

RECHNERISCHE REKONSTRUKTION EINES EBENEN OBJEKTS AUS ZWEI PHOTOGRAPHIEN

W. Wunderlich, Wien

1. Vorwort

§ 1.1. Wird ein *ebenes Objekt* (ebenes Gelände, Gewässer, Gebäudefront, Wandgemälde etc.) von zwei Standpunkten O und O' aus photographiert, so besteht im Augenblick der simultan gedachten Aufnahmen zwischen der Obejektebene Π und den Bildebenen π und π' je eine *perspektive Kollineation* (Abb.1). Die zwischen den beiden Meßbildern $\pi(P)$ und $\pi'(P')$ bestehende kollineare Beziehung ist hingegen im allgemeinen nicht perspektiv, d.h. ohne Kollineationszentrum und Kollineationsachse. Diese "freie" Kollineation $\mathcal{K}: P \rightarrow P'$ ist bekanntlich vollständig bestimmt, wenn sich für vier ein nichtausgeartetes *Viereck* bildende Objektpunkte $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die Bilder A, B, C, D und A', B', C', D' identifizieren lassen.

Bei Kenntnis der *inneren Orientierung*, festgelegt durch die Hauptpunkte M in π und N' in π' samt den Kammerkonstanten c und c' , sind mit den Meßbildern auch die Bündel der Sehstrahlen $p = OP$ und $p' = O'P'$ als bekannt anzusehen. Auch die Zuordnung $p \rightarrow p'$ wird noch als kollinear bezeichnet; ausschlaggebend und kennzeichnend hierfür ist der Umstand, daß p' ein Strahlbündel durchläuft, wenn p dies tut (und umgekehrt).

Zur *Rekonstruktion* des Objekts sind die beiden als starr vorzustellenden Sehstrahlbündel $O(p)$ und $O'(p')$ wieder in *perspektive Lage* zu bringen, also derart kongruent zu verlagern, daß entsprechende Strahlen p und p' einander schneiden, ohne daß die Zentren O und O' zusammenfallen. Dies geschieht natürlich bei reduzierter Distanz derselben, sodaß in der Menge der Schnittpunkte pp' ein verkleinertes *Modell* des Objekts entsteht.

§ 1.2. Die Aufgabe, zwei gegebene kollineare Strahlbündel durch kongruente Verlagerung in perspektive Lage zu bringen, ist ein klassisches Problem der projektiven Geometrie. Es wurde etwa bei H.SCHRÖTER [4, S.392] im Sinne von J.STEINER behandelt und läuft auf eine kubische Gleichung hinaus, ist also zeichnerisch mit Lineal und Zirkel allein nicht lösbar. Die konstruktive Durchführung für photogrammetrische Zwecke ist in einem Referat von Th.SCHMID [3] zu finden. Sie erfordert erheblichen Aufwand und setzt Beherrschung des Operierens mit imaginären sowie unerreichbaren Elementen voraus.

Wenn man von einer Grazer Dissertation [2] absieht, scheint bislang eine heutigen Anforderungen entsprechende numerische Lösung dieses Orientierungsproblems nicht publiziert worden zu sein, obwohl es dem Vernehmen nach auf verschiedenen Gebieten auch jetzt noch durchaus von Bedeutung ist. In der vorliegenden Mitteilung wird daher eine rechnerische, auf einem neuen Gedanken beruhende Behandlung auseinandergesetzt. -- Der nächste Abschnitt ist den geometrischen Grundlagen samt einigen dem Praktiker kaum geläufigen Begriffen gewidmet; er darf von theoretisch weniger interessierten Lesern überschlagen werden.

2. Geometrische Grundlagen

§ 2.1. Die bisher bekannten synthetischen Lösungen des in Rede stehenden Orientierungsproblems zielen darauf ab, die sogenannte *Kernachse* zu ermitteln. Dies ist der den beiden Bündeln $O(p)$ und $O'(p')$ in der perspektiven Ausgangsposition gemeinsame Strahl $s = OO'$; in der kollinearen Zuordnung $p \rightarrow p'$ entspricht er sich selbst: $s' = s$ (Abb.1). Selbstentsprechend sind auch alle gemeinsamen Bündel-ebenen $\sigma = \sigma'$; das sind jene Ebenen, die die Kernachse enthalten. Nach Aufhebung der perspektiven Lage hat man zwei *kongruent-entsprechende Ebenenbüschel* $s(\sigma) \quad s'(\sigma')$, denn es gilt $\angle \sigma_1 \sigma_2 = \angle \sigma'_1 \sigma'_2$.

Vom projektiven Gesichtspunkt aus ist für die Metrik des dreidimensionalen euklidischen Raumes der sogenannte *absolute Kegelschnitt* von fundamentaler Bedeutung. Es ist dies jener der Fernebene angehörende Kegelschnitt k , den sämtliche Kugeln gemeinsam haben; er ist imaginär, besser gesagt "nullteilig", weil er trotz reeller Gleichung keine reellen Punkte aufweist. Aus jedem eigentlichen Punkt O wird k durch einen "Minimalkegel" K projiziert; dieser wird in jedem kartesischen Koordinatensystem $(O; x, y, z)$ durch die Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ beschrieben. Der Winkel zweier nicht parallelen Ebenen σ_1, σ_2 kann nun folgendermaßen erklärt werden: Man lege aus ihrer Schnittgerade s die beiden Tangentialebenen ι_1, ι_2 an den absoluten Kegelschnitt k ("isotrope" Ebenen) und bestimme das Doppelverhältnis $\delta = (\sigma_1 \sigma_2 \iota_1 \iota_2)$ dieser vier Ebenen; der gesuchte Winkel $\varphi = \angle \sigma_1 \sigma_2$ ergibt sich dann mittels der nach E.LAGUERRE benannten Formel $\varphi = (i/2) \cdot \ln \delta$.

