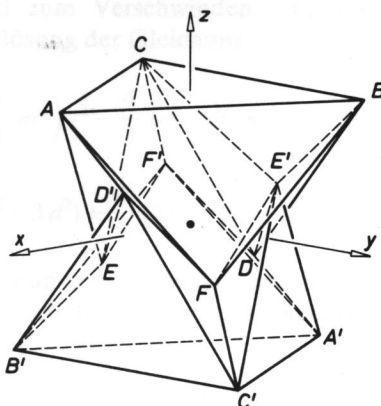


Kipp-Ikosaeder II¹⁾

II. Ikosaeder mit dreizähliger Symmetrieachse

5. Betrachtet werden jetzt Ikosaeder mit Mittelpunkt, welche die 120°-Drehungen um die z-Achse vertragen und deren Aussehen an eine Sanduhr erinnert (Fig. 4).



Figur 4. Wackelikosaeder mit dreizähliger Symmetrieachse.

1) Kipp-Ikosaeder I erschien in El. Math. 36, 153-158 (1981).

Die zwölf Ecken verteilen sich auf vier gleichseitige Dreiecke ABC , $A'B'C'$ und DEF , $D'E'F'$ in parallelen Ebenen $z=\pm p$ und $z=\mp q$ ($p>q>0$); unter Verwendung der Umkreisradien m bzw. n ($m>n>0$) können die Ecken angesetzt werden mit

$$\begin{aligned} A(m, 0, p), \quad B\left(-\frac{m}{2}, \frac{m}{2}\sqrt{3}, p\right), \quad C\left(-\frac{m}{2}, -\frac{m}{2}\sqrt{3}, p\right); \\ D(-n, 0, -q), \quad E\left(\frac{n}{2}, -\frac{n}{2}\sqrt{3}, -q\right), \quad F\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\sqrt{3}, -q\right). \end{aligned} \quad (5.1)$$

Für die restlichen sind jeweils die Vorzeichen umzukehren. Die Anordnung der Kanten folgt dem gleichen Schema wie in Teil I (vgl. auch Fig. 6).

Wird die Kantenlänge $AB=a$ vorgegeben, so ist m wegen $3m^2=a^2$ bekannt. Schreibt man auch noch die übrigen Kantenlängen durch $AF=b$, $AD'=c$ und $D'E=d$ vor, dann hat man für die fehlenden Formparameter n , p und q die Bestimmungsgleichungen

$$m^2 - mn + n^2 + (p+q)^2 = b^2, \quad (m-n)^2 + (p-q)^2 = c^2, \quad n^2 + 4q^2 = d^2. \quad (5.2)$$

Hieraus folgen die Beziehungen

$$\begin{aligned} 4p^2 &= 2b^2 + 2c^2 - d^2 - 4m^2 + 6mn - 3n^2, \\ 4q^2 &= d^2 - n^2, \\ 4pq &= b^2 - c^2 - mn. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Nach der leicht zu bewerkstelligen Elimination von p und q gelangt man zu einer Gleichung 4. Grades für n . Die Substitution

$$n = (m/2) + t \quad (5.4)$$

bringt das kubische Glied zum Verschwinden, und die Formbestimmung des Ikosaeders verlangt die Auflösung der Gleichung

$$\begin{aligned} t^4 - \frac{2}{3} \left(b^2 + c^2 + d^2 + \frac{3}{4} m^2 \right) t^2 - \frac{4}{3} (c^2 - d^2) mt + K = 0 \quad \text{mit} \\ K = \frac{m^4}{16} + \frac{m^2}{6} (b^2 - 3c^2 - 3d^2) + \frac{d^2}{3} (2b^2 + 2c^2 - d^2) - \frac{1}{3} (b^2 - c^2)^2. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Zwecks Vereinfachung sei nun die *einschränkende Voraussetzung* $c=d$ getroffen, die übrigens auch bei den einschlägigen Wackelikosaedern in [5] erfüllt ist. Dadurch reduziert sich die Gleichung (5.5) auf

$$\begin{aligned} t^4 - Pt^2 + Q = 0 \quad \text{mit} \\ P = \frac{m^2}{2} + \frac{2}{3} (b^2 + 2c^2), \quad Q = \left(\frac{m^2}{4} - \frac{b^2}{3} \right) \left(\frac{m^2}{4} + b^2 - 4c^2 \right). \end{aligned} \quad (6.1)$$

Grundsätzlich sind demnach vier Positionen eines solchen Sanduhr-Ikosaeders zu erwarten, die natürlich nicht durchwegs reell zu sein brauchen.

