

Das wirkliche Mitglied Walter WUNDERLICH übersendet eine von ihm selbst verfaßte kurze Mitteilung

„RINGARTIGE WACKELPOLYEDER“

§1. *Wackelpolyeder* sind Vielfache, die von starren, längs der Kanten gelenkig verbundenen ebenen Polygonen berandet sind und eine *infinitesimale Deformation* gestatten. An Beispielen hierfür besteht kein Mangel. Beginnend mit den Wackeloktaedern W. BLASCHKES [1, 3], wurden später wackelige Antiprismen [2, 4], Doppelpyramiden [5], Dodekaeder [6] und Ikosaeder [2, 7] untersucht.

Alle diese Beispiele sind vom topologischen Typus der Kugel, also „Sphären“. Ringartige Wackelpolyeder, also vom Zusammenhang des *Torus*, sind bisher nicht bekannt und sollen in der vorliegenden Mitteilung durch einfache Beispiele belegt werden.

§2. Ein Ringpolyeder soll zunächst aus $n \geq 4$ kongruenten prismatischen Teilen mit deltoidförmigem Querschnitt zusammengesetzt werden (vgl. Abb. 4). Unter Verwendung kartesischer Koordinaten x, y, z gehen wir aus von zwei die z -Achse enthaltenden „Meridianebenen“ μ_1 und μ_2 , die miteinander den Winkel $2\gamma = 2\pi/n$ einschließen. Sie können beschrieben werden durch

$$(1) \quad \beta x \pm \alpha y = 0 \quad \text{mit} \quad \alpha = \cos \gamma, \beta = \sin \gamma, \gamma = \pi/n, n \text{ gerade.}$$

In μ_1 liege das Deltoid $A_1 B_1 C_1 D_1$ mit den Ecken

$$A_1 (\alpha u_1, -\beta u_1, 0), \quad B_1 (\alpha v_1, -\beta v_1, z_1),$$

$$(2) \quad C_1 (\alpha w_1, -\beta w_1, 0), \quad D_1 (\alpha v_1, -\beta v_1, -z_1),$$

in μ_2 das Deltoid $A_2 B_2 C_2 D_2$ mit den Ecken

$$A_2 (\alpha u_2, \beta u_2, 0), \quad B_2 (\alpha v_2, \beta v_2, z_2),$$

$$(3) \quad C_2 (\alpha w_2, \beta w_2, 0), \quad D_2 (\alpha v_2, \beta v_2, -z_2).$$

Wir fassen nun diese acht Punkte als in ihren Meridianebenen *zwangsläufig beweglich* auf. Die Größen u_i, v_i, w_i und z_i seien also bestimmt, nicht näher definierte Funktionen eines Zeitparameters t , von denen wir bloß verlangen, daß für $t = 0$ gleichnamige Funktionen den gleichen Wert annehmen; es sei also

$$(4) \quad u_1(0) = u_2(0) = u, \quad v_1(0) = v_2(0) = v,$$

$$w_1(0) = w_2(0) = w, \quad z_1(0) = z_2(0) = z.$$

In dieser Ausgangslage sind mithin die beiden Deltoidkongruente und beranden dann einen Prismenmantel mit y -parallelen Kanten. Unter der Annahme $0 < u < v < w$ liefert das Prisma bei fortgesetzter Spiegelung an den Ebenen μ_1 und μ_2 ein geschlossenes *Ringpolyeder* mit $e = 4n$ Ecken, $f = 4n$ trapezförmigen Seitenflächen und $k = 8n$ Kanten. Diese Anzahlen genügen naturgemäß der Eulerschen Relation $e + f = k$.