§ 2.2. Die von Th.SCHMID [3] angegebene Lösung des Orientierungsproblems beruht nun auf der folgenden Überlegung. Die für die Winkelmessung im Bündel O benötigten isotropen Ebenen enthalten allesamt den Bündelscheitel O , berühren mithin den von O ausstrahlenden Minimalkegel $K = Ok$; diesem entspricht im kollinearen Bündel O' ein ebenfalls nullteiliger Kegel 2.Grades K' . Umgekehrt ist im Bündel O ein quadratischer Kegel Δ vorhanden, der dem Minimalkegel Δ' im Bündel O' zugeordnet ist. Den vier gemeinsamen Tangentialebenen l_1, l_2, l_3, l_4 von K und Δ entsprechen die vier gemeinsamen Tangentialebenen l'_1, l'_2, l'_3, l'_4 von K' und Δ' . Als Achsen kongruent-entsprechender Ebenenbündel kommen demnach nur die Schnittgeraden der genannten Ebenenquadrupel in Betracht. Von den jeweils sechs Schnittgeraden in jedem der beiden Bündel sind immer nur zwei reell, nämlich die von konjugiert-imaginären Ebenen herrührenden; es sind dies die sogenannten *Fokalstrahlen* der Kegel Δ bzw. K' , die für diese eine ähnliche Rolle spielen wie die Brennpunkte bei den Kegelschnitten in der Ebene. Jeder dieser Fokalstrahlen kommt als Kernachsenbestandteil in Frage: Zwei entsprechende Fokalstrahlen s und s' tragen ja aufgrund der kollinearen Invarianz des Doppelverhältnisses und wegen der Laguerreschen Formel kongruente Bündel entsprechender Ebenen. Werden also diese Bündel durch Verlagerung ebenenweise zur Deckung gebracht, ohne daß die Bündelscheitel zusammenfallen, so ist die gewünschte perspektive Lage der Bündel hergestellt. -- Die in [3] anhand eines konkreten Beispiels vorexerzierte, jedoch nur bis zur Bestimmung der Kernachsenbestandteile geführte Konstruktion ist wegen ihres Aufwandes für die geodätische Praxis unzumutbar.

Grundsätzlich wäre noch zu vermerken, daß aufgrund der zwei verfügbaren Paare entsprechender Fokalstrahlen sowie des Umstandes, daß bei Umwendung eines Bündels um die Kernachse neuerlich perspektive Lage entsteht, rein geometrisch vier wesentlich verschiedene Lösungen zustandekommen, von denen natürlich nur eine die richtige sein kann. Die Auswahl wird im konkreten Fall gewiß nicht schwerfallen, vor allem bei Beachtung der tatsächlich in Betracht kommenden Halbstrahlen.

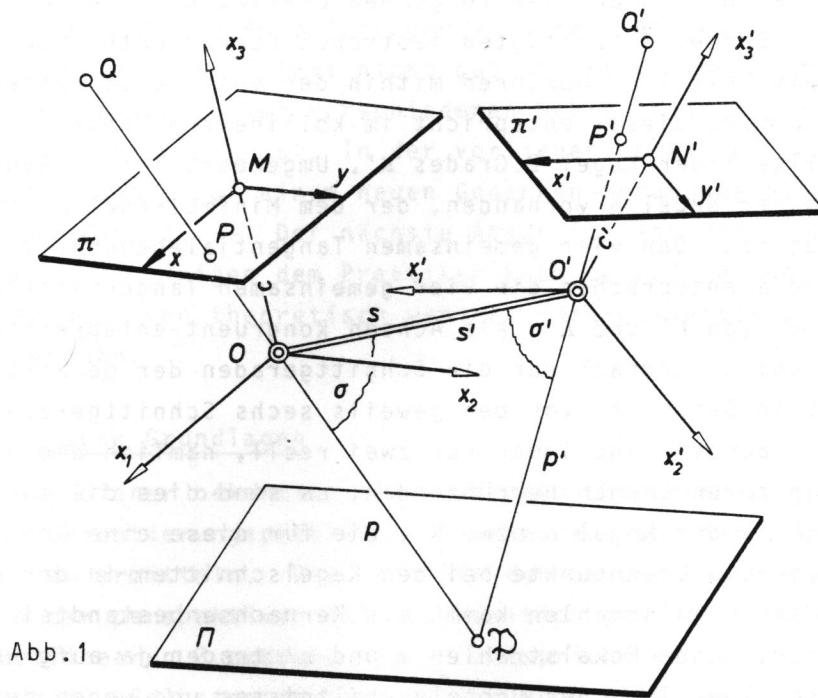


Abb.1

3. Vorbereitung der analytischen Behandlung

§ 3.1. Zur zahlenmäßigen Erfassung seien in den beiden Meßbildern $\pi(P)$ und $\pi'(P')$ kartesische Koordinatensysteme $(M; x, y)$ bzw. $(N'; x', y')$ eingeführt (Abb.1), die den Ursprung jeweils im Hauptpunkt haben und deren Achsen parallel zu den Bildrändern verlaufen mögen. Die die Bilder verknüpfende *Kollineation* $\mathcal{K}: P \rightarrow P'$ wird dann bekanntlich durch eine linear-gebrochene Transformation beschrieben:

$$(1) \quad x' = \frac{a_{11}x + a_{12}y + a_{13}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}}, \quad y' = \frac{a_{21}x + a_{22}y + a_{23}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}}.$$