Ein *Wackelikosaeder* liegt vor, wenn die Schlüsselgleichung (6.1) eine Doppelwurzel aufweist. Dies wäre einmal bei verschwindender Diskriminante

$$\Delta = P^2 - 4Q = \frac{16}{9} [3m^2c^2 + (b^2 - c^2)^2] \quad (6.2)$$

der Fall, was aber wegen $mc \neq 0$ ausgeschlossen ist. Die zweite Möglichkeit besteht mit $t=0$, die für $Q=0$ eintritt und zufolge (5.4) $m=2n$ bedingt. Q verschwindet gemäss (6.1) entweder für $4b^2=3m^2$, was jedoch wegen (5.2) $p+q=0$ nach sich ziehen und im Hinblick auf (5.1) starke Ausartungen bewirken würde. Es bleibt demnach nur mehr die Annahme

$$m^2 = 4(4c^2 - b^2), \quad (6.3)$$

die durchaus realisierbar ist. Die Gleichungen (5.2) reduzieren sich damit auf

$$\frac{1}{4}(p+q)^2 = (p-q)^2 = 4q^2 = b^2 - 3c^2. \quad (6.4)$$

So erhält man für das *Wackelikosaeder* mit den vorgelegten Kantenlängen b und $c=d$ die seine Gestalt gemäss (5.1) festlegenden Formparameter

$$m = 2n = 2\sqrt{4c^2 - b^2}, \quad p = 3q = \frac{3}{2}\sqrt{b^2 - 3c^2}, \quad (6.5)$$

was die Einhaltung der Bedingungen $c\sqrt{3} < b < 2c$ verlangt. - Figur 4 zeigt das zum Mittelwert $b^2/c^2 = 7/2$ gehörige Exemplar.

7. In der Folge sollen nun jene der Vereinbarung $c=d$ genügenden *Kipp-Ikosaeder* untersucht werden, bei welchen das Umspringen durch den mit (6.1) verträglichen Übergang von $t > 0$ zu $\bar{t} = -t$ erfolgt. Zur besseren Übersicht mag die *Normierung* $m=1$ vorgenommen werden, was $a = \sqrt{3}$ bedeutet. Die Ausgangsgleichungen (5.2) lauten dann mit Beachtung von (5.4):

$$(p+q)^2 + t^2 + \frac{3}{4} = b^2, \quad (p-q)^2 + t^2 - t + \frac{1}{4} = 4q^2 + t^2 + t + \frac{1}{4} = c^2. \quad (7.1)$$

Massgebend ist demnach die Beziehung

$$2t = (p-q)^2 - 4q^2 = (p+q)(p-3q). \quad (7.2)$$

Der genannte Übergang von t zu $\bar{t} = -t$ zieht also gemäss (5.4) die Änderung von $n = (1/2) + t$ auf $\bar{n} = (1/2) - t$ nach sich; um Selbstüberschneidungen des Ikosaeders zu vermeiden, wird man daher $0 \leq t \leq 1/2$ verlangen.

Für die neuen Knoten \bar{p} und \bar{q} gelten zufolge (7.1) und (7.2) die Abhängigkeiten

$$\bar{p} + \bar{q} = \pm(p + q), \quad \bar{p} - 3\bar{q} = \mp(p - 3q), \quad (7.3)$$

wobei nur das obere Vorzeichen berücksichtigt zu werden braucht. Dies bedeutet

$$\bar{p} = (p + 3q)/2, \quad \bar{q} = (p - q)/2. \quad (7.4)$$

Um den Überblick und damit die Annahme brauchbarer Daten zu erleichtern, empfiehlt sich mit Rücksicht auf (7.3) die Einführung der neuen Parameter

$$u = p + q, \quad v = p - 3q. \quad (7.5)$$

Die Schlüsselgleichung (7.2) vereinfacht sich dadurch auf

$$2t = uv, \quad (7.6)$$

und die ursprünglichen Parameter werden ausgedrückt durch

$$n = (1 + uv)/2, \quad p = (3u + v)/4, \quad q = (u - v)/4. \quad (7.7)$$

Der Kippvorgang wird durch Vorzeichenwechsel bei v erfasst.

