

Spiegelung am elliptischen Paraboloid

Von

Walter Wunderlich, Wien.

Mit 9 Abbildungen.

(Eingelangt am 11. Dezember 1942.)

1. Einleitung.

Seit jeher hat die Spiegelung an gekrümmten Oberflächen das Interesse von Geometern wachgerufen. Neben vorwiegend differentialgeometrischen Untersuchungen für beliebige analytische Spiegelflächen¹ und solchen abzählender Natur für algebraische² waren es immer wieder besonders die Flächen zweiten Grades, deren Spiegeleigenschaften die Aufmerksamkeit fesselten. Hierher gehören vor allem die Arbeiten von *J. Plücker*³, *O. Staudé*⁴ und *S. Finsterwalder*⁵.

Abgesehen von früheren unvollkommenen Versuchen⁶ hat sich die darstellende Geometrie eigentlich erst in letzter Zeit mit diesem dankbaren Gebiet zu beschäftigen begonnen. So hat *H. Hominger* eine systematische Untersuchung der Reflexionserscheinungen auf rein geometrischem Wege unternommen⁷, wobei er die wichtigsten hierhergehörigen differentialgeometrischen Eigenschaften herleitete und in algebraischer Hinsicht sogar manche Ergänzung geben konnte. Eine zweite Arbeit behandelt die „Fokalspiegelung“ an Flächen zweiten

¹ *W. R. Hamilton*, Abhandlungen zur Strahlenoptik. Neuauflage von *R. Prange* (Leipzig 1933).

² *A. Del Re*, Über die Theorie der Systeme von Reflexstrahlen. Rend. circ. mat. Palermo 1 (1887).

³ Sur la Réflexion de la Lumière, dans le cas des surfaces du second degré, analogue à celle qui aux foyers des sections coniques a donné le nom. Crelle J. 35 (1847).

⁴ Eine katoptrische Eigenschaft des Ellipsoids. Math. Ann. 27 (1886).

⁵ Katoptrische Eigenschaften der Flächen zweiten Grades. Sitzungsber. bayr. Ak. Wiss. 17 (1887).

⁶ *J. N. P. Hachette*, Traité de géométrie descriptive (Paris 1828), S. 251 ff. — *R. Niemann*, Neue Konstruktionen der auf ebenen und krummen Flächen erscheinenden Reflexe und hierauf bezügliche Theoreme. Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien 53 (1866).

⁷ Zur geometrischen Theorie der Spiegelung an krummen Oberflächen. Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien 145 (1936).

Grades⁸; *Horninger* nimmt dabei das Auge des Betrachters auf einer Fokalkurve der spiegelnden Fläche an und erreicht durch diese Wahl eine besondere Einfachheit in konstruktiver Hinsicht.

Der vorliegende Aufsatz ist der Spiegelung am elliptischen Paraboloid bei achsenparalleler Blickrichtung gewidmet, wobei schon deshalb besondere Verhältnisse zu erwarten sind, weil das Auge gleichzeitig auf zwei Fokalkurven liegt. Die Arbeit erschien kurz nach ihrer Entstehung durch die zuletzt genannte Abhandlung zum Teil überholt; die nachträgliche Entdeckung einer Reihe weiterer bemerkenswerter Beziehungen bei dieser Spiegelung läßt eine Veröffentlichung nun doch lohnend erscheinen. — Im übrigen beschränkt sich die Arbeit nicht auf die Bestimmung von „Reflexen“ auf der spiegelnden Fläche, sondern es werden — in Betonung des darstellend-geometrischen Standpunktes — grundsätzlich deren Projektionen aus dem Auge, also die eigentlichen „Spiegelbilder“ betrachtet; dies bringt gleichzeitig beachtliche Vereinfachungen mit sich.

Der Grenzfall des Drehparaboloides weist stark ausgeartete Abweichungen auf und fand zusammen mit anderen Sonderfällen von Spiegelungen an Flächen zweiten Grades eine selbständige Darstellung in einer früheren Arbeit⁹. Die Behandlung des spiegelnden hyperbolischen Paraboloides und des parabolischen Zylinders mag eigenen Aufsätzen vorbehalten bleiben. —

Zunächst einiges Grundsätzliche zur Spiegelung an einer krummen Oberfläche Φ : Unter den von einem Raumpunkt P ausgehenden Lichtstrahlen kann es einen (oder auch mehrere) geben, der beim Auftreffen auf Φ so reflektiert wird, daß er in das Sehzentrum Z gelangt und daselbst einen aus der Richtung des „Spiegelpunktes“ oder „Reflexes“ P_s kommenden Bildeindruck hervorruft (Abb. 1). Dessen Riß P'_s aus Z

Abb. 1. Entstehung von Spiegelbildern.

auf eine beliebige Bild- und Zeichenebene π — meist als „optische

⁸ Über die Fokalspiegelung an Flächen zweiten Grades. *Mh. Math. Phys.* 45 (1936).

⁹ *W. Wunderlich*, Darbousche Verwandtschaft und Spiegelung an Flächen zweiten Grades. *Deutsche Math.* 7 (1943).

Projektion“ bezeichnet — soll kurz das „Spiegelbild“ P^* von P genannt werden.

Die Reflexion in P findet dabei bekanntlich so statt, daß der Winkel zwischen dem einfallenden „Spiegelstrahl“ (Reflexstrahl) PP_s und dem austretenden Sehstrahl P_sZ von der Flächennormale n gehäuft wird. Die Gesamtheit aller ∞^2 Spiegelstrahlen ergibt sich durch Spiegelung des Sehstrahlbündels Z an Φ ; diese Spiegelstrahlkongruenz besteht nach dem Satz von *Malus-Dupin* aus den Normalen einer Schar von Parallelflächen, Antikaustiken genannt.

Zieht man, wie dies im folgenden geschieht, auch mehrmalige Spiegelung an Φ in Betracht, so hat man demgemäß primäre, sekundäre, tertiäre, ... Spiegelbilder, Spiegelstrahlen usw. zu unterscheiden. Abb. 1 veranschaulicht die Entstehung des sekundären Spiegelbildes Q^{**} eines Punktes Q .

2. Die primäre Spiegelstrahlkongruenz des elliptischen Paraboloides bei achsenparalleler Blickrichtung.

Wir legen unseren Betrachtungen das elliptische Paraboloid Φ $(x, y, z \text{ kartesische Normalkoordinaten})$ (1)
$$\Phi \dots z = \frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b} \quad a > b > 0$$
 zugrunde. Das Auge liege im Fernpunkt Z_u der z -Achse, die Blickrichtung weise in die Höhlung des Paraboloides. Als Bildebene π verwenden wir die Koordinatenebene $z = 0$, die Φ im Scheitel und Ursprung O berührt; die Normalprojektion auf die Bildebene wird Grundriß genannt und wie üblich durch einen Akzent gekennzeichnet.

Die parallelen Ebenen $x = \text{const}$ schneiden Φ nach untereinander kongruenten Parabeln vom Parameter b ; das Paraboloid kann daher als Schiebfläche erzeugt werden, indem eine dieser Parabeln mit ihrem Scheitel längs der Hauptparabel $y = 0$ vom Parameter a verschoben wird. Ersetzen wir letztere durch eine sie im Punkt (X_1) berührende achsenparallele Parabel vom Parameter b , so erhalten wir durch die Schiebung ein Drehparaboloid Φ_1 , das Φ längs einer Schiebparabel eingeschrieben ist. Die in deren Ebene ξ_1 ($x = x_1$) verlaufenden Sehstrahlen werden mithin an Φ wie an Φ_1 zum Brennpunkt X_1 von Φ_1 reflektiert. Nach Abb. 2 ergibt sich X_1 aus dem Brennpunkt A der Hauptparabel $y = 0$ — von *Staudé* „Hauptbrennpunkt“ genannt — durch die Streckung $b : a$ von (X_1) aus, demnach aus (X_1) durch Anwendung der Streckung $(a-b) : a$ von A aus. Als Ort aller Brennpunkte

X_1 finden wir damit eine Parabel mit dem Brennpunkt A und dem Parameter $a-b$, also die Fokalparabel e

$$e \dots x^2 = 2(a-b)\left(z - \frac{b}{2}\right), y = 0. \quad (2)$$

Sie wird mithin von allen Spiegelstrahlen getroffen; aus Gründen der Gleichberechtigung schneiden diese aber auch die zweite Fokalparabel f

$$f \dots y^2 = 2(b-a)\left(z - \frac{a}{2}\right), x = 0, \quad (3)$$

zu der man in analoger Weise gelangt, wenn man von der Ebenenschar $y = \text{const}$ ausgeht. Man kann aber auch die Projektion der Schiebeparabel $[\xi_1 \Phi]$ aus dem zugehörigen Brennpunkt X_1 auf die Hauptebene $x = 0$ aufsuchen und sich an Hand von Abb. 2 überzeugen,

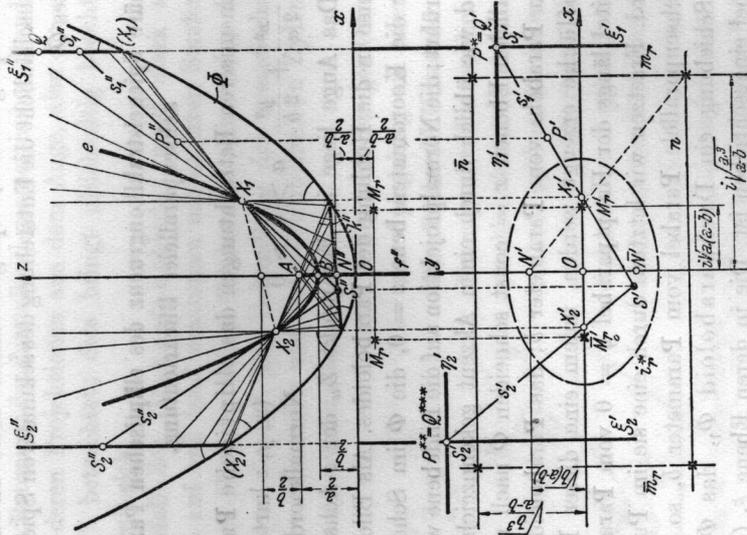


Abb. 2. Strahlengang in Grund- und Aufriss.

daß das Ergebnis f unabhängig von ξ_1 ausfällt. — Die beiden Fokalparabeln sind bekanntlich kongruent und der Scheitel der einen fällt mit dem Brennpunkt der anderen zusammen.