Zweckmäßig ist hier der Übergang zu *homogenen Koordinaten* x_i bzw. x'_i ($i=1,2,3$), erklärt durch

$$(2) \quad x_1 : x_2 : x_3 = x : y : c, \quad x'_1 : x'_2 : x'_3 = x' : y' : c',$$

wobei c und c' die (für gewöhnlich gleichen) Kammerkonstanten bezeichnen. Bei diesen Zahlentripeln kommt es nur auf die Verhältnisse an, d.h. die x_i (bzw. x'_i) dürfen mit einem beliebigen Faktor $\rho \neq 0$ multipliziert werden; die ursprünglichen inhomogenen Bildkoordinaten lassen sich ja jederzeit durch $x = cx_1/x_3, y = cx_2/x_3$ eindeutig wiedergewinnen. Die Kollineation $\mathcal{K}$ (1) schreibt sich nun in gedrängter Form [1, S.34]:

$$(3) \quad x'_i = \sum_{k=1}^3 a_{ik} x_k \quad (i=1,2,3) \text{ mit } \det(a_{ik}) > 0.$$

§ 3.2. Die neun Koeffizienten a_{ik} werden im folgenden als bekannt vorausgesetzt. Bei Kenntnis entsprechender Vierecke $ABCD$ und $A'B'C'D'$ könnte man sie so bestimmen, daß man die gemessenen Koordinaten x_A, y_A etc. in die mit noch unbekannten Koeffizienten a_{ik} geschriebenen Formeln (1) einsetzt; dies liefert acht linear-homogene Gleichungen für die neun a_{ik} , was zwar nur zur Berechnung der Verhältnisse ausreicht, aber mehr ist nicht vonnöten; üblicherweise wählt man $a_{33} = 1$.

Das Prinzip zu einer bequemeren Vorgangsweise hat der Verfasser in [5] bereitgestellt. Hierzu berechne man für einen Punkt $P(x, y)$ die Dreiecksflächen $f_1 = BCP$, $f_2 = CAP$ und $f_3 = ABP$; sie sind in x und y linear:

$$(4) \quad 2f_1 = \alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \alpha_{13} \quad \text{mit} \quad \alpha_{11} = y_B - y_C, \quad \alpha_{12} = x_C - x_B, \\ \alpha_{13} = x_By_C - x_Cy_B \text{ usf.}$$

Schon das Verhältnis $f_1:f_2:f_3$ dieser (vorzeichenbegebenen) "Flächenkoordinaten" reicht zur Festlegung des Punktes P aus, denn es gilt, wie man durch Einsetzen leicht nachprüft:

$$(5) \quad x = \frac{f_1x_A + f_2x_B + f_3x_C}{f_1 + f_2 + f_3}, \quad y = \frac{f_1y_A + f_2y_B + f_3y_C}{f_1 + f_2 + f_3}$$

Diese Formeln legen eine einfache mechanische Deutung der von F.A. MÖBIUS eingeführten "baryzentrischen" Koordinaten f_i nahe [1, S.17]: Werden in den Ecken des Dreiecks ABC punktförmige Massen f_1, f_2, f_3 (oder dazu proportionale) angebracht, so fällt der Gesamtschwerpunkt genau nach P .

Für $P = D$ liefern die Formeln (4) mit $x = x_D$ und $y = y_D$ die (festen) Flächenkoordinaten e_1, e_2, e_3 des vierten Angabepunktes D . Bei entsprechenden Maßnahmen im zweiten Bildfeld wird die Kollineation $\mathcal{K}$ gemäß [5] beschrieben durch

$$(6) \quad \frac{f'_1}{e'_1} : \frac{f'_2}{e'_2} : \frac{f'_3}{e'_3} = \frac{f_1}{e_1} : \frac{f_2}{e_2} : \frac{f_3}{e_3}.$$

Setzt man also in den akzentuierten Formeln (5) für $f'_i = f_i e'_i / e_i$ mit den Ausdrücken (4) für die f_i ein, so kann man in den Koeffizienten von x, y und 1 in den Zählern und im Nenner von (5') direkt die gewünschten a_{ik} ablesen, beispielsweise

$$(7) \quad \alpha_{11} = \frac{e'_1}{e_1} \alpha_{11} x'_A + \frac{e'_2}{e_2} \alpha_{21} x'_B + \frac{e'_3}{e_3} \alpha_{31} x'_C, \text{ usf.}$$

Sollte hierbei $\det(a_{ik}) < 0$ ausfallen, so wäre bei allen a_{ik} das Vorzeichen umzukehren, um der in (3) getroffenen Voraussetzung zu genügen.

§ 3.3. Ein entscheidender Gedanke für die anschließende analytische Behandlung der Orientierungsaufgabe besteht nun darin, die Zahlen x_i und x'_i ($i = 1, 2, 3$) als inhomogene Koordinaten im Raum

zu deuten. Jedes einen Bildpunkt $P(x_1:x_2:x_3)$ in π repräsentierende Tripel x_1, x_2, x_3 definiert einen Raumpunkt $Q(x_1, x_2, x_3)$ in einem kartesischen Koordinatensystem, dessen Achsenkreuz $(O; x_1, x_2, x_3)$ durch Verschiebung des Achsenpaares $(M; x, y)$ samt der Bildnormale in das Aufnahmezentrum O hervorgeht (Abb.1); ein solcher Punkt O gehört dem Sehstrahl $OP = p$ an.

