, S. 20] folgert man dies aus der bekannten Tatsache [4, S. 231 ff.], daß alle durch einen festen Punkt P gehenden Gewindekurven dasselbst die gleiche Torsion besitzen. Allgemeiner bedeutet dies, daß die Torsion einer Gewindekurve nur vom Achsenabstand R des laufenden Punktes P abhängt; die betreffende Formel lautet [3, S. 87]:

$$\tau = \frac{c}{c^2 + R^2}. \quad (6.5)$$

Eine Gewindekurve konstanter Torsion muß daher auf einem Drehzylinder $R = a = \text{const}$ verlaufen, was sie zwangsläufig als gewöhnliche Schraublinie kennzeichnet.

Mit Hilfe der Formel (6.5) ließen sich auch die Torsionen τ_1, τ_2 des Bertrandschen Gewindekurvenpaars (3.7) über $R_{1,2}^2 = X_{1,2}^2 + Y_{1,2}^2$ in ihrer Abhängigkeit von r angeben, was die Verifikation der zweiten Relation (1.2) und die Berechnung der Krümmungen κ_1, κ_2 gemäß (1.2) gestatten würde.

Literatur

- [1] Bertrand, J.: Mémoire sur la théorie des courbes à double courbure. J. math. pur. appl. **15** (1850), 332–350.
- [2] Gambier, B.: Les courbes de Bertrand (Trav. Mém. Univ. Lille, Vol. 4). Gauthier-Villars, Paris 1926.
- [3] Kruppa, E.: Analytische und konstruktive Differentialgeometrie. Springer, Wien 1957.

- [4] Lie, S. und G. Scheffers: Geometrie der Berührungstransformationen. Teubner, Leipzig 1896.
- [5] Loria, G.: Curve sghembe speciali, II. Zanichelli, Bologna 1925.
- [6] Müller, E. und J. Krames: Konstruktive Behandlung der Regelflächen (Vorl. über Darst. Geometrie, Bd. III). Deuticke, Leipzig/Wien 1931.
- [7] Salkowski, E.: Beiträge zur Kenntnis der Bertrandschen Kurven. Math. Ann. **69** (1910), 560—579.
- [8] Scheffers, G.: Besondere transzendente Raumkurven. Enz. Math. Wiss. III D 4.
- [9] Schmid, Th.: Darstellende Geometrie, II (Sammlung Schubert, Bd. 66). De Gruyter, Berlin/Leipzig 1921.
- [10] Strubecker, K.: Über die Schraubbungen des elliptischen Raumes. Sb. Akad. Wiss. Wien **139** (1930), 421—450. — Über nichteuklidische Schraubbungen. Monatsh. Math. Phys. **38** (1931), 63—84.
- [11] Strubecker, K.: Differentialgeometrie, I (Sammlg. Göschens, Bd. 1113). De Gruyter, Berlin 1964.
- [12] Wunderlich, W.: Über die durch fortschreitenden harmonischen Umschwing erzeugbaren Hülltoren. Čas. pěst. mat. **98** (1975), 130—144.
- [13] Wunderlich, W.: Eine bemerkenswerte Familie von speziellen Gewindekurven. Monatsh. Math. (im Druck).
- [14] Wunderlich, W.: Gewindekurven auf dem Torus. Anz. Österr. Akad. Wiss. **118** (1981), 24—29.

Adresse des Autors: Prof. Dr. W. Wunderlich, Technische Universität, Gußhaus straße 27, A-1040 Wien.