

Walter Wunderlich

Gewindeflächen festen Dralls

Von

Walter Wunderlich

(Mit 2 Abbildungen)

Sonderdruck aus den
Sitzungsberichten der Österreichischen Akademie der Wissenschaften
Mathem.-naturw. Klasse, Abteilung II, 190. Bd., 8. bis 10. Heft, 1982

Wien 1982

In Kommission bei Springer-Verlag, Wien-New York
Druck von Adolf Holzhausens Nfg., Universitätsbuchdrucker, Wien

Gewindeflächen festen Dralls

Von

Walter Wunderlich (Wien)

(Mit 2 Abbildungen)

(Vorgelegt in der Sitzung der math.-nat. Klasse am 25. Juni 1981)

1. Einleitung

Bei einer glatten Regelfläche Φ versteht man unter dem *Drall* p ein Maß für die Verwindung des Flächenstreifens längs einer (geradlinigen) Erzeugenden g . Er ist definiert als der Grenzwert des Quotienten aus Abstand und Winkel zweier in g zusammenrückenden Erzeugenden, den hat also die Dimension einer Länge. Man ist übereingekommen, den Drall als positiv festzusetzen, wenn das Zusammenrücken der benachbarten Erzeugenden im Endstadium einer Rechtserschraubung entspricht; der Flächenstreifen längs g ist dann linksgewunden¹.

Die Zuordnung zwischen den Punkten P einer Erzeugenden g von Φ und den zugehörigen (g enthaltenden) Tangentialebenen τ ist bekanntlich eine projektive. Diese sogenannte *Berührungskorrelation* wird bei einer eigentlichen Erzeugenden durch die Formel

$$s = p \cdot \operatorname{tg} \sigma \quad (1.1)$$

¹ Diese Vorzeichenregel mag widersprüchlich erscheinen; bei einem einschalen Hyperboloid etwa haben die gegen die Achse rechtsgewundenen Erzeugenden negativen Drall. Dies macht die bei E. Müller und J. Krames [10] getroffene entgegengesetzte Regelung durchaus verständlich.

erfaßt, wobei $s = P_0P$ die Entfernung vom Zentral- oder Kehlpunkt $P_0 \in g$ bedeutet, und $\sigma = \angle \tau_0\tau$ den Winkel gegen die Zentralebene τ_0 mißt. Letztere kann als die zu der im Fernpunkt P_u ($s = \infty$) berührenden „asymptotischen“ Ebene τ_u normale Tangentialebene erklärt werden, der Kehlpunkt P_0 als ihr Berührungspunkt; dorthin streben die Endpunkte der Abstandsstrecke der zusammenrückenden Nachbarerzeugenden.

Unter den abwickelbaren Regelflächen Φ sind die Torsen und Kegel dadurch gekennzeichnet, daß ihre sämtlichen Erzeugenden den Drall $p = 0$ aufweisen; bei den Zylindern gilt hingegen $p = \infty$. Bei den windschiefen Regelflächen treten derartige Erzeugende, längs welchen die Flächen von einer einzigen Tangentialebene berührt werden, bloß vereinzelt auf; $p = 0$ kennzeichnet im allgemeinen die „Torsalerzeugenden“ (mit eigentlichem Kuspidualpunkt P_0), $p = \infty$ die „zylindrischen Erzeugenden“ ($P_0 = P_u$).

Neben den abwickelbaren, also speziellen Flächen festen Dralls haben naturgemäß die *Flächen konstanten, nichtverschwindenden und endlichen Dralls* das Interesse der Geometer erweckt, nicht zuletzt deshalb, weil sie ihre Eigenschaft bei beliebigen, die geradlinigen Erzeugenden erhaltenden Verbiegungen bewahren: Der Drall p bleibt ja bei solchen („Mindingschen“) Verbiegungen unverändert. H. Brauner [3] hat eine relativ einfache einheitliche Herleitung solcher konstant gedrahten Flächen Φ angegeben: Man gehe aus von einer beliebigen Torse Φ_0 (Kegel eingeschlossen) und verschiebe jede Erzeugende g_0 von Φ_0 innerhalb der Tangentialebene τ_u in eine Lage $g \parallel g_0$ auf den (orientierten) Abstand $e = p/k$, wobei p eine Konstante und k die konische Krümmung von Φ_0 längs g_0 bezeichnet; die Neulagen g bilden dann eine Fläche Φ mit dem festen Drall p , welche Φ_0 zur asymptotischen (längs der gemeinsamen Fernkurve f berührenden) Torse besitzt.

Einen entscheidenden Anstoß erfuhr die Forschung auf diesem Gebiet durch die von J. Krames [7, 10] mehr oder weniger zufällig entdeckte konstant gedrahte Cayleysche *Fläche 3. Grades*, von der H. Brauner [1] nachweisen konnte, daß sie die einzige (reelle) kubische Fläche mit dieser Eigenschaft ist. In der Folge haben dann H.

Brauner [2, 4] und O. Giering [6] auch fast alle konstant gedrahten *Regelflächen 4. Grades* ermittelt. Den Schlüssel bot dabei eine systematische Diskussion der torsalen, der uneigentlichen und der isotropen Erzeugenden, die bei einer analytischen Regelfläche festen Dralls bestimmten, in [1] aufgestellten Bedingungen genügen müssen. Einen Überblick über die bis dahin erzielten Resultate gibt ein umfassender Bericht [5] von H. Brauner sowie die Abhandlung [6] von O. Giering.

Inzwischen hat die Untersuchung [12] des Verfassers über Regelflächen mit oskulierendem Striktionsband gezeigt, daß unter diesen Flächen jene mit hyperoskulierendem Striktionsband durch konstanten Drall gekennzeichnet sind; das Striktionsband hat dann ebenfalls festen, und zwar den entgegengesetzten Drall. Eine weitere Arbeit [13] betrifft die Flächen festen Dralls mit konstant gedrahtem Striktionsband überhaupt; bei solchen Flächenpaaren liegt im allgemeinen bloß Berührung längs der (gemeinsamen) Striktionslinie vor.