Die Transformationsgleichungen (3) beschreiben jetzt bei analoger Interpretation der x_i' eine *räumliche Affinität* $\mathcal{A} : Q \rightarrow Q'$, in welche die kollineare Zuordnung $p \rightarrow p'$ der Bündel O und O' eingebettet erscheint.

Mit dieser Vorstellung ist leicht einzusehen, daß in den kollinearen Bündeln *entsprechende rechtwinklige Dreikante* vorhanden sind: Eine um das Zentrum O geschlagene Kugel Σ wird nämlich durch die Affinität $\mathcal{A}$ in ein Ellipsoid Σ' übergeführt, das im allgemeinen dreiachsig sein wird; seine paarweise orthogonalen Hauptachsen rühren dabei von einem ebenfalls konjugierten, also orthogonalen Durchmessertripel der Kugel Σ her.

4. Rechnerische Lösung

§ 4.1. Um die eben genannten orthogonalen Dreikante zu finden, betrachte man im ersten Bündel einen beliebigen Strahl $p(x_1:x_2:x_3)$ seinen ihm vermöge $\mathcal{A}$ (3) zugeordneten Strahl $p'(x'_1:x'_2:x'_3)$ und dessen Normalebene

$$(8) \quad \Theta \perp p': \quad \Sigma x'_i X'_i = 0 \quad (X'_i = \text{laufende Koordinaten}^1).$$

Dieselbe geht zufolge (3) aus der durch $\Sigma a_{ik} x_k a_{ij} X_j = 0$ beschriebene Ebene

$$(9) \quad \Theta : \Sigma b_{ik} x_k X_j = 0 \quad \text{mit} \quad b_{jk} = \Sigma a_{ij} a_{ik} = b_{kj} \quad \text{hervor.}$$

Soll nun auch $\Theta \perp p$ gelten, so muß (9) äquivalent sein zu $\Sigma x_j X_j = 0$.

Der Koeffizientenvergleich verlangt mithin

$$(10) \quad \Sigma b_{jk} x_k = \rho \cdot x_j \quad (j=1,2,3).$$

Diese drei Relationen stellen ein linear-homogenes Gleichungssystem für x_1, x_2, x_3 dar, das nur dann eine nichttriviale (nicht durchwegs aus Nullen bestehende) Lösung besitzt, wenn die Koeffizientendeterminante verschwindet. Diese Bedingung

$$(11) \quad \begin{vmatrix} b_{11}-\rho & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22}-\rho & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33}-\rho \end{vmatrix} = 0$$

bedeutet eine kubische Gleichung für ρ . Sie lautet, ausführlich geschrieben,

$$(12) \quad \rho^3 - \rho^2 \Sigma b_{ii} + \rho \Sigma B_{ii} - b_{11} b_{22} b_{33} = 0,$$

wobei B_{ii} den Kofaktor von b_{ii} in der (symmetrischen) Matrix (b_{jk}) bezeichnet.

¹⁾ In der Folge werden der Kürze halber die Summationsindizes unterdrückt. Zu summieren ist jeweils über die doppelt auftretenden Indizes, sofern nicht ausdrücklich anders verfügt wird.

Die drei Lösungen ρ_1, ρ_2, ρ_3 -- die "Eigenwerte" der Matrix (b_{jk}) -- sind im allgemeinen verschieden, stets reell [1, S.68] und bei uns positiv (§ 4.3.). Wir denken sie uns der Größe nach geordnet, also so numeriert, daß

$$(13) \quad 0 < \rho_1 < \rho_2 < \rho_3.$$

§ 4.2. Die zum Eigenwert $\rho = \rho_i$ gehörige Lösung von (10) sei durch die Festsetzung

$$(14) \quad x_1 : x_2 : x_3 = c_{i1} : c_{i2} : c_{i3} \quad \text{mit} \quad \sum_k c_{ik}^2 = 1$$

normiert. Die drei so zu gewinnenden Einheitsvektoren $c_i = (c_{i1}, c_{i2}, c_{i3})$ -- die "Eigenvektoren" der Matrix (b_{jk}) --, deren Komponenten zufolge (10) den Relationen

$$(15) \quad \sum_k b_{jk} c_{ik} = \rho_i c_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

genügen, sind bekanntlich paarweise normal [1, S.68]. Durch geeignete Zeichenwahl bei der Normierung (14) kann man erreichen, daß das orthogonale Dreibein c_1, c_2, c_3 ein rechtshändiges ist, also $c_1 \times c_2 = c_3$ gilt.