Wir haben also zunächst festgestellt, daß die primäre Spiegelstrahlkongruenz aus den Treffgeraden der beiden Fokalparabeln e und f des spiegelnden Paraboloides besteht.¹⁰ Ihr Bündelgrad ist 3, ihr Feldgrad 4. Die in ihr enthaltenen ∞^1 Torsen sind die Verbindungskegel von e mit den Punkten von f und umgekehrt; sie sind zufolge einer bekannten Eigenschaft von Fokalkegelschnitten Drehkegel.

Damit läßt sich auch die Frage nach der Schar der Antikaustiken leicht beantworten: Die Normalen einer Fläche lassen sich zu Torsen nur längs der Krümmungslinien zusammenfassen; diese ergeben sich bei uns in den Orthogonaltrajektorien der Kegele erzeugenden als Kreise, den Grenzfall der Gerade mitinbegriffen. Die Antikaustiken sind dann aber Dupinsche Zykliken, und da sie sich ins Unendliche erstrecken, insonderheit parabolische, also von der dritten Ordnung¹⁰.

Satz 1. Die primäre Spiegelstrahlkongruenz des elliptischen Paraboloides wird bei achsenparalleler Blickrichtung von den Treffgeraden der beiden Fokalparabeln gebildet. Die Parallelschar der Antikaustiken besteht aus parabolischen Dupinschen Zykliken.

3. Die sekundäre und tertiäre Spiegelstrahlkongruenz.

Nach dieser elementaren Einführung betrachten wir unsere Spiegelung einmal vom Standpunkt der Fokaltheorie der Flächen zweiten Grades aus.

Die von dem Paraboloid Φ und dem absoluten Kugelkreis aufgespannte Schar konfokaler Flächen zweiter Klasse enthält auch die beiden Brennparabeln e und f , sowie den absoluten Kugelkreis als ausgeartete Mitglieder. Die aus einem Raumpunkt S an die Flächen legbaren Berührungskegel zweiter Klasse sind ebenfalls konfokal und daher auch koaxial. Liegt S auf Φ , so ist die Flächennormale n daselbst eine der gemeinsamen Kegelhauptachsen und die vier Schnitterzeugenden der Scharkegel $[Se]$ und $[Sf]$ liegen paarweise symmetrisch zu ihr, gehen also durch Spiegelung an Φ ineinander über. Unter diesen Erzeugenden befindet sich der Sehstrahl $p = [SZ_{\nu}]$, der mithin in eine Treffgerade s von e und f gespiegelt wird, was wir bereits wissen. Die beiden restlichen Erzeugenden s_1, s_2 sind aber auch Spiegelstrahlen,

¹⁰ Enz. math. Wiss. III D 5, Nr. 11. — V. u. K. Kommerell, Allgemeine Theorie der Raumkurven und Flächen, II. Bd. (Samml. Schubert 44); 2. Aufl. (1911), S. 34f.

die zugehörigen ordentlichen und außerordentlichen Spiegelpunkte am bequemsten findet, geht aus den beiden folgenden Abschnitten hervor.

4. Pseudonormalismus und Doppellot.

Wie wir zu Beginn des vorigen Abschnittes erkannt haben, bilden die von einem Oberflächenpunkt S ausgehenden drei Spiegelstrahlen s, s_1, s_2 zusammen mit dem Sehstrahl p Paare von Gegengerzeugenden auf den zwei konfokalen Kegeln $[Se]$ und $[Sf]$. Der konfokalen Kegel schar gehört als ausgeartetes Mitglied auch das Paar der (konjugiert-komplexen) Flächen erzeugenden d, \bar{d} durch S an. Es gibt mithin aus Symmetriegründen einen Kegel zweiten Grades Σ , der sowohl unsere vier Strahlen als auch das Erzeugendenpaar enthält. Die Ebenen durch die Flächennormale n schneiden Σ nach Gegengerzeugenden, d. h. nach Paaren einer Involution mit den Doppelstrahlen d, \bar{d} ; dieser Involution gehören insbesondere die beiden verbundenen Spiegelstrahlen s_1, s_2 an. Projektion aus dem auf Σ gelegenen Auge Z_u führt auf eine entsprechende Strahleninvolution im Grundriß und s'_1, s'_2 liegen demzufolge harmonisch zu d', \bar{d}' .

Fassen wir nun die auf der Ferngerade u der Bildebene π liegenden konjugiert-komplexen Punkte D, \bar{D} ($x:y:z = \sqrt{a} : \pm i \sqrt{b} : 0$) des Paraboloides Φ als die absoluten Punkte einer pseudo-euklidischen Metrik auf, so sind d' und \bar{d}' als Pseudo-Minimalgeraden anzusehen und wir können sagen:

Satz 4. Die Grundrisse verbundener Spiegelstrahlen sind pseudonormal.

Nunmehr wollen wir den Zusammenhang zwischen einem Spiegelstrahl s und seinem ordentlichen Spiegelpunkt S etwas näher beleuchten. Sind X und Y die Punkte, in denen s die Brennparabel e und f trifft, so gilt — wie man durch Betrachtung des Aufnisses in Abb. 2 für den Spiegelstrahl s_1 sofort bestätigt

$$SX : SY = b : a. \tag{4}$$

Da dieses Teilverhältnis bei jeder Parallelprojektion erhalten bleibt, gibt es eine einfache und sichere Vorschrift zur (linearen) Konstruktion von S bei gegebenem s .

Trotzdem wollen wir uns für den Grundriß noch eine eigene Konstruktion zurechtlegen. Da sich die Reflexion Sehstrahl — Spiegelstrahl

¹¹ In den Abbildungen wird der euklidische rechte Winkel wie üblich durch einen kleinen Viereck mit eingesetztem Punkt gekennzeichnet, der pseudo-euklidische hingegen durch eine Viereckellipse mit zwei Punkten.

denn sie schneiden e und f im Endlichen, und daß auch diese durch Reflexion auseinander hervorgehen, ist neu. Wir schließen daraus:

Satz 2. Die sekundäre Spiegelstrahlkongruenz des elliptischen Paraboloides fällt bei achsenparalleler Blickrichtung mit der primären zusammen.

Die beiden Schnittpunkte eines Spiegelstrahls s mit dem Paraboloid Φ können wir offenbar nicht als gleichberechtigt ansehen. Wir wollen daher jenen Punkt, in dem s durch Spiegelung aus einem Sehstrahl hervorgeht, den „ordentlichen“ Spiegelpunkt von s nennen; der andere Schnittpunkt, wo die Reflexion wieder einen Spiegelstrahl liefert, soll „außerordentlich“ heißen. Zwei durch Spiegelung ineinander übergehende Spiegelstrahlen sollen „verbunden“ genannt werden.

Die zwei vorhin betrachteten verbundenen Spiegelstrahlen s_1, s_2 mit dem gemeinsamen außerordentlichen Spiegelpunkt S werden in ihren ordentlichen Schnittpunkten mit Φ beide als Sehstrahlen reflektiert. Daraus folgt eine überraschende, bisher anscheinend nicht bemerkte Tatsache:

Satz 3. Ein parallel zur Achse eines spiegelnden elliptischen Paraboloides einfallender Lichtstrahl, der in keiner Hauptebene liegt, tritt nach dreimaliger Reflexion wieder parallel zur Achse aus.

Die tertiäre Spiegelstrahlkongruenz des elliptischen Paraboloides fällt bei achsenparalleler Blickrichtung mit dem Sehstrahlbündel zusammen. Achsenparallele Lichtstrahlen in einer Hauptebene kehren bereits nach zweimaliger Reflexion parallel zurück, ebenso beim Drehparaboloid.