Besonders hinzuweisen wäre noch auf die von E. Kruppa [8] eingeführten „*verallgemeinerten Böschungsfächen*“, das sind windschiefe Regelflächen konstanten Dralls, deren Erzeugenden gegen eine waagrecht gedachte Bezugsebene gleich geneigt sind. Für diese, nach H. Brauner [4] von einer beliebigen Böschungstorse Φ_0 durch Querverschiebung aller Erzeugenden g_0 um dasselbe Stück e ableitbaren Flächen Φ , wurde in [14] eine einfache kinematische Erzeugung dargelegt: Man lasse eine Ebene ε auf einem beliebigen lotrechten Zylinder Γ rollen und nehme dabei eine schräge, zu ε parallele Gerade g mit.

Im Hinblick darauf, daß die vorhin erwähnten Flächen 3. und 4. Grades durchwegs Gewindelflächen sind, d. h. einem linearen Strahlkomplex (oder sogar mehreren) angehören, werden in der vorliegenden Mitteilung *sämtliche Gewindelflächen festen Dralls* $p \neq 0$ bestimmt. Das Problem läßt sich auf eine Quadratur zurückführen, in die eine willkürliche Skalarfunktion eingeht. Nach passender Wahl derselben gelangt man in explizit auswertbaren Fällen zu neuen Beispielen konstant gedrahter Flächen, unter denen sich auch beliebig viele algebraische finden. Grundsätzlich ist dabei zwischen regulären und

singulären Gewinden zu unterscheiden. — Die Flächen, die in zwei (und damit in ∞^1) Gewinden enthalten sind, also die *Netzflächen* konstanten Dralls, bleiben einer eigenen Untersuchung vorbehalten.

2. Drallformel

Eine Regelfläche Φ des zugrundegelegten dreidimensionalen euklidischen Raumes kann in Parameterform bei vektorieller Schreibweise angesetzt werden durch

$$\mathfrak{X}(u, v) = \mathfrak{x}(u) + v \cdot \mathfrak{g}(u). \quad (2.1)$$

Die stetig differenzierbaren Funktionen $\mathfrak{x}(u)$ und $\mathfrak{g}(u)$ beschreiben eine *Leitkurve* l ($v = 0$) bzw. die (veränderliche) Richtung der Erzeugenden g von Φ . Aus den partiellen Ableitungen

$$\mathfrak{X}_u = \dot{\mathfrak{x}} + v \dot{\mathfrak{g}}, \quad \mathfrak{X}_v = \mathfrak{g}, \quad (2.2)$$

wobei der Punkt die Ableitung nach u bezeichnet, erhält man den *Normalenvektor*

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{X}_u \times \mathfrak{X}_v = \mathfrak{p} + v \mathfrak{q} \text{ mit } \mathfrak{p} = \dot{\mathfrak{x}} \times \mathfrak{g}, \quad \mathfrak{q} = \dot{\mathfrak{g}} \times \mathfrak{g}, \quad (2.3)$$

$\mathfrak{q} \neq 0$ vorausgesetzt.

Die in v lineare Abhängigkeit (2.3) weist auf die *Berührungskorrelation* (1.1) hin. Mit $v \rightarrow +\infty$ erkennt man in $\mathfrak{q}$ den Normalenvektor der asymptotischen Ebene τ_u der zum Parameterwert u gehörigen Erzeugenden g . Die zu τ_u normale Zentralebene τ_0 berührt im Punkt $v_0 = (\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{q}) / \mathfrak{q}^2$ und hat den Normalenvektor $\mathfrak{n}_0 = \mathfrak{p} + v_0 \mathfrak{q}$. Denkt man sich alle Normalenvektoren $\mathfrak{n}$ längs g in den Kehlpoint P_0 ($\mathfrak{X}_0 = \mathfrak{x} + v_0 \mathfrak{g}$) verlegt, so erfährt die Flächennormale, wenn man von $P_0(u, v_0)$ längs g zu einem anderen Punkt $P(u, v)$ um das Stück $s = (v - v_0) \cdot |g|$ fort-schreitet, die Änderung $\mathfrak{n} - \mathfrak{n}_0 = (v - v_0) \mathfrak{q}$. Wegen $\mathfrak{n}_0 \perp \mathfrak{q}$ gilt daher für den Drehwinkel $\sigma = \angle \mathfrak{n}_0 \mathfrak{n}$ die Beziehung

$$\operatorname{tg} \sigma = \frac{(v - v_0) |q|}{|\mathfrak{n}_0|} = \frac{s |q|}{|g| \cdot |\mathfrak{n}_0|}. \quad (2.4)$$

Bedenkt man, daß im Falle eines rechtsgewundenen Flächenstreifens das orthogonale Dreibein $\mathfrak{n}_0, \mathfrak{q}, \mathfrak{g}$ ein rechtshändiges ist, so erhält man für den dann negativen *Drall* $p = -s \cot \sigma$ den Wert $p = -(\mathfrak{n}_0, \mathfrak{q}, \mathfrak{g}) / \mathfrak{q}^2$, und unter Beachtung von $\mathfrak{n}_0 \times \mathfrak{q} = \mathfrak{p} \times \mathfrak{q}$ schließlich die allgemeine gültige Formel

$$p = -\frac{(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{g})}{\mathfrak{q}^2} = \frac{(\mathfrak{g}, \dot{\mathfrak{g}}, \dot{\mathfrak{x}})}{(\mathfrak{g} \times \dot{\mathfrak{g}})^2} \mathfrak{g}^2. \quad (2.5)$$

Sie steht in Einklang mit der einschlägigen, von E. Kruppa [9, S. 63] unter der Annahme eines normierten Richtungsvektors $\mathfrak{g} = \mathfrak{e}$ mit $\mathfrak{e}^2 = 1$ hergeleiteten Formel $p = (\mathfrak{e}, \dot{\mathfrak{e}}, \dot{\mathfrak{x}}) / \mathfrak{e}^2$.