Das vermöge der Affinität $\mathcal{A}$ (3) zugeordnete Dreibein

c'_1, c'_2, c'_3 , definiert durch

$$(16) \quad c'_i = (c'_{i1}, c'_{i2}, c'_{i3}) \quad \text{mit} \quad c'_{ij} = \sum_k a_{jk} c_{ik} \quad (i, j = 1, 2, 3),$$

ist ebenfalls orthogonal, was bereits im Ansatz von § 4.1. begründet ist. Es besteht jedoch nicht aus Einheitsvektoren, denn es gilt etwa für c'_1 :

$$(17) \quad c_1'^2 = \sum_j c_{1j}'^2 = \sum_j a_{jk} c_{1k} a_{jl} c_{1l} = \sum_{kl} b_{kl} c_{1l} c_{1k} = \\ = \rho_1 \sum_k c_{1k}^2 = \rho_1 c_1^2 = \rho_1.$$

Damit bestätigt sich nachträglich die Behauptung $\rho_i > 0$. Das orthonormierte Dreibein des zweiten Bündels wird also gebildet von den Einheitsvektoren

$$(18) \quad c''_i = c'_i / \alpha_i \quad \text{mit} \quad \alpha_i = \sqrt{\rho_i} > 0.$$

Wegen der in (3) getroffenen Festsetzung $\det(a_{ik}) > 0$ ist auch dieses Dreibein rechtshändig.

§ 4.3. Wir gehen nun von den bisherigen Koordinaten x_i und x'_i zu neuen, auf die orthonormierten Dreibeine bezogenen Koordinaten y_i und y'_i über. Dies läuft auf die Zerlegung der Ortsvektoren von Punkten Q und Q' in den Gestalten $\varrho = \sum y_i c_i$ und $\varrho' = \sum y'_i c''_i$ hinaus; wegen $y_i = c_i \varrho$ und $y'_i = c''_i \varrho'$ wird der Koordinatenwechsel durch die (orthogonalen) Transformationen

$$(19) \quad y_i = \sum_k c_{ik} x_k \quad \text{bzw.} \quad y'_i = \sum_k c''_{ik} x'_k \quad \text{mit} \quad c''_{ik} = c'_{ik} / \alpha_i$$

vollzogen. -- Sind Q und Q' vermöge $\mathcal{A}$ zugeordnete Punkte, dann gilt wegen der Teilverhältnistreue der Affinität: $\varrho' = \sum y_i c'_i = \sum y_i \alpha_i c''_i$; wir erhalten damit für die Affinität $\mathcal{A}$ die einfache Darstellung

$$(20) \quad y'_i = \alpha_i y_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad \text{mit} \quad \alpha_i = \sqrt{\rho_i} > 0.$$

§ 4.4. Die in der Ausgangslage zur Objektebene Π parallelen Bündel-ebenen ζ und ζ' entsprechen einander in der kollinearen Zuordnung der Bündel, weil sie beide die Ferngerade von Π projizieren. Irgend-einer zu ζ parallelen Hilfsebene $\bar{\pi}$ wird durch die Affinität $\mathcal{A}$ eine zu ζ' parallele Ebene $\bar{\pi}'$ zugewiesen. Die von den Sehstrahlbündeln auf diesen Hilfsebenen hervorgerufenen "Zwischenbilder" $\bar{\pi}(\bar{P})$ und $\bar{\pi}'(\bar{P}')$ sind zum Original $\Pi(\mathcal{P})$ und daher auch untereinander *ähnlich*. Durch passende Streckung vom Zentrum Q' aus kann man vom zweiten zu einem dritten Zwischenbild $\bar{\pi}''(\bar{P}'')$ gelangen, das zum ersten sogar *kongruent* ist.

Würde man nun unter Mitnahme der Sehstrahlbündel die Felder $\bar{\pi}$ und $\bar{\pi}''$ punktweise zur Deckung bringen, so wäre -- ohne die Kern-achse zu benötigen -- perspektive Lage der Bündel erreicht, denn entsprechende Strahlen p und p' schneiden einander in $\bar{P} = \bar{P}''$. Offensichtlich ist die genannte Verlagerung jedoch überflüssig, weil bereits das Zwischenbild $\bar{\pi}(\bar{P})$ ein verkleinertes *Modell* des Objektes $\Pi(\mathcal{P})$ darstellt.

Alles in allem kommt es also nur darauf an, ein Paar von ent-sprechenden Ebenen $\bar{\pi}$ und $\bar{\pi}'$ zu finden, die vermöge der Affinität $\mathcal{A}$ *ähnlich* aufeinander bezogen sind. Hierzu beachte man, daß auch die korrespondierenden Bündelebenen ζ und ζ' *ähnlich* aufeinander bezogen sind, weil man ja die *ähnlichen* Felder $\bar{\pi}$ und $\bar{\pi}'$ durch vermöge $\mathcal{A}$ entsprechende Parallelprojektionen nach ζ bzw. ζ' bringen kann.

§ 4.5. Bei zwei durch die Affinität $\mathcal{A}$ *ähnlich* aufeinander be-zogenen Bündelebenen ζ und ζ' muß jedem *Kreis* in ζ wieder ein Kreis in ζ' entsprechen. Diese Eigenschaft ist aber bereits gesichert, wenn sich ein einziges Paar entsprechender Kreise h, h' nachweisen läßt, denn jeder andere Kreis in ζ ist durch zentrische Streckung aus h ableitbar, was analoge Verhältnisse in ζ' nach sich zieht.

Wir betrachten also etwa den in ζ' gelegenen Einheitskreis h' mit dem Mittelpunkt O' . Er verläuft auf der Einheitskugel

$$(21) \quad \Omega' : y_1'^2 + y_2'^2 + y_3'^2 = 1$$

und rührt daher vermöge $\mathcal{A}$ von einer Kurve 2.Ordnung h in ζ her, die dem Ellipsoid

$$(22) \quad \Omega : \rho_1 y_1^2 + \rho_2 y_2^2 + \rho_3 y_3^2 = 1$$

angehört, welches aufgrund der Annahme (13) ein dreiachsiges ist. Soll nun auch h ein Kreis sein, so muß ζ eine *zyklische Ebene* von Ω sein, d.h. Ω nach einem Kreis schneiden.