8. Zur Wahl von brauchbaren Werten für die vorgesehenen Parameter u und v mag man sich der in Figur 5 wiedergegebenen *Kurventafel* bedienen. Sie enthält im (u, v) -Netz der Parameterebene die zufolge (7.7) geradlinigen Niveaulinien $p = \text{const}$ und $q = \text{const}$, ferner die (gleichseitigen) Schichtenhyperbeln $t = \text{const}$.

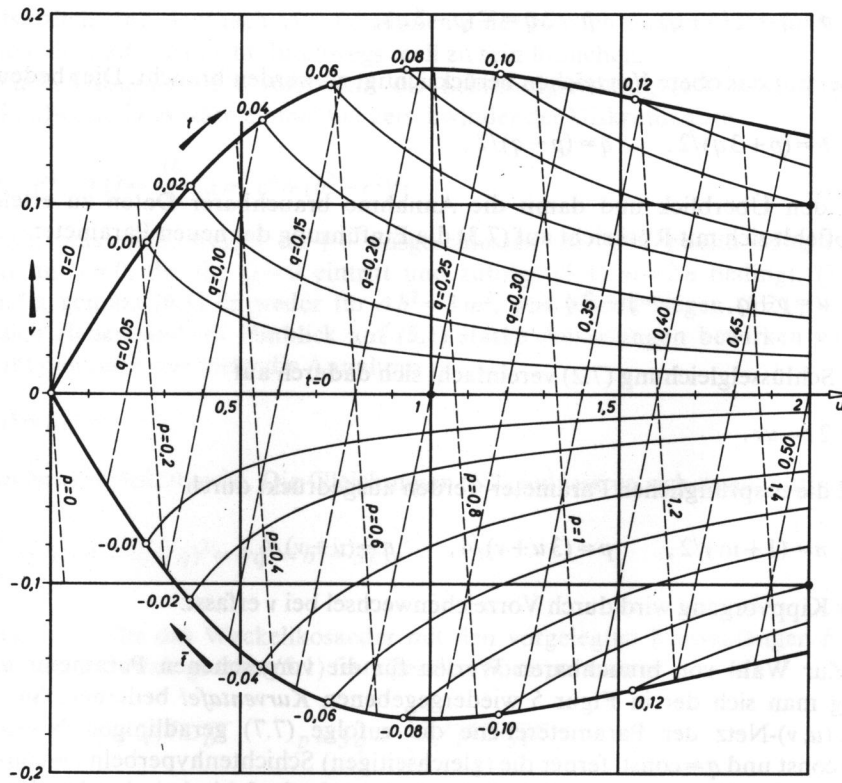
Damit der Kippvorgang nicht behindert wird, darf hierbei der Flächenwinkel längs der Hohlkante $D'F$ nicht durch Null gehen. Dies verlangt, dass der kritische, in der Ebene $x = y\sqrt{3}$ befindliche Zwischenpunkt Z der Kante AF (Fig. 6) auch in der zweiten Position eine nichtnegative Höhenkote z hat. Dieser Punkt teilt in der Ausgangslage, wie aus dem Bildtrapez des Vierecks $AD'FC'$ im Grundriss abzulesen ist, die Kante AF im Verhältnis $AZ:FZ = -m:n = -1:n$ und hat daher die Kote

$$z = \frac{np - q}{1 + n} = \frac{uv(3u + v) + u + 3v}{4(uv + 3)}, \quad (8.1)$$

die wegen $u > 0, v > 0$ stets positiv ist. In der Endform ergibt sich hingegen (aufgrund des Vorzeichenwechsels von v) der Kotenwert

$$\bar{z} = \frac{uv(3u - v) - u + 3v}{4(uv - 3)}, \quad (8.2)$$

der durchaus negativ werden könnte. Die dies ausschliessende Forderung $\bar{z} \geq 0$ schränkt daher die Wahl des Diagrammpunktes (u, v) auf ein gewisses Gebiet ein, das von der in Figur 5 eingetragenen *Grenzkubik* $\bar{z} = 0$ berandet wird und natürlich die den Wackelformen $v = 0$ entsprechende u -Achse enthalten muss.