3. Gewindeflächen

In metrischer Auffassung besteht ein *reguläres Gewinde* $\mathfrak{G}$ bekanntlich aus den ∞^3 Bahnnormalen einer euklidischen *Schraubung*. Zu jedem Raumpunkt gehört dabei ein ganzes Strahlbüschel von ∞^1 Bahnnormalen, und jeder Gewindestrahl ist Bahnnormale aller seiner Punkte. Offenbar erhält man auch, von den ∞^2 Achsennormalen abgesehen, sämtliche Gewindestrahlen, wenn man jedem Raumpunkt bloß seine *Bahnbinormale* zuweist. Macht man die Schraub- und Gewindeachse zur z -Achse eines kartesischen Koordinatensystems $(O; x, y, z)$, so hat ein Punkt $G(x, y, z)$ den Bahntangentenvektor $(-y, x, b)$, wobei b den Schraubparameter bezeichnet; die Binormale hat mithin den Richtungsvektor $(y, -x, r^2/b)$ mit $r^2 = x^2 + y^2$.

Eine in $\mathfrak{G}$ enthaltene *Gewindefläche* Φ kann demnach im allgemeinen durch die von den achsen nächsten Punkten G ihrer Erzeugenden g erfüllte *Leitlinie* l festgelegt werden, sofern sie nicht durchwegs aus Achsennormalen besteht. Unter Ausschluß dieser „aufrechten Konoide“ (vgl. Abschnitt 8) werden mithin die übrigen Gewindeflächen bei Verwendung von Zylinderkoordinaten r, u, z mit dem Ansatz (2.1) erfaßt, wenn man — wie es sich schon in [15] bewährt hat — den Leitvektor $\mathfrak{x}$ durch

$$\mathfrak{x}: x = r(u) \cos u, \quad y = r(u) \sin u, \quad z = z(u) \quad (3.1)$$

und den Richtungsvektor $\mathbf{g}$ durch

$$\mathbf{g}: \xi = -\sin u, \eta = \cos u, \zeta = r/a \quad (3.2)$$

darstellt. In der Folge sei $a = -b > 0$ angenommen, um über ein (zu einer Linksschraubung gehöriges) „Rechtsgewinde“ $\mathfrak{G}$ zu verfügen; dessen Strahlen sind gegenüber der Achse rechtsgewunden, soweit sie die Achse nicht treffen (was unter rechtem Winkel geschieht).

Für den *Drall* einer Flächenerzeugenden ergibt sich dann durch Anwendung der Formel (2.5) nach kurzer Rechnung der Ausdruck

$$p = \frac{a^2 + r^2}{a} \cdot \frac{a\dot{z} + \dot{r}^2 - r^2}{a^2 + \dot{r}^2 + r^2}. \quad (3.3)$$

Demzufolge gilt

Satz 1: Die von den aufrechten Konoiden verschiedenen Gewindeflächen festen Dralls $p \neq 0$ sind bei Verwendung des Ansatzes (2.1) mit (3.1) und (3.2) gekennzeichnet durch die Differentialgleichung

$$(r^2 + a^2)(\dot{r}^2 - r^2 + a\dot{z}) = ap(\dot{r}^2 + r^2 + a^2). \quad (3.4)$$

Die hier ausgeschlossenen aufrechten Konoide festen Dralls p erweisen sich, wie unmittelbar einzusehen, als Schraubwendelflächen vom Parameter p (Abschnitt 8).

Die Rückkehr zu den kartesischen Koordinaten $x = r \cos u$, $y = r \sin u$ würde zeigen, daß die Leitkurve l (3.1) einer gewissen Mongeschen Differentialgleichung genügt.

4. Beispiele für Gewindeflächen festen Dralls

Mit der Vorgabe der wählbaren Funktion $r(u)$ wird der *Grundriß* l' der Leitkurve l (3.1) durch seine Polargleichung $r = r(u)$ vorgeschrieben. Da die Erzeugendengrundrisse g' normal zu den Radiusvektoren OG' sind, bedeutet $r(u)$ gleichzeitig die Stützfunktion des *scheinbaren Umrisses* q' der Gewindefläche Φ bei Normalprojektion auf die xy -Ebene; l' ist mithin die Fußpunktcurve von q' bezüglich des Ursprungs O .

Mit der Funktion $r(u)$ kennt man aber auch das durch (3.2) erklärte, auf dem Drehzylinder $\xi^2 + \eta^2 = 1$ verlaufende „*zylindrische Erzeugendenbild*“ $\mathbf{g} = \mathbf{g}(u)$ der Fläche Φ , und damit deren von O ausstrahlenden *Richtkegel*. Dessen mit Φ gemeinsame Fernkurve f hängt geometrisch vermöge der mit dem Gewinde $\mathfrak{G}$ verknüpften Nullkorrelation mit dem achsenparallelen Tangentialzylinder Θ von Φ zusammen, der die Umrisslinie q' zur Basis hat.

Die nach Wahl von $r(u)$ zur vollständigen Festlegung der Fläche noch fehlende Kotenfunktion $z(u)$ ergibt sich auf Grund von (3.4) durch das Integral

$$z = pu + \frac{1}{a} \int_a^u (r^2 - \dot{r}^2) du + p \int \frac{\dot{r}^2 du}{r^2 + a^2}. \quad (4.1)$$

Beispiel 1. Die Annahme $r = c = \text{const}$ ($l' = q' = \text{Kreis um } O$) führt mit $\dot{r} = 0$ über (4.1) bei Unterdrückung der unwesentlichen Integrationskonstante auf

$$z = bu \text{ mit } b = p + \frac{c^2}{a}. \quad (4.2)$$

Die Leitkurve l ist mithin bei $b \neq 0$ eine Schraublinie, und Φ ist eine *offene Regelschraubfläche*. Für $b = 0$, also $p = -c^2/a$, reduziert sich l auf den Kreis l' , und Φ ist ein *einschaliges Drehhyperboloid* (mit der vom Kehlkreisradius c unabhängigen imaginären Halbachse ip)².