Zu den reellen Kreisschnittebenen des Ellipsoids Ω kommt man in bekannter Weise [1, S.143], wenn man es mit der konzentrischen Kugel

$$(23) \quad \rho_2(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) = 1$$

schneidet, welche es in den Endpunkten der Hauptachse mittlerer Länge berührt. Die Durchdringungskurve 4.Ordnung zerfällt nämlich in zwei Kurven 2.Ordnung, die sich auf das durch Differenzenbildung von (22) und (23) zu gewinnende Ebenenpaar

$$(24) \quad (\rho_2 - \rho_1)y_1^2 - (\rho_3 - \rho_2)y_3^2 = 0$$

verteilen; da die beiden Bestandteile eben sind und der Kugel (23) angehören, handelt es sich in der Tat um Kreise.²⁾

§ 4.6. Fassen wir etwa die der Gleichung (24) genügende Bündelebene

$$(25) \quad \zeta : \sqrt{\rho_2 - \rho_1} \cdot y_1 + \sqrt{\rho_3 - \rho_2} \cdot y_3 = 0$$

ins Auge. Sie enthält die y_2 -Achse, und der Winkel ω , den ihre Normale mit der y_3 -Achse bildet, ist bestimmt durch

$$(26) \quad \sin \omega = \sqrt{\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_3 - \rho_1}}, \quad \cos \omega = \sqrt{\frac{\rho_3 - \rho_2}{\rho_3 - \rho_1}}.$$

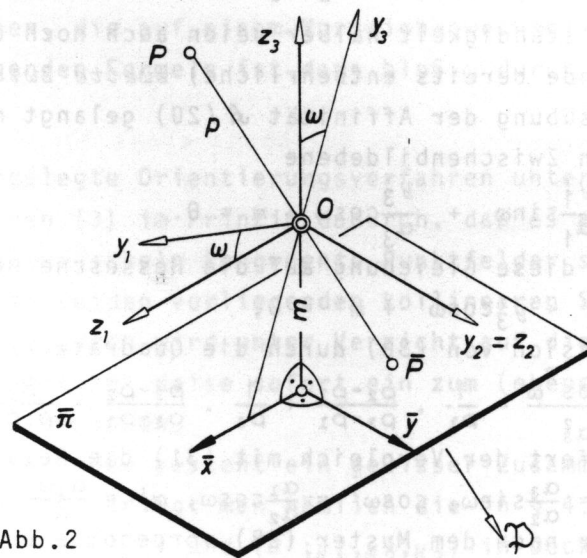


Abb. 2

2) Die zyklischen Ebenen (24) verbinden je zwei konjugierte der vier imaginären Erzeugenden j_i ($i=1,2,3,4$), die die in § 2.2 erwähnten nullteiligen Kegel 2.Ordnung K und Δ gemeinsam haben. Ihnen entsprechen vermöge der Affinität (20) die vier Schnitterzeugenden j'_i der Kegel K' und Δ' . Sei ζ etwa die Verbindungsebene der Erzeugenden j_1 und j_2 ; deren Fernpunkte J_1 und J_2 liegen auf dem absoluten Kegelschnitt k und sind daher (aufgrund einer Laguerreschen Formel) für die Winkelmetrik in ζ und in jeder dazu parallelen Ebene $\bar{\pi}$ verantwortlich. Die gleiche Rolle spielen die zugeordneten Fernpunkte J'_1 und J'_2 für die Ebene $\zeta' = j'_1 j'_2$ und die dazu parallele Ebene $\bar{\pi}'$. So folgt dann aus der Doppelverhältnistreue der Affinität die winkeltreue, also ähnliche Beziehung zwischen den Ebenen $\bar{\pi}$ und $\bar{\pi}'$. -- Um im Reellen zu bleiben, wurde in § 4.5 der elementare Umweg eingeschlagen.

Die vorgesehene Zwischenbildebene $\bar{\pi} \parallel \zeta$ kann daher angesetzt werden durch die Hessesche Normalform

$$(27) \quad \bar{\pi} : y_1 \sin \omega + y_3 \cos \omega + m = 0,$$

wobei $m \neq 0$ ihren Abstand vom Ursprung O bedeutet (Abb.2).

Wir gehen nun durch Verdrehung des Achsenkreuzes $(O; y_1, y_2, y_3)$ um die y_2 -Achse zu einem neuen Koordinatensystem $(O; z_1, z_2, z_3)$ über, dessen z_3 -Achse normal zur zyklischen Ebene ζ ist (Drehwinkel ω).

Nach Durchführung der betreffenden Transformation

(28) $z_1 = y_1 \cos \omega - y_3 \sin \omega, z_2 = y_2, z_3 = y_1 \sin \omega + y_3 \cos \omega$
wird die Zwischenbildebene $\bar{\pi}$ (27) durch $z_3 = -m$ dargestellt. Das vom Sehstrahl $p = OP$ erzeugte Zwischenbild $\bar{P}$ eines Objektpunktes hat also die Koordinaten $\bar{z}_i = \lambda z_i$ mit $\lambda = -m/z_3$. Die kartesischen Koordinaten $\bar{z}_1, \bar{z}_2$ können unmittelbar zur Beschreibung des Zwischenbildes oder Modells dienen; sie seien abschließend mit $\bar{x}$ und $\bar{y}$ bezeichnet (Abb.2) und haben die Werte

$$(29) \quad \bar{x} = -m z_1 / z_3, \quad \bar{y} = -m z_2 / z_3.$$

§ 4.7. Der Vollständigkeit halber seien auch noch die Formeln für das (im Grunde bereits entbehrliche) *zweite Zwischenbild* angegeben. Durch Ausübung der Affinität A (20) gelangt man zunächst von (27) zur zweiten Zwischenbildebene

$$(30) \quad \bar{\pi}' : \frac{y_1'}{\alpha_1} \sin \omega + \frac{y_3'}{\alpha_3} \cos \omega + m = 0.$$