Nach Satz 3 gibt es in unserem Fall also keine Spiegelbilder von höherer als dritter Ordnung. — Da durch einen allgemeinen Raumpunkt P drei Spiegelstrahlen gehen, hat dieser drei primäre Spiegelbilder, die sich durch Bestimmung der ordentlichen Spiegelpunkte ermitteln lassen, ferner drei sekundäre, die sich auf dem Weg über die außerordentlichen Spiegelpunkte ergeben, und ein tertiäres. Liegt P im Innern von Φ und in keiner Hauptebene, so treten diese sieben Spiegelbilder vollzählig auf (vgl. Satz 6 und 14, ferner Abb. 7).

Zur Konstruktion der drei durch P gehenden Spiegelstrahlen hat man die beiden Verbindungskegel $[Pe]$ und $[Pf]$ zu verschneiden. Dies kann zeichnerisch dadurch geschehen, daß man die Brennparabel f aus P auf die Hauptebene $y = 0$ projiziert und hier die so gewonnene Hyperbel f^c mit e zum Schnitt bringt; die drei von Z_u verschiedenen Schnittpunkte sind Spurpunkte der gesuchten Spiegelstrahlen. Wie man

in einer achsenparallelen Ebene abspielt, deckt sich s' mit dem Grundriß der Flächennormale in S , erscheint somit als Normale des Grundrisses jener „Schichtenellipse“ l , in der das Paraboloid von der durch S gehenden Parallelebene zu π geschnitten wird (Abb. 3a). Die

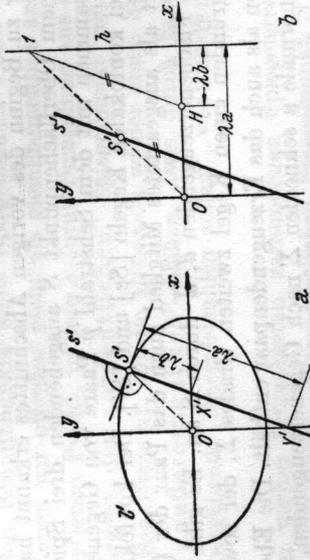


Abb. 3. Zusammenhang zwischen Spiegelstrahl s und ordentlichem Spiegelpunkt S .

Ellipsentangente in S' und der Halbmesser OS' sind konjugiert zu l' , also pseudonormal. Wir wollen OS' das „Doppellot“ des Spiegelstrahlgrundrisses s' nennen, denn wir erhalten es, wenn wir auf s' zuerst das gewöhnliche Lot und auf dieses das Pseudolot fallen (die Reihenfolge ist wesentlich!).

Satz 5. Fällt man auf den Grundriß eines Spiegelstrahles das Doppellot aus O , so stellt dessen Fußpunkt den Grundriß des zugehörigen ordentlichen Spiegelpunktes dar.

Der Zusammenhang zwischen s' und S' ist nun gut zu übersehen, da es sich um eine Art von Fußpunktverwandtschaft handelt; die Richtungen von Gerade und zugehörigem Doppellot sind ja projektiv, die Transformation $\mathfrak{D} = s' \rightarrow S'$ demnach birational-quadratisch. Das Hauptdreieck wird von x, y und u aufgespannt. — Abb. 3b stellt eine Zeichenvorschrift für \mathfrak{D} dar, deren Richtigkeit auf Grund von (4) elementar einzusehen ist: Man ziehe durch den fest gewählten Punkt H auf x oder y die Parallele zu s' bis zum Schnitt 1 mit der festen Achse $h \parallel y$ bzw. x ($Oh: Hh = a:b$ bzw. $b:a$); $O1$ ist das Doppellot und schneidet s' in S' .

5. Die quadratische Verwandtschaft \mathfrak{Q} .

Kehren wir nochmals zu Abb. 2 zurück. Die in der Ebene $\xi_1 (x = x_1)$ — nach *Horninger*⁸ als „Kernebene“ zu bezeichnen — einfallenden Sehstrahlen werden nach § 2 in Form eines Drehkegels nach X_1 auf der

Brennparabel e reflektiert. Dieser Kegel $[X_1 f]$ schneidet das Paraboloid Φ außer in der Kernparabel $[\xi_1 \Phi]$ noch nach einer Ellipse k , die die endlichen Schnittpunkte von f und Φ , d. h. die reellen Nabelpunkte N, \bar{N} enthält; X_1 befindet sich senkrecht über einem Hauptachsenendpunkt von k . Zu derselben Ellipse muß man offenbar auch gelangen, wenn man von einer zweiten Kernebene $\xi_2 (x = x_2)$ ausgeht, deren Sehstrahlen nach jenem Punkt X_2 auf e reflektiert werden, der senkrecht über dem anderen Achsenendpunkt von k liegt. Die beiden Drehkegel $[X_1 k]$ und $[X_2 k]$ bestehen aus Spiegelstrahlen, die auf k gemeinsame außerordentliche Spiegelpunkte besitzen, mithin durch Spiegelung längs k ineinander übergehen.

Die Kegelspitzen X_1 und X_2 bilden auf der Parabel e eine Involution, deren Doppelpunkte die auf e gelegenen (konjugiert-komplexen) Nabelpunkte M, \bar{M} sind; denn der von einem Nabelpunkt ausgehende Drehkegel von Spiegelstrahlen geht auf Grund der Fokaltheorie durch Reflexion an Φ in sich selbst über. — Wir vermerken bei dieser Gelegenheit die Koordinaten der Nabelpunkte

$$M, \bar{M} \left(\pm i \sqrt{a(a-b)}, 0, -\frac{a-b}{2} \right) \quad (5)$$

$$N, \bar{N} \left(0, \pm \sqrt{b(a-b)}, \frac{a-b}{2} \right).$$

Die zu X_1 und X_2 gehörigen Kernebenen ξ_1 und ξ_2 entsprechen einander ebenfalls in einer quadratischen Involution. Wie aus Abb. 2 leicht abzulesen ist, hat X_2 die Abszisse $-a^2/x_1$, ξ_2 mithin die Abszisse $x_2 = -a^3/(a-b)x_1$. Entsprechend ergibt sich für zwei zusammengehörige Ebenen $\eta_1 (y = y_1)$ und $\eta_2 (y = y_2)$ des anderen Kernebenenbüschels die Beziehung $y_2 = b^3/(a-b)y_1$. — Doppelleben sind die Nabelpunkten zugeordneten Ebenen

$$\mu, \bar{\mu} \dots x = \pm ai \sqrt{a(a-b)} \quad (6)$$

$$v, \bar{v} \dots y = \mp b \sqrt{b(a-b)}.$$

Der Sehstrahl $p_1 = [\xi_1 \eta_1]$ geht nun nach dreimaliger Reflexion (über S_1, s_1, S, s_2, S_2) in den Sehstrahl $p_2 = [\xi_2 \eta_2]$ über (vgl. Satz 3) und hängt mit diesem durch die involutorische birationale quadratische Verwandtschaft \mathfrak{Q}

$$\mathfrak{Q} \dots x_1 \cdot x_2 = -\frac{a^3}{a-b}, y_1 \cdot y_2 = \frac{b^3}{a-b} \quad (7)$$

Der Grundriß $i_s' = i_s^*$ — das primäre Spiegelbild des absoluten Kugelkreises i — ist als Normalschnitt des Zylinders Ω eine nullteilige Ellipse. Zu ihren Scheiteln kann man über die Berührungspunkte der Hauptparabeln von Φ legbaren Minimaltangente gelangen; da letztere durch die Hauptbrennpunkte A bzw. B gehen, ergeben sich die Halbachsen von i_s^* sofort zu ai bzw. bi :

$$i_s^* \dots \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0. \quad (8)$$

Diese Ellipse, die im folgenden eine wichtige Rolle spielen wird, soll „Zentralellipse“ genannt werden. Sie wird in den Abbildungen durch ihren reellen Vertreter $i_s'^*$ (mit den Halbachsen a und b) repräsentiert.

Sei S ein Punkt von i_s und s der zugehörige Minimalstrahl. Die Tangente t der Quartik i_s ist konjugiert zu s , im Grundriß daher pseudonormal zu s' . Der Grundriß des mit s verbundenen Spiegelstrahls \bar{s} ist nach Satz 4 aber ebenfalls pseudonormal zu s' , fällt daher mit t' zusammen. Alle Spiegelstrahlen \bar{s} berühren demnach den Zylinder Ω längs i_s und erfüllen eine rationale Regelfläche $\bar{\Theta}$ mit den Fokalparabeln als Doppelkurven; sie ist von achter Ordnung.

Die vier Minimalerzeugenden des Paraboloids Φ gehören sowohl der Torse Θ wie der Regelfläche $\bar{\Theta}$ an. Sie schneiden einander auf den Brennparabeln, und zwar in den Nabelpunkten M, \bar{M} und N, \bar{N} (§ 5). Da sie sich in der Polarität von Φ selbst entsprechen, berühren sie den Zylinder Ω und somit auch die Quartik i_s . Die Grundrisse der Berührungspunkte fallen mit den Fixpunkten der quadratischen Verwandtschaft Ω zusammen (§ 5). Davon kann man sich im einzelnen folgendermaßen überzeugen: Die von einem Punkt X der Fokalparabel ausgehenden ∞^1 Spiegelstrahlen haben ihre ordentlichen Spiegelpunkte in der zugeordneten Kernebene $\xi \perp x$. Lassen wir nun X gegen den Nabelpunkt M bzw. \bar{M} rücken, so strebt ξ gegen μ bzw. $\bar{\mu}$ (§ 6). Die betrachteten Berührungspunkte gehören also den Ebenen $\mu, \bar{\mu}$ und auf Grund einer analogen Überlegung auch $\nu, \bar{\nu}$ an. Da die Spuren m, \bar{m}, n, \bar{n} der Ebenen aber Doppelgeraden von Ω sind (§ 5), ist die Behauptung erwiesen.