Beispiel 2. Die Annahme $r = a \cdot \text{sh } u$ ($l' = \text{Differenzenspirale, } q' = \text{Parazykloide}$) führt über $\dot{r} = a \cdot \text{ch } u$ gleichfalls auf eine lineare Kotenfunktion

$$z = bu \text{ mit } b = 2p - a. \quad (4.3)$$

Die Leitlinie l verläuft mithin für $b \neq 0$ auf eine Schraubwendelfläche, im Sonderfall $p = a$ übrigens als 45°-Loxodrome der Erzeugendenschar

² Diese Tatsache ist von entscheidender Bedeutung für die verallgemeinerten Böschungsf lächen; vgl. [14].

und daher als Krümmungslinie. Für $b = 0$ hingegen, also für $p = a/2$, wird l eben und mit l' identisch.

Beispiel 3. Die Annahme $r = c/\cos u$ ($l' = \text{Gerade}$, $q' = \text{Parabel}$) bedingt ebenfalls eine ebene Leitkurve l (in der achsenparallelen Ebene $x = c$). Das Integral (4.1) läßt sich zwar elementar auswerten, liefert aber kein besonders interessantes Resultat.

Beispiel 4. Die Frage nach den allgemeinsten Leitkurven in achsennormalen Ebenen $z = \text{const}$ führt über die Differentialgleichung (3.4) mit $\dot{z} = 0$ auf das für gewöhnlich elliptische Integral

$$u = \int \sqrt{\frac{r^2 + a^2 - ap}{(r^2 + a^2)(r^2 + ap)}} dr. \quad (4.4)$$

Nur in den Sonderfällen $p = a$ und $p = a/2$ ergeben sich die elementaren Lösungen $r^2 = a^2 (e^{2u} - 1)$ bzw. $r = a \cdot \text{sh } u$ (Beispiel 2).

Daß es neben den angeführten transzendenten Lösungen (deren Anzahl sich beliebig vermehren ließe) auch nichttriviale algebraische gibt, wird durch die in der Einleitung erwähnten Flächen 3. und 4. Grades belegt, die ja durchwegs Gewindeflächen sind. Ein einschlägiges Beispiel wird sich im nächsten Abschnitt einstellen.

5. Gewinde-Böschungsfächen

Eine Böschungsfäche Φ [8] besitzt als Richtkegel einen Drehkegel, also als Fernkurve f einen Kegelschnitt, der den absoluten Kegelschnitt doppelt berührt. Ist Φ in einem regulären Gewinde $\mathfrak{G}$ enthalten, so entspricht vermöge der mit diesem verknüpften Nullkorrelation dem genannten Fernkreis f ein achsenparalleler quadratischer Tangentialzylinder Θ von Φ , welcher den nullteiligen Drehzylinder $x^2 + y^2 + a^2 = 0$ längs zweier Erzeugenden berührt. Der Leitkurvengrundriß l' wird daher als Fußpunktcurve des Basiskegelschnitts q' von Θ im allgemeinen eine bizirkuläre Quartik sein, die sich in Sonderfällen auf eine zirkuläre Kubik reduzieren kann, wenn man den erledigten Fall eines Kreises $l' = q'$ (Beispiel 1) beiseite läßt.

Wird die Lotrichtung durch den Einheitsvektor $\mathfrak{h} = (0, \sin \gamma, \cos \gamma)$ festgelegt, und bezeichnet β den (konstanten) Neigungswinkel der

Flächenerzeugenden g gegen eine zu $\mathfrak{h}$ normale Bezugsebene, dann folgt mit Beachtung von (3.2) aus $\mathfrak{h} \cdot g\mathfrak{h} = (\pi/2) - \beta$ über $(g\mathfrak{h})^2 = g^2 \sin^2 \beta$ die Bedingung

$$r^2 (\sin^2 \beta - \cos^2 \gamma) - 2ra \sin \gamma \cos u + a^2 (\sin^2 \beta - \sin^2 \gamma \cos^2 u) = 0. \quad (5.1)$$

Mit der durch Auflösung dieser quadratischen Gleichung zu gewinnenden Funktion $r(u)$ hätte man in das Integral (4.1) einzugehen, um die Knotenfunktion $z(u)$ zu erhalten.

Der Kürze und Einfachheit halber sei hier nur der Sonderfall $\beta + \gamma = \pi/2$ betrachtet; er bedeutet, daß der Böschungsfernkreis f von der Gewindeachse getroffen wird. In diesem Fall reduziert sich die Gleichung (5.1) auf eine lineare mit der Lösung

$$r = \frac{a}{2} \left(\frac{b}{\cos u} - \frac{\cos u}{b} \right) \text{ mit } b = \text{tg } \beta. \quad (5.2)$$

Die Umrißkurve q' von Φ ist jetzt eine Parabel, der Leitkurvengrundriß l' mithin eine zirkuläre Kubik (insonderheit die Kissoide des Diokles für $b = 1$).

Mit der Annahme (5.2) vereinfacht sich die Differentialgleichung (3.4) beträchtlich, weil sich $r^2 + a^2$ und $r^2 + a^2$ bloß durch den Faktor $\cos^2 u$ unterscheiden. Man erhält zunächst

$$\dot{z} = \left(p - \frac{a}{2} + \frac{ab^2}{4} \right) \frac{1}{\cos^2 u} - \frac{ab^2}{4} \frac{\sin^2 u}{\cos^4 u} + \frac{a}{4b^2} \cos 2u, \quad (5.3)$$

und schließlich nach Integration:

$$z = \left(p - \frac{a}{2} + \frac{ab^2}{4} \right) \text{tg } u - \frac{ab^2}{12} \text{tg}^3 u + \frac{a}{8b^2} \sin 2u. \quad (5.4)$$

Nach Vornahme der Substitution $\text{tg } u = t$ erhält die Leitkurve l (3.1) die rationale Darstellung

$$\begin{aligned} x &= \frac{ab}{2} - \frac{a}{2b(1+t^2)}, \quad y = \frac{ab}{2}t - \frac{at}{2b(1+t^2)}, \\ z &= \left(p - \frac{a}{2} + \frac{ab^2}{4}\right)t - \frac{ab^2}{12}t^3 + \frac{at}{4b^2(1+t^2)}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Hieraus ist zu ersehen, daß es sich um eine *rationale Quintik* handelt, die im Achsenfernpunkt einen Doppelpunkt besitzt.