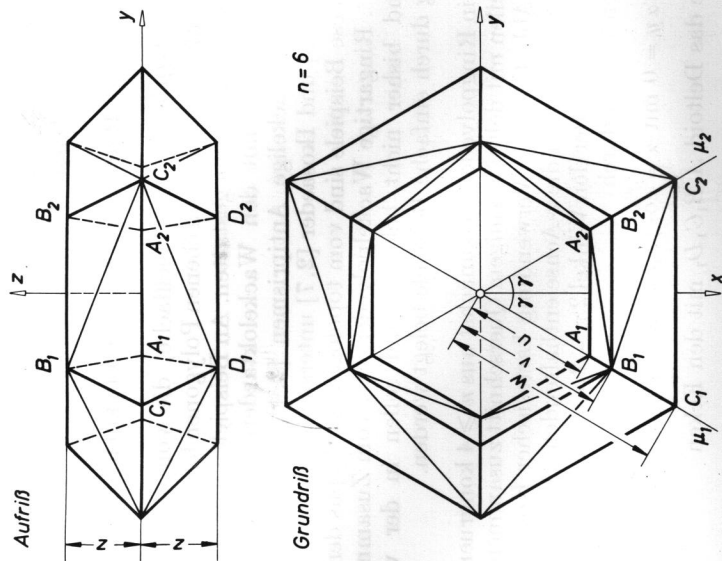


Abb. 1 Secher-Ring in Ausgangslage.

§ 3. Wir verlangen nun, daß gewisse *Entfernungen* zwischen den betrachteten beweglichen Punkten zur Zeit $t = 0$ *stationär* sein sollen, also verschwindende Ableitung nach t haben. Die Distanzstrecken zwischen solchen Punktepaaren könnten dann durch starre Stäbe realisiert werden, ohne die momentane Bewegung zu hindern, sofern die Verbindungen in den vorhandenen Knoten gelenkig ausgeführt sind. Wir betrachten zunächst die Entfernung $A_1 A_2$. Sie berechnet sich

aus

$$(5) \quad A_1 A_2^2 = \alpha^2 (u_1 - u_2)^2 + \beta^2 (u_1 + u_2)^2,$$

und durch Nullsetzen der Ableitung an der Stelle $t = 0$ ergibt sich mit Beachtung von (4) über $4\beta^2 u [\dot{u}_1(0) + \dot{u}_2(0)] = 0$ bei Unterdrückung des Arguments die Bedingung

$$(6) \quad \dot{u}_2 = -\dot{u}_1.$$

Ebenso findet man für eine stationäre Entfernung $C_1 C_2$ die Bedingung

$$(7) \quad \dot{w}_2 = -\dot{w}_1.$$

Für die Deltoidseiten $A_1 B_1$ und $B_1 C_1$, bestimmt durch

$$(8) \quad A_1 B_1^2 = (u_1 - v_1)^2 + z_1^2, \quad B_1 C_1^2 = (v_1 - w_1)^2 + z_1^2,$$

liefert die verschwindende Ableitung die (gleichzeitig auch für die stationären Entfernungen $A_1 D_1$ und $C_1 D_1$ maßgebenden) Ausdrücke

$$(9) \quad \dot{v}_1 = \frac{(v-u)\dot{u}_1 + (w-v)\dot{w}_1}{w-u}, \quad \dot{z}_1 = \frac{(v-u)(w-v)(\dot{u}_1 - \dot{w}_1)}{(w-u)z}.$$

Aus den entsprechenden Formeln für das zweite Deltoid folgt mit Rücksicht auf (6) und (7):

$$(10) \quad \dot{v}_2 = -\dot{v}_1, \quad \dot{z}_2 = -\dot{z}_1.$$

Eine stationäre Entfernung $B_1 B_2$, bestimmt durch

$$(11) \quad B_1 B_2^2 = \alpha^2 (v_1 - v_2)^2 + \beta^2 (v_1 + v_2)^2 + (z_1 - z_2)^2,$$

verlangt (ebenso wie $D_1 D_2$) bloß $\dot{v}_1 + \dot{v}_2 = 0$, was mit (10) bereits erfüllt ist.