Bringt man auch diese Gleichung auf die Hessesche Normalform

$$(31) \quad y_1' \sin \omega' + y_3' \cos \omega' + m' = 0,$$

was mit der Division von (30) durch die Quadratwurzel aus

$$(32) \quad \frac{\sin^2 \omega}{\alpha_1^2} + \frac{\cos^2 \omega}{\alpha_3^2} = \frac{1}{\rho_1} \cdot \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_3 - \rho_1} + \frac{1}{\rho_3} \cdot \frac{\rho_3 - \rho_2}{\rho_3 - \rho_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1 \rho_3} = \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1 \alpha_3} \right)^2$$

erfolgt, so liefert der Vergleich mit (31) die Relationen

$$(33) \quad \sin \omega' = \frac{\alpha_3}{\alpha_2} \sin \omega, \quad \cos \omega' = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \cos \omega, \quad m' = \frac{\alpha_1 \alpha_3}{\alpha_2} m.$$

Mittels der nach dem Muster (28) vorgenommenen Koordinatentransformation

(34) $z_1' = y_1' \cos \omega' - y_3' \sin \omega', z_2' = y_2', z_3' = y_1' \sin \omega' + y_3' \cos \omega'$
gelangt man schließlich -- wie vorhin zu (28) -- zu den Zwischenbildkoordinaten in $\bar{\pi}'$:

$$(35) \quad \bar{x}' = -m' z_1' / z_3', \quad \bar{y}' = -m' z_2' / z_3'.$$

Um die erwartete ähnliche Beziehung zwischen den Feldern $\bar{\pi}$ und $\bar{\pi}'$ nachzuprüfen, hat man in (35) mittels der Transformationen (34), (20) und (28) unter Benützung der Formeln (33) und (26) zu den Koordinaten z_i überzugehen. Nach einiger Rechnung erhält man dann über (29) die Relationen

$$(36) \quad \bar{x}' = \alpha_2 (\bar{x} + d), \quad \bar{y}' = \alpha_2 \bar{y} \quad \text{mit} \quad d = \frac{m}{\rho_2} \sqrt{\rho_2 - \rho_1} \cdot \sqrt{\rho_3 - \rho_2},$$

welche die behauptete Ähnlichkeit bestätigen.

Der Betrag des Ähnlichkeitsfaktors $\mu = \alpha_2$ steht in Einklang mit der durch $\mathcal{A}$ (20) bewirkten Ordinatenverzerrung $y_2' = \alpha_2 y_2$. Daß die Nullpunkte der Koordinatensysteme einander nicht entsprechen ($d \neq 0$), darf nicht überraschen, weil ja die zu ζ normale z_3 -Achse nicht in die zu ζ' normale z_3' -Achse übergeht.

§ 4.8. Um *kongruente* Zwischenbilder zu erhalten, ist lediglich $\bar{\pi}'$ durch eine dazu parallele Ebene $\bar{\pi}''$ zu ersetzen, die vom Zentrum O' den Abstand $m'' = m'/\alpha_2 = m\alpha_1\alpha_3/\alpha_2^2$ hat. Würde man anschließend die Felder $\bar{\pi}$ und $\bar{\pi}''$ unter Mitnahme der Sehstrahlbündel punktweise zur Deckung bringen, so wäre eine perspektive Lage der Bündel hergestellt.

Hat man mit ζ (25) die richtige zyklische Ebene gewählt, so stellt das Zwischenbild $\bar{\pi}(\bar{P})$ bereits ein zum Original $\Pi(P)$ *ähnliches Modell* dar, dessen Maßstab durch passende Festsetzung der Distanz m nach Belieben zu regeln ist. Erscheint jedoch das Modell aus irgendeinem Grund falsch, so wäre die vorhandene zweite Möglichkeit zu versuchen, die auf einem Vorzeichenwechsel in (25) beruht; in den nachfolgenden Formeln ist dann bloß ω durch $-\omega$ zu ersetzen.

5. Schlußwort

§ 5.1. Das dargelegte Orientierungsverfahren unterscheidet sich von den bisherigen [3] im Prinzip dadurch, daß es anstelle von kongruenten Ebenenbüscheln kongruente Punktfelder sucht, um perspektive Lage der beiden vorliegenden kollinearen Sehstrahlbündel herzustellen. Hierdurch wird unter Verzicht auf die Kernachse und in gedanklich einfacher Weise sofort ein zum (ebenen) Original ähnliches Modell gewonnen.