Die Schar der asymptotischen Ebenen der durch die Leitkurve l festgelegten Böschungsfläche Φ ist gemäß Abschnitt 2 durch (9, 9, $\mathfrak{X} - \mathfrak{x}$) = 0 bestimmt. Mit Benützung von (3.1), (3.2), (5.2) und (5.5) findet man über

$$\mathfrak{g} \times \dot{\mathfrak{g}} = \left(bt, \frac{1}{2}\left(b^2 - b + \frac{1}{b}\right), 1\right) \quad (5.6)$$

nach einiger Rechnung die Darstellung

$$2btX + \left(b^2 + b - \frac{1}{b}\right)Y + 2Z = (2p - a + ab^2)t + \frac{ab^2}{3}t^3. \quad (5.7)$$

Hieraus ist abzulesen, daß die von dieser Ebenenschar eingehüllte *asymptotische Torse* Φ_0 *kubisch* ist. Infolgedessen handelt es sich bei den hier gefundenen ∞^3 Gewinde-Böschungsflächen Φ um die von H. Brauner [4] entdeckten und beschriebenen konstant gedrehten *Regelflächen* 4. Grades, die eine Doppelkubik aufweisen und daher zur III. Sturmischen Art gehören [10]. Nach [14] kann jede dieser Böschungsflächen als Bahnfläche einer Geraden g erzeugt werden, wenn eine zu g und h parallele Ebene auf einem festen Zylinder mit der Erzeugendenrichtung h rollt, der eine Tschirnhaus-Kubik zur Basis hat.

Eine vereinfachte Darstellung der Fläche Φ ergibt sich, wenn anstelle der Leitkurve 5. Ordnung l (5.5) die Berührungslinie 3. Ordnung q des achsenparallelen Tangentialzylinders Θ verwendet wird, dessen Basisparabel q' durch die Stützfunktion (5.2) bestimmt ist. Die betreffende Darstellung lautet:

$$\begin{aligned} X &= \frac{a}{2} \left(b - \frac{1}{b} - bt^2\right) - st, \quad Y = abt + s, \\ Z &= \left(p - \frac{a}{2} + \frac{ab^2}{2}\right)t + \frac{ab^2}{6}t^3 + \frac{s}{2} \left(b^2 + b - \frac{1}{b}\right). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Die aufwendigere Untersuchung des allgemeinen Falles (5.1) mag einer anderen Gelegenheit vorbehalten bleiben.

6. Regelflächen mit eigentlicher Leitgerade

Gewinde mit verschwindendem Parameter ($a = 0$) sind als singular anzusehen. Ein solches „*Strahlgebüsch*“ $\mathfrak{G}_0$ besteht aus den ∞^3 Treffgeraden einer festen Achse. Ist dieselbe eigentl., so kann $\mathfrak{G}_0$ als die Menge der Bahnnormalen einer *Drehung* um diese Achse aufgefaßt werden. Die in $\mathfrak{G}_0$ enthaltenen *Gebüschflächen* sind also die Regelflächen mit der Achse als *Leitgerade* l und zwangsläufig windschief, wenn man Kegel, die ihre Spitze auf l haben, und Strahlenscharen in Ebenen durch l ausschließt.

Zur analytischen Darstellung einer solchen Fläche Φ nach dem Muster (2.1) mögen die Ansätze (3.1) und (3.2) für die Vektoren $\mathfrak{x}(u)$ und $\mathfrak{g}(u)$ folgendermaßen modifiziert werden:

$$\mathfrak{x}: x = 0, \quad y = 0, \quad z = z(u) \quad (6.1)$$

bzw.

$$\mathfrak{g}: \xi = \cos u, \quad \eta = \sin u, \quad \zeta = \operatorname{sh} w(u). \quad (6.2)$$

Die Anwendung der Formel (2.5) liefert dann für den *Drall* den Ausdruck

$$p = \frac{\dot{z}}{1 + \dot{w}^2}. \quad (6.3)$$

Für die konstant gedrehten Gebüschflächen gilt daher

Satz 2: Die Regelflächen, welche die z -Achse als Leitgerade haben und konstanten Drall $p \neq 0$ besitzen, sind bei Verwendung des Ansatzes (2.1) mit (6.1) und (6.2) gekennzeichnet durch die Differentialgleichung

$$\dot{z} = p(1 + \dot{w}^2). \quad (6.4)$$

Bei Vorgabe der wählbaren Hilfsfunktion $w(u)$, welche mit dem zylindrischen Erzeugendenbild (6.2) den Richtkegel der Fläche festlegt, ist auch das sphärische Erzeugendenbild

$$\xi^* = \frac{\cos u}{\operatorname{ch} w}, \eta^* = \frac{\sin u}{\operatorname{ch} w}, \zeta^* = \operatorname{th} w \quad (6.5)$$

bekannt. Die für die Fläche benötigte Kotenfunktion $z(u)$ ist durch die Quadratur

$$z = p \int (1 + \dot{w}^2) du \quad (6.6)$$

zu gewinnen. **Beispiel 5.** Die Annahme $w = c = \text{const}$ führt über (6.6) auf $z = pu$. Die zugehörigen Flächen Φ sind mithin *geschlossene Regelschraubflächen*, die wegen der gleichen Neigung aller Erzeugenden zu den Böschungsf lächen zählen. Ihr konstanter Drall p ist mit dem Schraubparameter identisch und von der Erzeugendenneigung unabhängig. Mit $c = 0$ stellt sich die Wendelfläche ein.