Abb. 4 zeigt schematisch die im Grundriß herrschenden Verhältnisse. Beachten wir überdies, daß die Minimalerzeugenden (wie alle Erzeugenden des Paraboloids) im Grundriß als Pseudominimalgeraden erscheinen (§ 4), dann können wir die Nabelpunktgrundrisse $M', \bar{M}', N', \bar{N}'$ als „Pseudobrennpunkte“ und die Spuren m, \bar{m}, n, \bar{n} als

zusammen. — Greifen wir auf dem Spiegelstrahl s_1 einen beliebigen Punkt P im Innern von Φ heraus, so liefert der Sehstrahl p_1 in seinem Spurpunkt ein primäres Spiegelbild P^* , ebenso p_2 ein sekundäres Spiegelbild P^{**} . Ein innerhalb Φ gelegener Punkt Q von p_1 hat sein tertiäres Spiegelbild Q^{***} im Spurpunkt von p_2 .

Satz 6. Die drei primären und die drei sekundären Spiegelbilder eines allgemeinen Raumpunktes gehen durch die involutorische birationale quadratische Verwandtschaft Ω ineinander über. Dieselbe Verwandtschaft führt das tertiäre Spiegelbild aus dem Grundriß hervor.

Das Hauptdreieck der ebenen Punktverwandtschaft Ω in der Bildebene π wird von den Koordinatenachsen x, y und der Ferngeraden u gebildet. Doppelgeraden sind die Spuren m, m, n, \bar{n} der Ebenen $\mu, \bar{\mu}, \nu, \bar{\nu}$ (§ 6) und die Diagonalen des von ihnen aufgespannten Rechteckes; reell sind nur n und \bar{n} . Die (imaginären) Ecken des Rechteckes geben die Fixpunkte von Ω ab. — Ω kann als „Verwandtschaft doppelt konjugierter Punkte“ bezüglich zweier beliebiger Kegelschnitte gelten, die die vier Fixpunkte enthalten; denn ein Paar entsprechender Punkte wird von den zerfallenden Kegelschnitten $m + \bar{m}$ und $n + \bar{n}$ harmonisch getrennt und dies trifft dann auch für alle übrigen Kegelschnitte des dadurch bestimmten Büschels zu.

6. Die Zentralellipse.

Im Hinblick auf spätere Erfordernisse wollen wir zunächst die Frage beantworten, für welche Spiegelstrahlen ordentlicher und außerordentlicher Spiegelpunkt zusammenfallen, mit anderen Worten die das Paraboloid Φ berührenden Spiegelstrahlen aufsuchen.

Berührt ein Strahl s drei Flächen einer Schar — und das ist bei uns der Fall, da die Begegnung mit den Brennparabeln e und f als Berührung ausgearteter Klassenflächen zu werten ist — dann berührt er alle Scharflächen und ist eine Erzeugende der Torse vierter Klasse Θ , der sie eingeschrieben sind. In unserem besonderen Fall der konfokalen Flächenschar ist Θ die Φ angeschriebene Minimaltorse, deren Erzeugenden sämtlich den absoluten Kugelkreis i treffen. Ihre Berührungskurve i_s mit Φ — der Ort zusammenfallender ordentlicher und außerordentlicher Spiegelpunkte — kann als Reflex des absoluten Kugelkreises angesehen werden; i_s ergibt sich als Schnitt von Φ mit dem Polarzyylinder Ω von i : Es ist eine imaginäre rationale Quartik mit einem Doppelpunkt in Z_u (weil Φ die Fernebene berührt). Sie ist übrigens als spezielle Isophote in jedem Isophotensystem von Φ enthalten.

als Richtebene, da die Büchel der Ebenen ξ und γ in einer (2,1)-Korrespondenz stehen. Der gesuchte Reflex g_s ist als Durchdringungskurve von Ψ mit dem Paraboloid Φ eine Raumkurve sechster Ordnung mit einem dreifachen Punkt in Z_u^8 . Das primäre Spiegelbild $g^* = g_s'$ ist daher eine ebene Kurve dritter Ordnung.

Uns steht jedoch auch noch ein einfacheres Verfahren zur Verfügung, das das Spiegelbild unmittelbar liefert. Wir legen durch g eine Hilfsebene γ und bestimmen die vier in ihr liegenden Spiegelstrahlen dadurch, daß wir γ unter Verwendung der Spuren c_2 ($y = 0$) und c_3 ($x = 0$) mit den Brennparabeln e und f zum Schnitt bringen (Abb. 5):

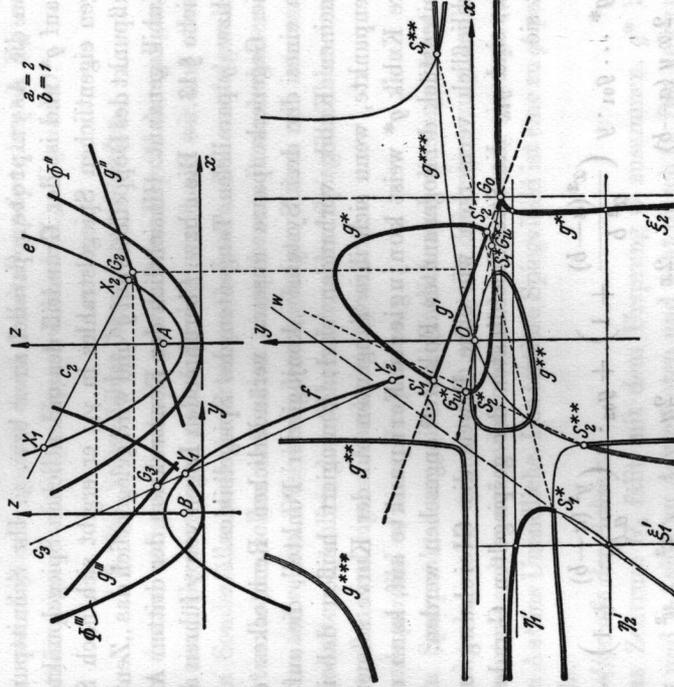


Abb. 5. Spiegelbilder einer Geraden g .

Die so gewonnenen Schnittpunkte X_1, X_2 und Y_1, Y_2 legen die vier Spiegelstrahlen fest. Dieselben brauchen jedoch gar nicht gezeichnet zu werden, denn ihre ordentlichen Spiegelpunkte liegen in den zugeordneten Kernebenen ξ_1, ξ_2 und η_1, η_2 (§ 2). Im Grundriß erhalten wir damit auf einmal vier Punkte des Spiegelbildes in den Ecken des achsenparallelen Rechteckes $\xi_1', \eta_1', \xi_2', \eta_2'$.

zugehörige „Pseudoleitlinien“ der Zentralellipse i^* bezeichnen. — Wir fassen die wesentlichen Ergebnisse dieses Abschnittes nochmals zusammen:

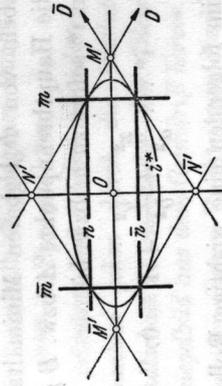


Abb. 4. Anordnungsschema der Nabelpunkte und ihrer Kernebenen.

Satz 7. Die Spiegelstrahlen mit zusammenfallenden ordentlichen und außerordentlichen Spiegelpunkten sind die Erzeugenden der dem Paraboloid Φ umschriebenen Minimalorse vierter Klasse Θ . Deren Berührungskurve, gleichzeitig der Ort der zusammenfallenden Spiegelpunkte ist eine imaginäre rationale Quartik i_s , die als Reflex des absoluten Kugelkreises i aufgefaßt werden kann. Ihr Grundriß, das primäre Spiegelbild i^* von i , ist die nullteilige „Zentralellipse“ (8).

Die verbundenen Spiegelstrahlen berühren den über der Zentrallellipse errichteten achsenparallelen Zylinder längs i_s und erfüllen eine windschiefe Regelfläche achter Ordnung Θ , die die Brennparabeln zu Doppelkurven besitzt.

Die Grundrisse der Nabelpunkte von Φ fallen in die Pseudobrennpunkte der Zentralellipse; deren Pseudoleitlinien sind Doppelgeraden der quadratischen Verwandtschaft Ω .

Nach der Schlußbemerkung von § 5 sind entsprechende Punkte von Ω konjugiert bezüglich der Zentralellipse, weil diese dem von den Doppelgeraden aufgespannten Kegelschnittsbüchel angehört.