Nichtsdestoweniger besteht ein gewisser Zusammenhang zwischen den beiden Methoden. Bringt man nämlich die in § 4.3 eingeführten Achsenkreuze $(O; y_1, y_2, y_3)$ und $(O'; y_1', y_2', y_3')$ in Deckung, so gelangen die beiden in § 2.2 erwähnten Kegel

$$(37) \quad \Delta: \rho_1 y_1^2 + \rho_2 y_2^2 + \rho_3 y_3^2 = 0, \quad K': \frac{y_1'^2}{\rho_1} + \frac{y_2'^2}{\rho_2} + \frac{y_3'^2}{\rho_3} = 0$$

in *polare Lage* bezüglich der vereinigten Minimalkegel $\Delta' = K$: $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 0$. In dieser Bündelpolarität, die jedem Bündelstrahl die zu ihm normale Bündelebene zuordnet, entsprechen den vier gemeinsamen Tangentialebenen ι_i von K und Δ (§ 2.2) die vier gemeinsamen Erzeugenden j_i' von K' und Δ' (Fußnote 2). Hieraus folgt, daß jeder Fokalstrahl von Δ auf eine zyklische Ebene von K' normal steht und umgekehrt. Die für die Orientierung nach Th. SCHMID [3] benötigten Kernachsenbestandteile s' und s sind mithin normal zu den zyklischen Ebenen ζ (25) bzw. ζ' , haben also die Richtungsvektoren $(\sin \omega,$

0, $\cos\omega$) bzw. ($\sin\omega'$, 0, $\cos\omega'$); die Werte der Winkelfunktionen sind aus (26) bzw. (33) zu entnehmen.

§ 5.2. Die abschließende *Zusammenfassung* soll kurz die Durchführung des neuen Verfahrens schildern. Bei der dabei gelegentlich eingeschalteten matriziellen Notation sind Vektoren als einspaltige Matrizen geschrieben zu denken. Die numerische Herleitung eines zum ebenen Objektes $\Pi(P)$ ähnlichen Modells $\bar{\Pi}(\bar{P})$ aus zwei (kollinearen) Meßbildern $\pi(P)$ und $\pi'(P')$ vollzieht sich in acht Schritten, von denen fünf bloß der Vorbereitung dienen:

- I) Ermittlung der neun Elemente a_{ik} der die Kollineation $\mathcal{K}: P \rightarrow P'$ erfassenden (3x3)-Matrix α (3). Bei Kenntnis entsprechender Vierecke $ABCD$ und $A'B'C'D'$ mag der in § 3.2 aufgezeigte Weg nützlich sein.
- II) Berechnung der Elemente b_{jk} der symmetrischen Produktmatrix $\mathcal{L} = \alpha^T \alpha$ gemäß (9).
- III) Bestimmung der Eigenwerte ρ_1, ρ_2, ρ_3 von $\mathcal{L}$ durch Auflösung der kubischen Gleichung (12) mit anschließender Ordnung der Größe nach (13).
- IV) Ermittlung der zugehörigen Eigenvektoren c_i . Dies verlangt für jeden Eigenwert ρ_i die Auflösung eines linear-homogenen Gleichungssystems $(\mathcal{L} - \rho_i \mathcal{E})c = 0$ (10), sowie die Normierung der nur bis auf einen Faktor bestimmten Lösung c_i durch $c_i = c_i / |c_i|$; die Vorzeichen sind dabei so zu wählen, daß $c_1 \times c_2 = c_3$.
- V) Berechnung der Winkelfunktionen $\sin\omega$ und $\cos\omega$ mittels der Formeln (26).
Nach dieser Vorarbeit ist dann für jeden interessierenden Punkt $P(x, y)$ des ersten Meßbildes, ausgehend von seinem Ortsvektor $p = (x, y, c)^T$, das folgende Programm durchzuspielen:
- VI) Übergang zu neuen Koordinaten y_1, y_2, y_3 mittels der orthogonalen Transformation $y = \mathcal{L}p$ (19), wobei die Matrix $\mathcal{L}$ durch Nebeneinanderreihen der Spaltenmatrizen c_1, c_2, c_3 zu bilden ist.
- VII) Neuerlich Verdrehung des Koordinatensystems durch $z = \mathcal{S}y$ (28) unter Verwendung der Werte $\sin\omega$ und $\cos\omega$.
- VIII) Berechnung der Modellkoordinaten $\bar{x} = -mz_1/z_3$, $\bar{y} = -mz_2/z_3$ (29) mit passend gewähltem Maßstabsfaktor m .

Sämtliche Schritte sind auf einem Computer routinemäßig ausführbar. Wie man sieht, wird das zweite Meßbild nur beim ersten Schritt benötigt. Nachdem die Numerierung der Meßbilder eine willkürliche ist, könnte das Programm auch auf das zweite Meßbild gestützt werden, und dann, mit der Matrix $\alpha' = \alpha^{-1}$ operierend, ebensogut durchgeführt werden. -- Sollte das Ergebnis aus irgendeinem Grund

falsch erscheinen, so wäre lediglich bei Schritt VII das Vorzeichen von ω umzukehren.

L I T E R A T U R

- [1] W.BLASCHKE: Analytische Geometrie. Wolfenbüttel/Hannover, 1948
- [2] B.HOFMANN-WELLENHOF: Die gegenseitige Orientierung von zwei Strahlenbündeln bei unbekannten Näherungswerten und durch ein nicht iteratives Verfahren.
Diss.Techn.Univ. Graz, 1978
- [3] Th.SCHMID: Orientierungsprobleme der Photogrammetrie.
Intern.Arch.Photogramm. 3 (1913), 3-6.
- [4] H.SCHRÖTER: Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung. Leipzig, 1880.
- [5] W.WUNDERLICH: Zur rechnerischen Durchführung des Vierpunktverfahrens.
Österr.Z.Vermessungsw. 45 (1957), 1-5.