Beispiel 6. Die Annahme $w = nu$ mit $n = \text{const}$ liefert über $z = (n^2 + 1)pu$ ebenfalls transzendente Flächen Φ . Ihr sphärisches Erzeugendenbild (6.5) ist eine Kugelloxodrome. Hieraus kann nach [11] gefolgert werden, daß die Gratlinie der asymptotischen Torse Φ_0 pseudogeodätische Linie eines Zylinders ist; dessen Basis ist eine durch die Stützfunktion $p/\operatorname{sh} nu$ bestimmte Spirale.

7. Algebraische Beispiele

Die Vorgabe der Kotenfunktion $z(u)$ in (6.4) legt den Streifen der konstant gedrahten Gebüschfläche Φ längs der Leitgeraden l fest. Die fehlende Hilfsfunktion $w(u)$ ist dann bestimmt durch

$$w = \int \sqrt{(\dot{z}/p) - 1} \cdot du. \quad (7.1)$$

Die Annahme

$$z = a \cdot \operatorname{tg} nu \quad (7.2)$$

etwa, die auf $n > 0$ beschränkt werden darf, was dann aus Realitätsgründen $p > 0$ verlangt, führt auf

$$w = \int \sqrt{\frac{na}{p}(1 + \operatorname{tg}^2 nu) - 1} \cdot du. \quad (7.3)$$

Dieses stets elementar auswertbare Integral liefert beispielsweise für $n = 1$ sämtliche in einem parabolischen Strahlennetz enthaltenen Flächen festen Dralls p . Unter ihnen sind insbesondere für $p = a/4$ die Cayleysche Fläche 3. Grades von J. Krames [7] und für $p = 4a$ die Mohrmannsche Fläche 4. Grades von H. Brauner [2] zu finden. Hierauf soll jedoch erst in der angekündigten Mitteilung über die konstant gedrahten Netzflächen näher eingegangen werden.

Eine beträchtliche Vereinfachung erfährt das Integral (7.3) unter der Annahme $p = na$. Man erhält dann

$$w = \int \operatorname{tg} nu \cdot du = -\frac{1}{n} \ln \cos nu - \ln c, \quad (7.4)$$

und damit gemäß (6.2)

$$\zeta = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{c} (\cos nu)^{-1/n} - c (\cos nu)^{1/n} \right]. \quad (7.5)$$

Für rationale Werte von $n = p/a$ ergeben sich durchwegs *algebraische Regelflächen* Φ_n , und zwar jeweils eine einparametrische Schar, abhängig von der Integrationskonstante c . Faßt man ξ, η, ζ als homogene Koordinaten in der Fernebene auf, dann wird die *Fernkurve* f der Fläche Φ_n gemäß (6.2) beschrieben durch

$$\xi : \eta : \zeta = \cos u : \sin u : \operatorname{sh} w(u), \quad (7.6)$$

wobei $w(u)$ durch (7.4) bestimmt ist. Die Frage nach den Schnittpunkten von f mit dem absoluten Kegelschnitt $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 0$ führt dann auf die Gleichung $\text{ch}^2 w(u) = 0$ mit lauter Doppelwurzeln: Die Fernkurve f der Fläche Φ_n weist daher mit dem absoluten Kegelschnitt bloß Berührungen oder Oskulationen auf.

Beispiel 7. Die einfachste Annahme $n = 1$ liefert gemäß (7.5) zunächst

$$\zeta = \frac{1 - c^2 \cos^2 u}{2c \cos u}, \quad (7.7)$$

so daß sich nach Einführung des rationalisierenden Parameters $t = \text{tg } u$ für die Fernkurve f (7.6) die Darstellung

$$\xi : \eta : \zeta = 2c : 2ct : t^2 + 1 - c^2 \quad (7.8)$$

ergibt. f ist also eine Kurve 2. Ordnung, und da sie den absoluten Kegelschnitt (doppelt) berührt, ein Fernkreis. Die Fläche Φ_1 gehört mithin zu den Böschungsfächen (Abschnitt 5), und weil sie wegen $n = 1$ einem parabolischen Netz angehört, handelt es sich hier um ein einschaliges Drehhyperboloid.

Beispiel 8. Die Annahme $n = 1/2$ führt zunächst auf

$$\zeta = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{c \cos^2(u/2)} - c \cos^2(u/2) \right], \quad (7.9)$$

und Rationalisierung mittels $\text{tg}(u/2) = t$ ergibt

$$\xi : \eta : \zeta = 2c(1 - t^2) : 4ct : (t^2 + 1)^2 - c^2. \quad (7.10)$$

Hieraus ist zu entnehmen, daß die Fernkurve f der Fläche $\Phi_{1/2}$ eine rationale Quartik ist. Mit Benützung von $z = at$ erhält man nach dem Muster (2.1) die folgende Parameterdarstellung der Fläche $\Phi_{1/2}$:

$$X = (1 - t^2)s, \quad Y = 2ts, \quad Z = at + (t^4 + 2t^2 + 1 - c^2)s/2c. \quad (7.11)$$