7. Die Spiegelbilder einer allgemeinen Geraden.

Um den Reflex einer allgemeinen Geraden g des Raumes zu konstruieren, kann man mit *Horninger*⁸ auf einer der Fokalparabeln — etwa e — einen Punkt X herausgreifen und in dem Drehkegel der von X ausgehenden Spiegelstrahlen jene beiden aufsuchen, die g treffen. Ihre ordentlichen Spiegelpunkte liegen in der X zugeordneten Kernebene ξ und in der Verbindungsebene $\gamma = [Xg]$, also auf der Schnittgeraden $[\xi\gamma] = r$. Durchläuft nun X die Brennparabel e , so beschreibt r ein kubisches Konoid Ψ mit g als einfacher Leitgeraden und $x = 0$

Kubik g^* . Da letztere die Hauptpunkte X_u und Y_u enthält, wird sie i. a. in eine elliptische Quartik mit Doppelpunkten in X_u und Y_u übergeführt. Gleichzeitig wird die Grundrißgerade g' in eine gleichseitige Hyperbel durch X_u, Y_u und O verwandelt, die das tertiäre Spiegelbild g^{***} darstellt. — In Abb. 5 wurden jene Teile der Kurven hervorgehoben, die dem innerhalb des Paraboloides liegenden Abschnitt von g entsprechen.

Satz 8. Das primäre Spiegelbild einer Geraden allgemeiner Lage ist eine elliptische Kubik durch X_u und Y_u , die den Schnittpunkt ihrer achsenparallelen Asymptoten enthält; derselbe ist der Fußpunkt des aus O auf den Grundriß der Geraden gefällten Doppellotes. Das sekundäre Spiegelbild ist eine elliptische Quartik durch O mit Doppelpunkten in X_u und Y_u , das tertiäre eine gleichseitige Hyperbel durch X_u, Y_u und O .

8. Die Spiegelbilder besonderer Geraden.

Um den im vorigen Abschnitt gebrauchten Begriff der „allgemeinen Lage“ einer Geraden g genauer festzulegen, müssen wir uns etwas mit einigen Sonderfällen und Ausartungen befassen. Die im folgenden angeführten Lagen sollen außer den angegebenen Besonderheiten keine weiteren aufweisen. Drei besonders wichtigen Arten mit interessanten Eigenschaften, nämlich den Sehstrahlen, den Spiegelstrahlen und den Ferngeraden sind eigene Abschnitte gewidmet.

- a) Gerade parallel zu einer Hauptebene.
Ein Spurpunkt von g ist uneigentlich und die zugehörige Kernebeneinvolution ist symmetrisch. g^* weist daher eine zu g' senkrechte Symmetrieachse auf und sendet in deren Richtung einen parabolischen Ast ins Unendliche. Das tertiäre Spiegelbild ist eine zu g' parallele Gerade.
- b) Treffgerade der Achse z .
Das Zentrum G_0 fällt mit dem Ursprung O zusammen. g^* besitzt die x - und y -Achse zu Asymptoten und geht durch O . Das sekundäre Spiegelbild ist eine Kubik derselben Art, das tertiäre eine Gerade durch O .
- c) Treffgerade einer Brennparabel.
 g habe etwa mit e den Punkt X gemein. Dann spaltet sich vom Reflex die X zugeordnete Kernparabel in der Ebene ξ ab und g^* zerfällt in eine zu y parallele Gerade und einen Kegelschnitt durch X_u . g^{***} zerfällt ebenfalls in eine Gerade parallel zu y und eine rationale Kubik durch Y_u mit einem Doppelpunkt in X_u .

Beschreibt nun γ das Büschel g , dann drehen sich die Spuren c_2, c_3 um die Spurpunkte G_2, G_3 von g und die Punktepaare X_1, X_2 und Y_1, Y_2 durchlaufen zwei Involutionen, die projektiv aufeinander bezogen sind. Auch die Rechteckseiten ξ'_1, ξ'_2 und η'_1, η'_2 sind mithin Paare zweier projektiver Strahleninvolutionen mit den Fernscheiteln Y_u bzw. X_u ; der Verbindungsstrahl $[X_u Y_u] = u$ entspricht sich selbst. Nach Schröter¹² heißen solche Involutionen „in halbperspektiver Lage“; sie erzeugen (unter Abspaltung von u) eine elliptische Kubik durch die Scheitel X_u und Y_u — das Spiegelbild g^* von g .

Lassen wir γ insbesondere die achsenparallele Lage $\gamma_0 \parallel z$ annehmen, so rücken zwei Rechteckseiten ins Unendliche und die beiden anderen werden die Asymptoten parallel zu x bzw. y . Ihr Schnittpunkt G_0 liegt auf g^* und ist der Grundriß des ordentlichen Spiegelpunktes des einzigen eigentlichen Spiegelstrahles in γ_0 ; er ergibt sich nach Satz 5 als Fußpunkt des Doppellotes auf g' und wird gelegentlich das „Zentrum“ der Kubik genannt. Hinsichtlich der Konstruktion der dritten Asymptote siehe § 13. — Die e bzw. f berührenden Lagen von γ führen auf die zu x bzw. y parallelen Tangenten des Spiegelbildes.

Die Gegeneckenpaare unseres veränderlichen Rechteckes durchlaufen eines der drei Systeme „konjugierter Punkte“, die auf jeder allgemeinen Kubik vorhanden sind; konjugiert heißen dabei zwei Kurvenpunkte, wenn sich ihre Tangenten auf der Kurve schneiden.¹² Unsere Kubik g^* weist konjugierte Fernpunkte auf, kann mithin als Seitenstück der sogenannten Fokale¹³ angesehen werden.

Schließlich vermerken wir ohne Beweis die Gleichung unserer Kubik; sind g_{ik} die Strahlkoordinaten der gespiegelten Gerade g , so lautet sie

$$g^* \dots g_{01} \cdot y \left(\frac{x^2(a-b)}{a^2 b} + 1 \right) + g_{02} \cdot x \left(\frac{y^2(a-b)}{a b^2} + 1 \right) - (9) \\ - g_{03} \cdot \frac{2xy(a-b)}{ab} - g_{23} \cdot \frac{2x}{a} - g_{31} \cdot \frac{2y}{b} - g_{12} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) = 0.$$

Das sekundäre Spiegelbild g^{**} von g ergibt sich nach Satz 6 durch Anwendung der quadratischen Verwandtschaft Ω (7) auf die

¹² H. Schröter, Über eine besondere Curve dritter Ordnung und eine einfache Erzeugungsart der allgemeinen Curve dritter Ordnung. Math. Ann. 5 (1872).
¹³ Die Fokale ist eine zirkuläre Kubik, die ihren außerordentlichen Brennpunkt enthält. Sie tritt als Ort der Brennpunkte einer Schar von Kegelschnitten auf und spielt als „Kreispunktkurve“ in der ebenen Kinematik eine Rolle.

Polare von g und seine Endpunkte gehören der Zentrallipse an. Das sekundäre Spiegelbild zerfällt in zwei gleichseitige Hyperbeln durch X_u und Y_u .

9. Die Spiegelbilder eines Sehstrahls.

Geht man, um das primäre Spiegelbild eines achsenparallelen Strahles (Sehstrahles) p zu konstruieren, nach dem allgemeinen Verfahren vor, das in § 7 auseinandergesetzt wurde, so arten zwar beide Kerbeneninvolutionen aus, da jedes Kerbenenpaar die Fernebene als festen Bestandteil enthält, doch entsprechen einander die veränderlichen Bestandteile in projektiver Weise, sodaß man für p^* i. a. eine gleichseitige Hyperbel durch X_u, Y_u und O erhält, wenn man von der Ferngeraden u als trivialem Bestandteil der vollständigen Kubik absieht. Zu ihren Asymptoten gelangt man über die zu den Hauptebenen parallelen Lagen der Hilfsebene γ durch p ; hat p die Koordinaten (x_0, y_0) , so ist $(\frac{a}{a-b} \cdot x_0, \frac{b}{b-a} \cdot y_0)$ die Hyperbelmitte (Abb. 6).

Eine andere Möglichkeit ist folgende: Bedenken wir, daß die Grundrisse aller p treffenden Spiegelstrahlen das Büschel p' bilden und suchen wir nach Satz 5 die Grundrisse der ordentlichen Spiegelpunkte mit Hilfe der Doppelote aus O auf, so ergibt sich die Hyperbel p^* als Doppelpotfußpunktcurve des Strahlbüschels p' .

Zum sekundären Spiegelbild gelangen wir durch Ausübung der quadratischen Verwandtschaft Ω auf p^* . Da p^* durch die Ecken des Hauptdreiecks geht, erhalten wir für p^{**} eine Gerade. Es zeigt sich, daß diese die Polare des Punktes p' bezüglich der Zentrallipse i^* ist: Wir legen aus p die Tangentialebenen an den Zylinder $\Omega = [Z_u i^*]$; zufolge § 6 berühren die beiden in ihnen gelegenen Spiegelstrahlen \bar{s} den Zylinder Ω in zwei Punkten von i_s , ihren außerordentlichen Spiegelpunkten S . Die verbundenen Spiegelstrahlen s sind Minimalstrahlen, deren ordentliche Spiegelpunkte mit S zusammenfallen; diese Punkte sind daher sekundäre Reflexe der Punkte $[p\bar{s}]$, womit die Behauptung bewiesen ist.