§ 4. Da sich bei dem durch die Ableitungsformeln (6), (7), (9) und (10) gekennzeichneten Wackelvorgang die trapezförmigen Mantelflächen verwinden, und weil das aus den bisher betrachteten $8n$ Kanten des Ringpolyeders gebildete Stabwerk mit seinen $4n$ Knoten noch den Deformationsfreiheitsgrad $4n - 6 \geq 10$ hätte, seien zusätzlich *Diagonalsäbe* eingezo-gen.

Wir betrachten etwa die Strecke $A_2 B_1$. Aus

$$(12) \quad A_2 B_1^2 = \alpha^2 (u_2 - v_1)^2 + \beta^2 (u_2 + v_1)^2 + z_1^2$$

folgt durch Ableitung an der Stelle $t = 0$ die Beziehung

$$(13) \quad [\alpha^2 (u - v) + \beta^2 (u + v)] \dot{u}_2 - [\alpha^2 (u - v) - \beta^2 (u + v)] \dot{v}_1 + z \dot{z}_1 = 0.$$

Nach Eintragen der Ausdrücke (9) für \dot{v}_1 und \dot{z}_1 ergibt sich bei Beachtung von (6) die neue Bedingung

$$(14) \quad [\alpha^2 (v - u) (w - u) + \beta^2 u (v - w)] \cdot \dot{u}_1 = \beta^2 u (v - w) \cdot \dot{w}_1.$$

Ähnlich gelangt man für eine stationäre Entfernung $B_1 C_2$ zu der entsprechenden Relation

$$(15) \quad \beta^2 w (v - u) \cdot \dot{u}_1 = [\alpha^2 (w - u) (w - v) + \beta^2 w (v - u)] \cdot \dot{w}_1.$$

Durch Elimination von \dot{u}_1 und \dot{w}_1 aus (14) und (15) ergibt sich dann die entscheidende Bedingung

$$(16) \quad [\alpha^2 (v - u) (w - u) + \beta^2 u (v - w)] \cdot [\alpha^2 (w - u) (w - v) + \beta^2 w (v - u)] = \beta^4 u w (v - u) (v - w),$$

die sich nach Ausmultiplizieren der eckigen Klammern und anschließende Kürzung durch $\alpha^2 (w - u)^2$ reduziert auf

$$(17) \quad \alpha^2(v-u)(w-v) + \beta^2(v^2 - uw) = 0.$$

Anders geschrieben, lautet diese endgültige Wackelbedingung

$$(18) \quad (u - \alpha^2 v)(w - \alpha^2 v) = \beta^4 v^2.$$

§5. Wird also jetzt das zu Beginn von §4 beschriebene Stabmodell durch jene $4n$ Diagonalstäbe ergänzt, die aus $A_2 B_1$ und $B_1 C_2$ durch Spiegelung an der $x y$ -Ebene sowie fortgesetzte Spiegelungen an den Meridianebenen μ_1, μ_2 (1) hervorgehen, so entsteht ein *ringartiges Fachwerk* aus $12n$ Stäben mit $4n$ Knoten, das trotz seiner sechsfachen Überbestimmtheit *wackelig* ist, sofern die für den Aufbau maßgebenden Formparameter u, v, w der Bedingung (18) genügen; der vierte Parameter z ist frei wählbar.

Werden die $8n$ Fachwerksdreiecke als starre, längs der Kanten gelenkig verbundene Platten ausgefüllt, so hat man ein *wackeliges Ringpolyeder*. Zu bemerken wäre, daß je zwei längs einer Diagonalkante zusammenhängende Dreiecke in der Ausgangslage komplanar sind und erst nach erfolgter Deformation des Rings einen Winkel bilden, der natürlich vom gestreckten nur wenig abweicht. Hieraus ist zu erkennen, daß auch die nicht realisierten Diagonalen, wie etwa $A_1 B_2$ und $B_2 C_1$, stationäre Längen haben.