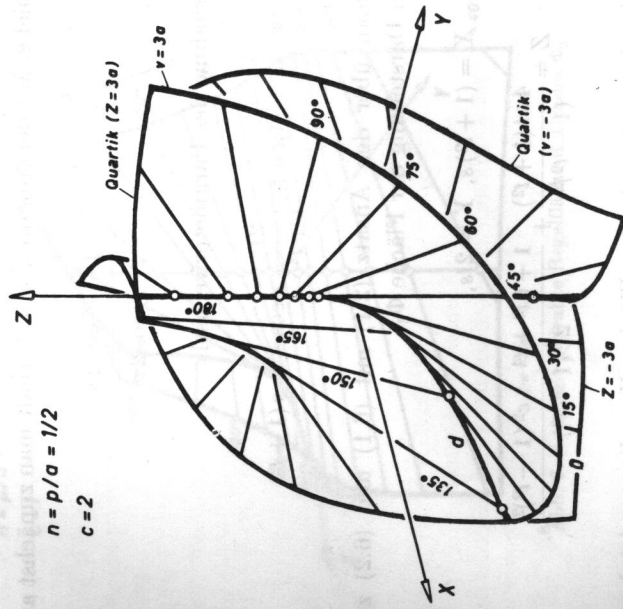


Abb. 1. Konstant gedrahte Regelfläche 4. Grades $\Phi_{1/2}$

Mittels der daraus berechneten Plücker-Koordinaten der Erzeugenden $t = \text{const}$ ist dann festzustellen, daß $\Phi_{1/2}$ eine rationale Regelfläche 4. Grades ist. Die Untersuchung der Doppelkurve d , auf der jeweils die Erzeugenden t und $-1/t$ zusammentreffen, erweist dieselbe als Kegelschnitt (in der Ebene $cX + 2Z = 0$), so daß $\Phi_{1/2}$ zu den biquadratischen Regelflächen VI. Art nach Sturm gehört. [10]. Die Schar dieser konstant gedrahten Flächen $\Phi_{1/2}$ (mit dem Drall $p = a/2$) wurde von O. Giering [6] entdeckt und beschrieben. — Abb. 1 zeigt eine anschauliche Darstellung der zu $c = 2$ gehörigen Fläche, die durch eine Doppelparabel d ausgezeichnet ist. Sie wurde durch zwei Schichten ebenen $Z = \pm h$ sowie durch einen koaxialen Drehzylinder $X^2 + Y^2 = v^2$ abgeschnitten; der letztgenannte Schnitt zerfällt in zwei rationale Quartiken, gekennzeichnet durch $(t^2 + 1)s = \pm v$.

Beispiel 9. Mit der Annahme $n = 2$ erhält man zunächst auf Grund von (7.5)

$$\zeta = \frac{1 - c^2 \cos 2u}{2c \sqrt{\cos 2u}}. \quad (7.12)$$

Nach Vornahme des Parameterwechsels

$$\operatorname{tg} u = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad v \cos u = s(1 + t^2) \quad (7.13)$$

gelangt man über den Ansatz (2.1) mit (6.1) und (6.2) zur nachstehenden Darstellung der Fläche Φ_2 :

$$\begin{aligned} X &= (1 + t^2)s, \quad Y = 2ts, \\ Z &= \frac{4at(1 + t^2)}{(1 - t^2)^2} + \frac{1 + 6t^2 + t^4 - c^2(1 - t^2)^2}{2c(1 - t^2)}s. \end{aligned} \quad (7.14)$$

Anhand der daraus berechneten Plücker-Koordinaten ist dann festzustellen, daß Φ_2 eine *rationale Regelfläche 6. Grades* ist. Die Fläche ist bezüglich aller drei Koordinatenachsen symmetrisch und hat den konstanten Drall $p = 2a$. Durch jeden eigentlichen Punkt der Leitgeraden l ($x = y = 0, z = a \operatorname{tg} 2u$) gehen vier Erzeugende, paarweise auf zwei orthogonale Ebenen verteilt, jedoch nur in einer reell; in jeder Ebene durch l verlaufen jeweils zwei Erzeugende, spiegelbildlich zu l angeordnet. Das *Ferngebilde* der Fläche Φ_2 besteht aus den beiden uneigentlichen Torsalerzeugenden $t = \pm 1$ (mit den Torsalebene $Y = \pm X$) sowie einer rationalen Quartik f , die den absoluten Kegelschnitt an vier Stellen berührt, falls $c^2 \neq 1$; für $c^2 = 1$ rücken dieselben paarweise zu zwei Hyperoskulationen in den absoluten Punkten der Ebene $Z = 0$ zusammen. — Diese Spielart von Φ_2 ist in Abb. 2 dargestellt; sie ist auch dadurch ausgezeichnet, daß die beiden sonst getrennten Doppel erzeugenden ($\cos 2u = 1/c^2$) in der X -Achse zusammengerückt sind, längs welcher, ebenso wie längs der Z -Achse, Selbstberührung zweier Flächenmäntel eintritt. Das sphärische Erzeugendenbild (6.5) ist übrigens ein Vivianisches Fenster.

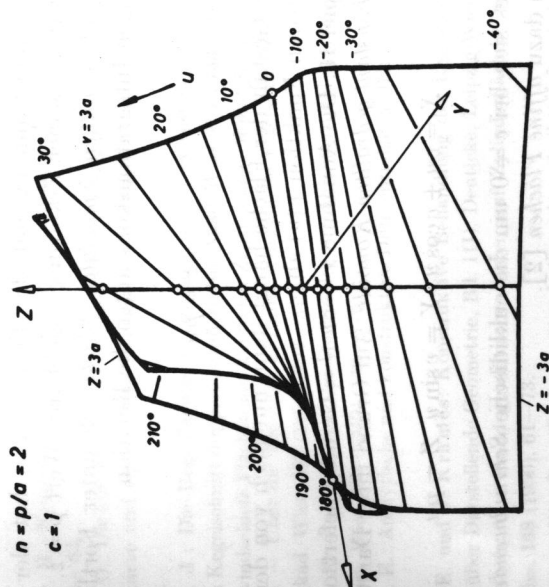


Abb. 2. Konstant gedrahte Regelfläche 6. Grades Φ_2

8. Konoidale Regelflächen

Ist die Achse des Strahlgebüsche $\mathfrak{G}_0$ im Unendlichen, dann sind sämtliche Erzeugenden einer in $\mathfrak{G}_0$ enthaltenen Regelfläche Φ parallel zu einer festen *Richtebene* π ; solche Flächen heißen „*konoidal*“. Der Vollständigkeit halber soll im Rahmen der vorliegenden Untersuchung auch dieser zurückgestellte Fall kurz behandelt werden, wiewohl er von H. Brauner in [2] schon erledigt wurde.