Satz 10. Das primäre Spiegelbild eines Sehstrahles allgemeiner Lage ist eine gleichseitige Hyperbel durch X_u, Y_u und O , die Doppelpotfußpunktcurve des Sehstrahlgrundrisses.

Das sekundäre Spiegelbild ist die Polare des Sehstrahlgrundrisses bezüglich der Zentrallipse.

Das tertiäre Spiegelbild ist natürlich der Punkt $\Omega \cdot p$.

d) Gerade in einer Hauptebene.

g hat mit einer Brennparabel zwei Punkte gemein, sodaß sich nun vom Reflex zwei Kernschnitte in parallelen Ebenen abspalten. g^* zerfällt in g' und zwei dazu senkrechte Geraden.

e) Fokalachse.

Wir stellen zunächst die Frage, ob das primäre Spiegelbild einer Geraden auch eine rationale Kubik werden kann? Soll das der Fall sein, so muß g^* eine Singularität aufweisen und dies tritt dann ein, wenn einer Doppelsebene der einen Kerbeneninvolution wieder eine Doppelsebene in der anderen entspricht (§ 7). Es muß dann im Büschel $g(\gamma)$ eine Ebene enthalten sein, die beide Brennparabeln berührt: g ist eine Tangente der Minimaltorse Θ (§ 6).

Es ist klar, daß das Spiegelbild einer Doppeltangente von Θ infolge von zwei auftretenden singulären Punkten zerfallen muß. Die Bestimmung dieser Doppeltangenten (die im Gegensatz zu den einfachen Tangenten auch reell ausfallen können) gelingt mit Hilfe der Fokaltheorie: Man erhält die durch einen gegebenen Raumpunkt P gehenden Doppeltangenten im Schnitt der vier an das Paraboloid Φ legbaren isotropen Tangentialebenen, also in den sechs Fokalstrahlen des Tangentenkegels von Φ ; diese fallen mit den durch P gehenden Erzeugendenpaaren jener drei zu Φ konfokalen Flächen zweiten Grades zusammen, die P enthalten. Die Kongruenz dieser „Fokalachsen“ (nach Reye) besteht daher aus den ∞^2 Erzeugenden der ∞^1 Flächen der über Φ errichteten konfokalen Schaar; sie hat den Bündelgrad 6 und den Feldgrad 2.

Den Anlaß zum Zerfallen des Spiegelbildes einer Fokalachse g geben die beiden g treffenden Erzeugenden von Θ . Nach § 6 sind ihre ordentlichen Spiegelpunkte die Berührungspunkte mit Φ und liegen auf der absoluten Isophote i_s ; als Berührungspunkte der durch g gehenden Minimalen liegen sie auch auf der reziproken Polare \bar{g} von g . Ein Bestandteil der zerfallenden Kubik g^* ist mithin die Gerade \bar{g} , nach § 4 pseudonormal zu g' ; als Rest bleibt eine gleichseitige Hyperbel durch X_u und Y_u , deren Mittelpunkt G_0 laut Satz 8 in den Schnitt von \bar{g} und g' fällt und der Fußpunkt des Doppellotes auf g' ist.

Satz 9. Das primäre Spiegelbild einer Fokalachse g des Paraboloides Φ zerfällt in eine gleichseitige Hyperbel durch X_u und Y_u , deren Mitte der Fußpunkt des auf g' gefällten Doppellotes ist, und ihren zu g' pseudonormalen Durchmesser; dieser deckt sich mit dem Grundriß der reziproken

10. Die Spiegelbilder eines Spiegelstrahls.

Wir betrachten nunmehr einen Spiegelstrahl s allgemeiner Lage; sein ordentlicher Spiegelpunkt sei S . Er trifft die Brennparabeln in je einem Punkt X bzw. Y , was zur Folge hat, daß das primäre Spiegelbild in die Spuren der zugeordneten, durch S gehenden Kernebenen ξ und η und eine weitere Gerade s^* zerfällt (Abb. 6). Um nähere Aussagen über letztere zu gewinnen, ziehen wir auch den Sehstrahl p durch S heran, und ebenso jene beiden verbundenen Spiegelstrahlen s_1, s_2 , die in S ihren außerordentlichen Spiegelpunkt besitzen. Ihre ordentlichen Spiegelpunkte S_1, S_2 können gleichzeitig als primäre und sekundäre Reflexe des Punktes S aufgefaßt werden, je nachdem auf welchem der beiden Strahlen s_1, s_2 wir uns ihn liegend denken. Da S aber auch dem Sehstrahl p angehört, sind S_1' und S_2' die Schnittpunkte von p^* und p^{**} (Hyperbel und Gerade, Satz 10) und $s^* = [S_1' S_2']$ fällt mit p^{**} zusammen. Anwendung von Ω liefert $s^{**} = p^*$.

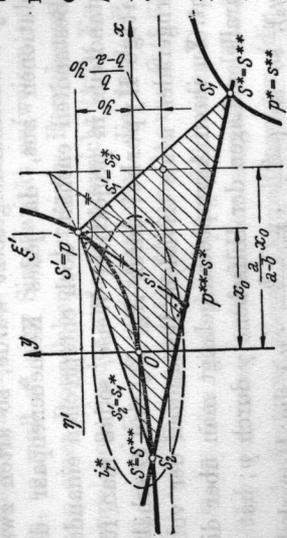


Abb. 6. Spiegelung eines Sehstrahls p und eines Spiegelstrahls s .

primäre und sekundäre Reflexe des Punktes S aufgefaßt werden, je nachdem auf welchem der beiden Strahlen s_1, s_2 wir uns ihn liegend denken. Da S aber auch dem Sehstrahl p angehört, sind S_1' und S_2' die Schnittpunkte von p^* und p^{**} (Hyperbel und Gerade, Satz 10) und $s^* = [S_1' S_2']$ fällt mit p^{**} zusammen. Anwendung von Ω liefert $s^{**} = p^*$.

Satz 11. Das primäre (sekundäre) Spiegelbild eines Spiegelstrahls fällt mit dem sekundären (primären) Spiegelbild des Sehstrahls durch seinen ordentlichen Spiegelpunkt zusammen (vgl. hierzu Satz 10).

Zufolge Satz 10 ist also s^* die Polare von S' bezüglich der Zentralellipse i^* . Auf Grund von § 5 entsprechen einander S_1' und S_2' in der quadratischen Verwandtschaft Ω und sind nach der Schlußbemerkung von § 6 konjugierte Punkte von i^* . Daraus folgt: $S' S_1' S_2'$ ist ein Pol-dreieck der Zentralellipse.

Wenden wir nun die Sätze 11 und 10 auf den Spiegelstrahl s_1 an, so finden wir $s_1^* = s_2'$. In Worten:
Satz 12. Das primäre Spiegelbild eines Spiegelstrahls fällt mit dem Grundriß des verbundenen Spiegelstrahls zusammen.

Und mit Rücksicht auf Satz 4:

Satz 13. Die Grundrisse verbundener Spiegelstrahlen entsprechen einander in der involutorischen quadratischen Verwandtschaft der pseudonormal-konjugierten Geraden der Zentralellipse.

Um den außerordentlichen Spiegelpunkt eines Spiegelstrahls s im Grundriß zu konstruieren, hat man demnach s' mit der hierzu pseudonormal-konjugierten Geraden $\xi' = s^*$ zu schneiden (Abb. 6).

11. Anordnung der Spiegelbilder eines Raumpunktes.

Wir fassen einen allgemeinen, im Inneren des Paraboloides Φ gelegenen Punkt P ins Auge. Die durch ihn gehenden drei Spiegelstrahlen s_1, s_2, s_3 führen über ihre ordentlichen Spiegelpunkte S_1, S_2, S_3 auf die drei primären Spiegelbilder P^* . Diese liegen natürlich auf dem Spiegelbild des durch P laufenden Sehstrahls p , der gleichseitigen Hyperbel p^* (Satz 10). Das Spiegelbild von s_1 zerfällt nach § 10 in die x - und y -Parallele durch S_1' und in die Polare s_1^* von S_1' bezüglich i^* ; letztere trägt die Spiegelbilder S_2' und S_3' . Aus den entsprechenden Beziehungen für s_2 und s_3 folgt, daß die drei Punkte $S_1' = P^*$ ein Poldreieck der Zentralellipse aufspannen (Abb. 7).

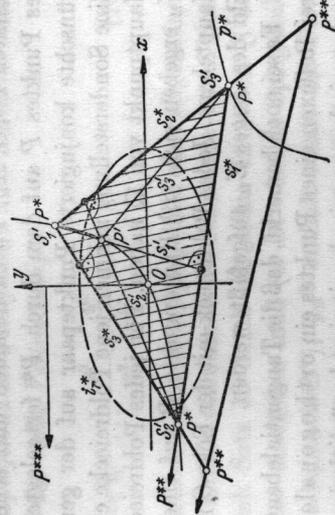


Abb. 7. Anordnung der 7 Spiegelbilder eines Punktes.

Da auf Grund der Sätze 12 und 13 jeweils s_i' pseudonormal zu s_i^* ist, kann P' als Pseudohöhenschnittpunkt des Poldreiecks angesehen werden.