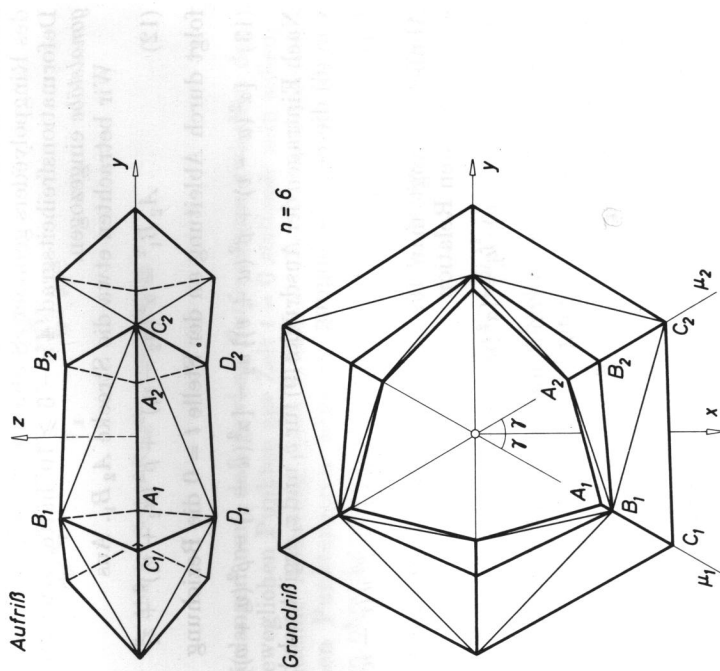


Abb. 2 Sechser-Ring nach Wackeldeformation.

Der *Wackelvorgang* kann unter den Annahmen $0 < u < v < w$ und $\dot{u}_1 > 0$ qualitativ etwa so beschrieben werden: Die Meridianellipsoide $A_i B_i C_i D_i$ mit ungeradem Index rücken nach außen, wobei sich die Hauptdiagonale $A_i C_i$ verkürzt ($\dot{u}_1 > \dot{w}_1$), was von einer Verlängerung der Nebendiagonale $B_i D_i$ begleitet ist ($\dot{z}_1 > 0$). Die Deltoidoide mit geradem Index hingegen rücken unter Verlängerung der Hauptdiagonale und Verkürzung der Nebendiagonale nach innen (vgl. Abb. 1 und 2). Längs der in §4 gewählten Manteldiagonalen treten Ausbuchtungen auf, also keine Hohlkanten.

Quantitative Auskunft über die durch den Wackelvorgang bewirkten (kleinen) Verlagerungen der Polyederecken oder Fachwerksknoten vermitteln deren *Geschwindigkeitsvektoren*. Dieselben gehören durchwegs den Meridianebenen an und sind durch ihre Radialkomponenten $\dot{u}_i, \dot{v}_i, \dot{w}_i$ sowie die Axialkomponenten 0 oder \dot{z}_i bestimmt. Drücken wir vorerst die der Bedingung (18) genügenden Abmessungen u und w mittels eines Hilfsparameters τ aus durch

$$(19) \quad u = \left(\alpha^2 + \frac{\beta^2}{\tau} \right) v, \quad w = (\alpha^2 + \beta^2 \tau) v,$$

so erhalten wir aus (14) und (9) die Verhältniswerte

$$(20) \quad \dot{u}_1 : \dot{v}_1 : \dot{w}_1 : \dot{z}_1 = (\alpha^2 \tau + \beta^2) \tau : \tau : (\alpha^2 + \beta^2 \tau) : \frac{\alpha^2 \beta^2 v}{z} (\tau - 1)^2.$$

Für die entsprechenden Größen mit dem Index 2 ist gemäß (6), (7) und (10) bloß das Vorzeichen umzukehren.