Zur analytischen Erfassung der *konoidalen Regelflächen* Φ wird zweckmäßig die Richtebene π mit der Koordinatenebene $Z = 0$ identifiziert, und als Leitkurve l etwa die Schnittlinie von Φ mit der Ebene $Y = 0$ verwendet. Die in der Darstellung (2.1) aufscheinenden Vektoren $\mathfrak{x}(u)$ und $\mathfrak{g}(u)$ können dann angesetzt werden durch

$$\mathfrak{x}: x = x(u), \quad y = 0, \quad z = z(u) \quad (8.1)$$

bzw.

$$\mathfrak{g}: \xi = \cos u, \quad \eta = \sin u, \quad \zeta = 0. \quad (8.2)$$

In Übereinstimmung mit der Formel (2.5) hat der *Drall* den unmittelbar aus seiner Erklärung angebbaren Wert $p = \dot{z}$, woraus für die *konstant gedrahten konoidalen Flächen* Φ unter Fortlassung der überflüssigen Integrationskonstanten die Relation

$$z = pu \quad (8.3)$$

folgt. Die Gestalt der Fläche hängt dann nur noch von der Annahme der wählbaren Funktion $x(u)$ ab.

Beispiel 10. Die Annahme $x = cu$ ($l = \text{Gerade}$) liefert offenbar die *einzigsten konstant gedrahten Konoide*. Auf Grund ihrer Darstellung

$$X = cu + v \cos u, \quad Y = v \sin u, \quad Z = pu \quad (8.4)$$

handelt es sich bei $c = 0$ um die euklidische *Schraubwendelfläche*, bei $c \neq 0$ um dazu *affine Flächen* [2].

Offensichtlich kann es *keine algebraischen Beispiele* unter den konoidalen Flächen festen Dralls $p \neq 0$ geben, weil durch jeden Punkt der uneigentlichen Leitgeraden stets abzählbar unendlich viele Erzeugende gehen, wie immer auch die (algebraische) Funktion $x(u)$ aussehen mag³.

Literatur

- [1] Brauner, H.: Die Strahlfläche 3. Grades mit konstantem Drall. Monatsh. Math. **64** (1960), 101—109.
- [2] Brauner, H.: Die konstant gedrahtte Netzfläche 4. Grades. Monatsh. Math. **65** (1961), 53—73. — Die konstant gedrahten windschiefen Flächen 4. Grades mit reduzierbarer Fernkurve. Math. Z. **82** (1963), 420—433.
- [3] Brauner, H.: Eine einheitliche Erzeugung konstant gedrahter Strahlflächen. Monatsh. Math. **65** (1961), 301—309.
- [4] Brauner, H.: Die verallgemeinerten Böschungsfächen. Math. Ann. **143** (1961), 431—439. — Die windschiefen Flächen konstanter konischer Krümmung. Math. Ann. **152** (1963), 257—270.

³ Beim Zeichnen von Abb. 1 stellte sich heraus, daß die Fernkurve f der Fläche $\Phi_{1/2}$ (7.11) etwa im Bereich $-\pi/4 \leq u \leq \pi/4$ (und noch darüber hinaus) fast gerade ist, so daß dieser Abschnitt der algebraischen Fläche angesichts der vorhandenen eigentlichen Leitgerade l nur wenig von einer affinen Schraubwendelfläche abweicht.

- [5] Brauner, H.: Neuere Untersuchungen über windschiefe Flächen. Jber. DMV **70** (1967), 61—85.
- [6] Giering, O.: Die konstant gedrahten windschiefen Flächen 4. Grades mit irreduzierbarer Fernkurve und einer reellen Torsallinie. Sb. Österr. Akad. Wiss. **177** (1968), 257—293.
- [7] Krames, J.: Die Regelflächen 3. Ordnung, deren unendlich ferne Kurve den absoluten Kegelschnitt doppelt oskuliert. Sb. Akad. Wiss. Wien **133** (1924), 65—90. — Über windschiefe Flächen mit konischer Zentraltorse. Monatsh. Math. **65** (1961), 337—350. — Über die konstant gedrahten windschiefe Fläche dritten Grades. Sb. Österr. Akad. Wiss. **187** (1978), 297—312.
- [8] Kruppa, E.: Zur Differentialgeometrie der Strahlflächen und Raumkurven. Sb. Akad. Wiss. Wien **157** (1949), 143—176.
- [9] Kruppa, E.: Analytische und konstruktive Differentialgeometrie. Springer, Wien 1957.
- [10] Müller, E. und J. Krames: Konstruktive Behandlung der Regelflächen (Vorlesungen über Darstellende Geometrie, Bd. III). Deuticke, Leipzig/Wien 1931.
- [11] Wunderlich, W.: Pseudogeodätische Linien auf Zylinderflächen. Sb. Österr. Akad. Wiss. **158** (1950), 61—73.
- [12] Wunderlich, W.: Regelflächen mit oskulierendem Striktionsband. Sb. Österr. Akad. Wiss. **188** (1979), 361—384. — Ruled surfaces with osculating striction scroll. Proc. Coll. Diff. Geom. (Budapest 1979).
- [13] Wunderlich, W.: Regelflächen festen Dralls mit konstant gedrahtem Striktionsband. Czechosl. Math. J. **31** (1981), 457—468.
- [14] Wunderlich, W.: Über verallgemeinerte Böschungsfächen. Rad. Jugosl. Akad. Zagreb (im Druck).
- [15] Wunderlich, W.: Bertrandische Gewindekurvenpaare. Sb. Österr. Akad. Wiss. **190** (1981), 253—272.

Anschrift des Autors: Prof. Dr. W. Wunderlich, Institut für Geometrie, Technische Universität, Gußhausstraße 27, A-1040 Wien.