Die Seite s_i^* fällt mit dem Grundriß des mit s_i verbundenen Spiegelstrahls zusammen, enthält daher auch das sekundäre Spiegelbild $P^{**} = \Omega \cdot S_i'$; dasselbe ist der Pol der Pseudohöhe s_i' . Alle drei sekundären Spiegelbilder von P liegen (samt dem tertiären) auf der Polare p^{**} von P' und bilden zusammen mit den drei primären die Ecken eines vollständigen Vierseits. — Wir fassen zusammen:

Satz 14. Die drei primären Spiegelbilder eines allgemeinen Raumpunktes P bilden ein der Doppelotfufpunkthyperbel von P' eingeschriebenes Poldreieck der Zentralellipse. P' ist der Pseudohöhenschnittpunkt dieses Dreiecks.

Die Polare von P' bezüglich der Zentralellipse schneidet auf dem Dreiecksseiten die drei sekundären Spiegelbilder aus und geht überdies durch das ter-tiäre. Die sekundären Spiegelbilder sind polar zu den Pseudohöhen und bilden zusammen mit den primären die Ecken eines vollständigen Vierseits (Abb. 7).

Umgekehrt kann zu jedem der ∞^3 Poldreiecke der Zentralellipse i. a. ein Raumpunkt P gefunden werden, dessen primäre Spiegelbilder in die Ecken des Dreiecks fallen. Man kann ja ein Spiegelbild P^* sicher frei annehmen; die beiden übrigen liegen dann auf der Polare bezüglich i^* und werden hier durch die Doppellotfußpunktshyperbel p^* von P' ausgeschnitten. Diese ist dem Kegelschnittbüschel mit den Grundpunkten P^*, O, X_u, Y_u entnommen und schneidet je nach der Wahl des Punktes P auf dem durch P^* festgelegten Spiegelstrahl jedes gewünschte konjugierte Punktepaar auf der genannten Polaren aus. — Eine Sonderstellung nehmen jene Poldreiecke ein, die eine Ecke in einem Hauptpunkt von Ω haben. Für jedes Poldreieck mit der Ecke X_u oder Y_u ergeben sich ∞^1 Raumpunkte P auf einem Spiegelstrahl in einer Hauptebene. Jedes Poldreieck mit der Ecke O muß hingegen als Spiegelbild des Auges Z_u aufgefaßt werden.

Es sei noch bemerkt, daß die Tangentialebenen des Paraboloides in den drei Reflexen eines Punktes ein orthogonales Dreikant bilden, denn letztere sind paarweise konjugiert bezüglich des Zylinders Ω (§ 6), erstere demnach bezüglich des absoluten Kugelkreises i , d. h. sie sind paarweise normal.

12. Spiegelung der Fernebene.

Wir betrachten nun einen Fernpunkt $P_u \neq Z_u$. Sein Grundriß P'_u ist auch ein uneigentlicher Punkt, sodaß seine Doppellotfußpunktlinie in die Fernachse u und eine Gerade p_u^* durch O zerfällt; diese ist als endliches Spiegelbild des uneigentlichen Sehstrahles $p_u = [Z_u P_u]$ anzusehen.

Auf p_u^* liegt sicher wenigstens ein primäres Spiegelbild von P_u ; die beiden übrigen werden dann auf Grund von Satz 14 von seiner Polare bezüglich i^* auf p_u^* und u ausgeschnitten (Abb. 8). Wir sehen also, daß von den drei Spiegelbildern P_u^* eines unendlich fern ist, während die beiden anderen auf dem dazu polaren Durchmesser der Zentralellipse konjugierte Punkte

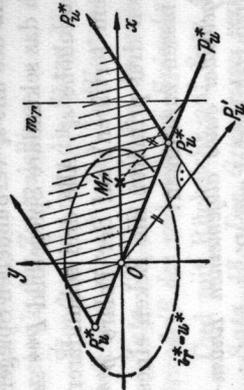


Abb. 8. Spiegelbilder eines Fernpunktes. dem dazu polaren Durchmesser der Zentralellipse konjugierte Punkte

bilden. Soll P'_u der Pseudohöhenschnittpunkt des ausgearteten Poldreiecks sein, dann müssen dessen Parallelseiten pseudonormal zur Richtung P'_u verlaufen.

Satz 15. Von den drei primären Spiegelbildern eines allgemeinen Fernpunktes P_u fällt eines in der zu P'_u pseudonormalen Richtung ins Unendliche, während die beiden anderen affin-invers¹⁴ bezüglich der Zentralellipse liegen.

Für einen Punkt der Fernachse u liegen die beiden endlichen Spiegelbilder symmetrisch zu O , kommen mithin auf den reellen Vertreter i_r^* der Zentralellipse zu liegen:

Satz 16. Das primäre Spiegelbild der Ferngeraden u der achsennormalen Stellung zerfällt in u und die reelle Vertreterellipse

$$u^* = i_r^* \dots \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (10)$$

Wir wenden uns nunmehr dem primären Spiegelbild einer allgemeinen Ferngeraden g_u zu. Es zerfällt offenbar in die Fernachse u und einen Kegelschnitt g_u^* , der nach Satz 15 durch die affine Inversion \mathfrak{J} der Zentralellipse in sich selbst übergehen muß (er ist wie das Spiegelbild jeder Fernlinie „affin-anallagmatisch“); g_u^* enthält somit die Fernpunkte von i^* als uneigentliche Hauptpunkte von \mathfrak{J} , ist also eine zu i_r^* ähnliche und ähnlich gelegene Ellipse.

Satz 17. Die nicht durch das Auge gehenden Ferngeraden haben als (eigentliche) primäre Spiegelbilder Ellipsen, die zur Ellipse $i_r^* = u^*$ (10) ähnlich sind und ähnlich liegen und dieselbe in Gegenpunkten schneiden.

Die genannten Gegenpunkte sind nämlich die eigentlichen Spiegelbilder des Punktes $U = [ug_u]$.

Zur konstruktiven Behandlung kann man sich eines „Nebenauges“ $C(0, 0, c)$ auf der z -Achse bedienen, um zunächst einmal auf π ein greifbares Zentralbild g_u^c von g_u zu entwerfen. Die Achsenabschnitte von g_u^c auf x und y seien mit v und w bezeichnet (Abb. 9).

Die mittels des Ebenenbüschels $g_u(\gamma)$ nach § 7 gewonnenen Kern-ebeneninvolutionen sind beide symmetrisch (vgl. § 8a); die die

¹⁴ Unter einer „affinen Inversion“ verstehen wir eine involutorische quadratische Punktverwandtschaft, die aus einer gewöhnlichen Inversion durch Transformation mittels einer Affinität entsteht. Es ist in der Ebene die Verwandtschaft der durch die Durchmesser geordneten konjugierten Punkte eines Mittelpunktskegelschnittes.

Der Vollständigkeit halber seien noch ausdrücklich die besonderen Fernstrahlen p_u durch Z_u erwähnt. Ihre eigentlichen primären und sekundären Spiegelbilder sind die Strahlen des Büschels O . p_u^* ist das Doppellot auf p_u^c , p_u^{**} der zu p_u^c konjugierte Durchmesser der Zentral-ellipse (Abb. 9).

Ein vollkommener Zerfall des Spiegelbildes tritt übrigens auch für die Tangenten des absoluten Kugelkreises i ein.

13. Tangenten- und Asymptotenkonstruktion.

Gegeben sei eine Linie k und ein Spiegelbild P_0^* eines ihrer Punkte P_0 . Gesucht ist die Tangente an das Spiegelbild k^* in P_0^* .

Wir denken uns zu dem Spiegelstrahl s_0 durch P_0 einen endlich benachbarten s durch den veränderlichen Kurvenpunkt P . Jede s_0 und s treffende Gerade h wird dann ein Spiegelbild besitzen, das mit k^* die Punkte P_0^* und P^* gemein hat. Lassen wir nun P nach P_0 rücken, so strebt die Gesamtheit der Hilfsgeraden h gegen ein parabolisches Strahlennetz \mathfrak{S} ; die Spiegelbilder aller ∞^2 Netzstrahlen berühren k^* in P_0^* . — Meist wird es bequem sein, für h einen Strahl des von s_0 und der Kurventangente t_0 aufgespannten, in \mathfrak{S} enthaltenen Büschels zu nehmen. Unter diesen wiederum bieten sich bei uns jene beiden von s_0 verschiedenen dar, die eine der Brennparabeln treffen, da sie gemäß § 8c im Spiegel als Kegelschnitte erscheinen. Damit ist für die Tangentenkonstruktion im Fall des spiegelnden Paraboloides ein grundsätzlicher Weg aufgezeigt.