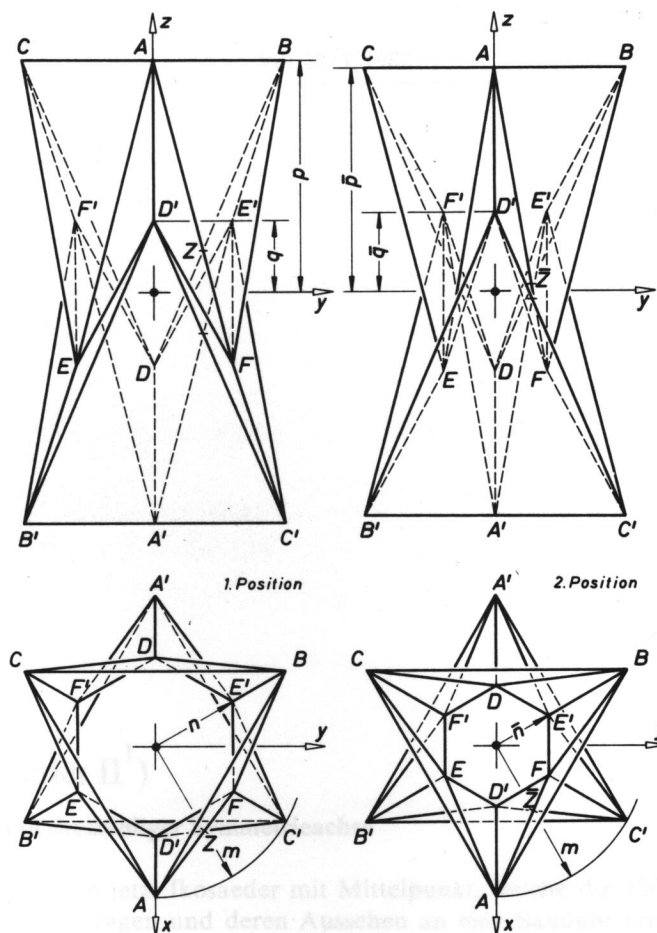
Figur 5. Kurventafel.

Durch diese Bedingung wird die in Abschnitt 7 festgestellte Schranke $t \leq 1/2$ weiter herabgedrückt: damit nämlich die Schichtenhyperbel $uv = 2t = \text{const}$ die Grenzkubik $uv(3u - v) = u - 3v$ reell schneidet und ins Innere des zulässigen Bereichs gelangt, muss sogar $t < 1/6$ sein, wie aus der Parameterdarstellung der Grenzkubik

$$u = \sqrt{\frac{2t(3-2t)}{1-6t}}, \quad v = \sqrt{\frac{2t(1-6t)}{3-2t}} \quad (8.3)$$

hervorgeht. - Die Grenzkubik kennzeichnet nebenbei gleichzeitig jene Ausgangsformen des Sanduhr-Ikosaeders, bei welchen die längs AD' und den analogen Kanten auftretenden Flächenwinkel zu gestreckten werden. In der Endform hingegen klappen die Flächenwinkel längs der Kanten des Sechsecks $DE'FD'EF'$ auf Null zusammen.

Abschliessend sei der Gebrauch der Netztafel an einem Beispiel erläutert. Man wähle im zulässigen Bereich einen beliebigen Punkt (u, v) , etwa $u=2, v=0,1$; hierzu liest man im Einklang mit (7.6) $t=0,1$ ab, was gemäss (7.7) die Werte $n=0,6, p=1,525$ und $q=0,475$ liefert. Macht man noch die Normierung $m=1$ rückgängig, so lauten die einfachsten Werte für die Formparameter der Ausgangsposition: $m=40, n=24, p=61, q=19$. Für die Endform (die im unteren Teil



Figur 6. Kipp-Ikosaeder vom Sanduhr-Typ.

der Tafel bei $u=2, v=-0,1$ erfasst wird) hat man hingegen: $m=40, \bar{n}=16, \bar{p}=59, \bar{q}=21$. Die zur Herstellung des in Figur 6 dargestellten Modells benötigten Kantenlängen sind aus (5.2) zu entnehmen: $a=m\sqrt{3}=69,28, b=87,27, c=d=44,94$. - Das Wackelikosaeder von Figur 4 gehört zum Ablesepunkt $u=1, v=0$; seine Formparameter verhalten sich wie $m:n:p:q=4:2:3:1$, die Kantenlängen wie $a:b:c=2\sqrt{3}:\sqrt{7}:\sqrt{2}$.

W. Wunderlich, Wien