Als Anwendung wollen wir die dritte Asymptote w des primären Spiegelbildes einer allgemeinen Geraden g ermitteln (vgl. § 7). Es handelt sich dabei um die Tangente im uneigentlichen Spiegelbild des Fernpunktes G_u von g . Die Richtung G_u^* ist nach Satz 15 pseudonormal zum Geradengrundriß g' , der zugehörige Spiegelstrahl ist $[Z_u G_u]$. Nach der eben entwickelten Vorschrift bedienen wir uns eines zu g parallelen Hilfsstrahles h , dessen Grundriß sich mit g' deckt und der eine der Fokalparabeln schneidet. Sein Spiegelbild zerfällt in eine der beiden achsenparallelen Asymptoten durch das „Zentrum“ G_0 (§ 7 u. 8c) und eine Hyperbel, die die beiden restlichen Asymptoten mit g^* gemein hat. Da sie überdies durch die zwei endlichen Spiegelbildpunkte G_u^* gehen muß, ergibt sich mit Benützung einer bekannten Hyperbelbeigenschaft folgende einfache Konstruktion für die dritte Asymptote w (Abb. 5): Man trage auf dem Doppellot von g' den einen Abschnitt $G_0 G_u^*$ im selben

Brennparabeln e und f berührenden Lagen von γ führen dabei auf die Hauptachsen der Ellipse g_u^* . Die Koordinaten ihres Mittelpunktes G ergeben sich danach aus elementaren Beziehungen (Ähnlichkeit der geschnittenen Dreiecke in Abb. 9) mit $-ac/v$ und $-bc/w$. — Die Aufgabe, um G eine zu u^* ähnliche und

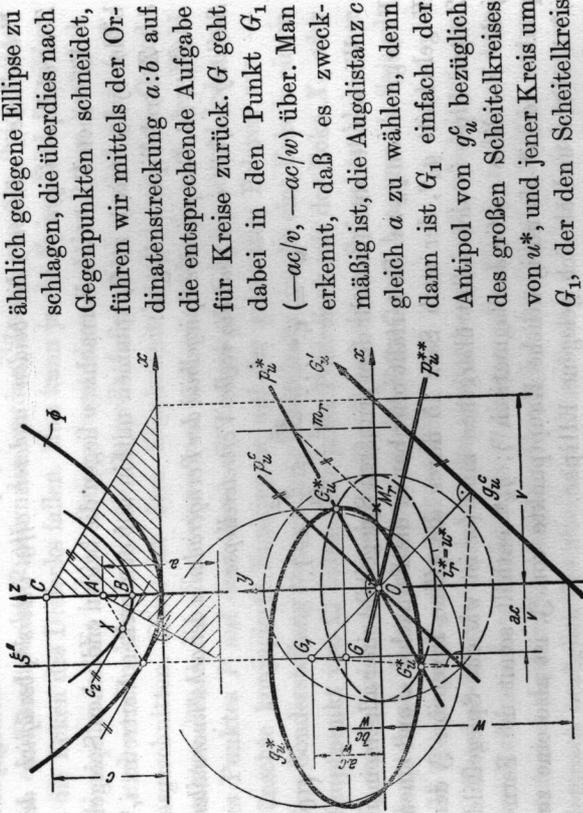


Abb. 9. Spiegelung einer Ferngeraden.

(speziellen) Darbouxschen Verwandtschaft.⁹ Die Ordinatenverkürzung $b:a$ verwandelt ihn schließlich in die gesuchte Ellipse g_u^* (Abb. 9).

Nebenbei bemerkt, ist G auch der Spurpunkt des zu g_u polaren Durchmessers von Φ .

Satz 18. Die einzuwendige quadratische Verwandtschaft zwischen dem Feld der Fernebene und seinem primären Spiegelbild kann folgendermaßen hergestellt werden: Zentralriß aus dem Achsenpunkt $C(0, 0, a)$ auf die Grundebene $\pi(z=0)$, Darboux-Transformation über dem multiteiligen Grundkreis $\varphi(x^2 + y^2 + a^2 = 0)$, Verkürzung $b:a$ der Ordinaten.

Das sekundäre Spiegelbild einer allgemeinen Ferngeraden ist eine rationale Quartik mit Doppelpunkten in O , X_u und Y_w , die durch Ausübung der quadratischen Transformation Ω aus der Ellipse g_u^* hervorgeht.

Der Gesamtheit aller Geraden von ε entspricht ein Netz von ∞^2 Kubiken mit den sechs Grundpunkten $X_w, Y_w, S'_1, S'_2, S'_3, S'_4$, wobei mit S'_i die ordentlichen Spiegelpunkte der vier in ε liegenden Spiegelstrahlen s_i bezeichnet sind. Ein Strahlbüschel wird in ein Büschel von Kurven dritter Ordnung transformiert; die restlichen drei Grundpunkte entstehen in den Spiegelbildern des Büschelscheitels.

Zu einer Geraden h^* der Bildebene gehört eine rationale Kubik h in ε . Diese ist die Spur einer aus Spiegelstrahlen bestehenden kubischen Regelfläche Σ , welche bei der Spiegelung jenes Spiegelstrahls auftritt, dessen verbundener sich im Grundriß mit h^* deckt (Satz 12). Da Σ die Brennparabel e und f enthält, besitzt das System der ∞^2 Kubiken h die vier festen Grundpunkte $X_{1,2} = [e, \varepsilon], Y_{1,2} = [f, \varepsilon]$, stellt jedoch kein (lineares) Netz dar. Jede Kurve h berührt die Grenzsextik $[\Theta, \varepsilon]$ an zwei Stellen.

Die Hauptpunkte von ε sind die eben genannten vier Punkte X_1, X_2, Y_1, Y_2 ; ihnen entsprechen in ε^* als Hauptgeraden die Spuren $\xi'_1, \xi'_2, \eta'_1, \eta'_2$ der zugeordneten Kernebenen. Die Schnittpunkte dieses Hauptgeradenvierers sind die sechs Hauptpunkte $X_w, Y_w, S'_1, S'_2, S'_3, S'_4$ von ε^* ; zu ihnen gehören als Hauptgeraden in ε die Seiten $x = 0, y = 0, s_1, s_2, s_3, s_4$ des vollständigen Hauptpunktvierecks von ε .

Die eindreideutige Verwandtschaft vierten Grades, die das ebene Feld ε mit seinem sekundären Spiegelbild ε^{**} verknüpft, ist das Produkt aus \mathfrak{T} und Ω (Satz 6) und soll daher nicht näher besprochen werden. Bemerkenswert ist höchstens, daß die drei Bildpunkte stets auf einer Geraden liegen (Satz 14).

Der Zusammenhang zwischen ε und seinem tertiären Spiegelbild schließlich wird im wesentlichen durch die quadratische Verwandtschaft Ω beschrieben.

Sinn vom zweiten Punkt G_w^* aus auf und ziehe durch den so gewonnenen Punkt die Pseudonormale zu g .

Bei näherer Betrachtung von Abb. 5 gelangt man zu der Vermutung, daß diese Abschnittsbeziehung auf allen Strahlen durch G_0 vorhanden ist, daß man sich also insbesondere auch des Grundrisses g' und der auf ihm liegenden Spiegelbilder — nämlich der Grundrisse der Durchstoßpunkte S_1, S_2 von Φ — bedienen könnte. Dieser Sachverhalt bestätigt sich in der Tat auf Grund eines allgemeinen Satzes von Newton¹⁵, welcher etwa folgendermaßen ausgesprochen werden kann: Schneidet man eine algebraische Kurve n -ter Ordnung samt ihren n Asymptoten durch eine beliebige Gerade, so haben die beiden n -tupel von Schnittpunkten einen gemeinsamen Schwerpunkt.

Daraus fließen nun einige Eigenschaften für die Kubik g^* , die man in Abb. 5 nachprüfen kann: Die zwischen den Asymptoten liegenden Abschnitte der beiden aus G_0 an g^* legbaren Tangenten werden durch die Berührungspunkte gehälftet; letztere liegen auf jener Geraden, die aus w durch die zentrische Verkleinerung 1:2 von G_0 hervorgeht („Mittellinie“). Die Tangente in G_0 schneidet die Asymptote w in deren Treffpunkt mit g („Hauptpunkt“).

14. Verwandtschaft zwischen einem ebenen Feld und seinem Spiegelbild.

Zum Schluß soll noch kurz die Transformation \mathfrak{L} gekennzeichnet werden, die ein ebenes Feld ε allgemeiner Lage mit seinem primären Spiegelbild ε^* in π verknüpft.

Es handelt sich um eine (1,3)-Korrespondenz, weil jeder allgemeine Punkt P von ε drei primäre Spiegelbilder P^* hervorruft und jeder allgemeine Punkt Q^* der Bildebene als Spiegelbild nur eines einzigen Punktes Q in ε erhalten werden kann. Die drei Punkte P^* bilden stets ein Poldreieck der Zentrallipse i^* (Satz 14); zusammengehörige Spiegelbilder eines Punktes können sich demnach nur auf i^* vereinigen und die Zentrallipse stellt damit die Doppelkurve¹⁶ von ε^* dar. Ihr entspricht in ε als Grenzkurve (Verzweigungskurve) die Spur der Minimaltorse Θ (§ 6), eine rationale Sextik.

Unsere Verwandtschaft ist kubisch, denn eine allgemeine Gerade g von ε spiegelt sich als elliptische Kurve dritter Ordnung g^* (Satz 8).

¹⁵ H. Wieleitner, Algebraische Kurven II (Samml. Göschel 436, Berlin u. Leipzig 1919), S. 32.

¹⁶ Enz. math. Wiss. III C 11, Nr. 92.