§6. Um einen Überblick über den Wertevorrat der Wackelbedingung (18) zu gewinnen, mag die *Normierung* $v = 1$ vorgenommen werden. Die Gleichung (18) wird dann in der (u, w) -Ebene für jedes gewünschte n durch eine den Punkt (1, 1) enthaltende *gleichseitige Hyperbel* mit den Asymptoten $u = \alpha^2$ und $w = \alpha^2$ dargestellt. Diese Hyperbeln können noch mit einer τ -Skala versehen werden, wie dies im Diagramm Abb. 3 für die Annahmen $n = 4$ ($\alpha^2 = \beta^2 = 1/2$) und $n = 6$ ($\alpha^2 = 3/4, \beta^2 = 1/4$) geschehen ist.

Dem in Abb. 1 und 2 wiedergegebenen sechsteiligen Wackelring ($n = 6$) liegt die auf der Wahl $\tau = 3$ beruhende Annahme

$$(21) \quad u = 5, \quad v = 6, \quad w = 9, \quad z = 3$$

zu Grunde. Für die Wackelgeschwindigkeiten gilt zufolge (20)

$$(22) \quad \dot{u}_1 : \dot{v}_1 : \dot{w}_1 : \dot{z}_1 = 5 : 2 : 1 : 1.$$

Für das in Abb. 4 axonometrisch dargestellte vierteilige Ringpolyeder ($n = 4$) — bei welchem sich die Herleitung der einschlägigen Formeln wegen $\alpha^2 = \beta^2$ beträchtlich vereinfachen würde — wurde die auf die Wahl $\tau = 2$ gestützte Annahme

$$(23) \quad u = 3, \quad v = 4, \quad w = 6, \quad z = 1$$

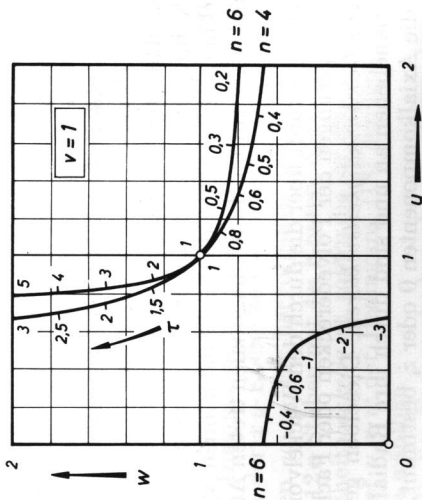


Abb. 3 Diagramm zur Dimensionierung von wackeligen Vier- und Sechser-Ringen.

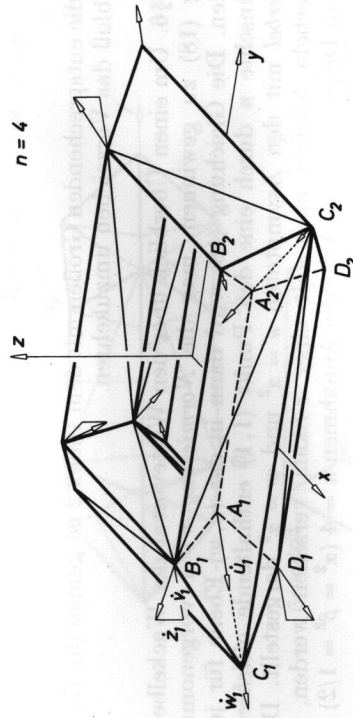


Abb. 4 Wackeliger Vierer-Ring in Ausgangslage.

verwendet. Die Knotenverrückungskomponenten verhalten sich dabei gemäß (20) wie
 (24)
$$\dot{u}_1 : \dot{v}_1 : \dot{w}_1 : \dot{z}_1 = 6 : 4 : 3 : 2.$$

Die zur Herstellung von Karton- oder Stabmodellen benötigten Kanten- bzw. Stablängen sind jeweils mittels der durch die Festsetzungen (4) vereinfachten Distanzformeln (5), (8), (11) und (12) — nebst zweier zusätzlichen für $C_1 C_2$ und $B_1 C_2$ — leicht zu berechnen.

Literatur

- [1] Blaschke, W.: Wackelige Achttfläche. Math. Z. 6 (1920), 85—93.
- [2] Goldberg, M.: Unstable polyhedral structures. Math. Magaz. 51 (1978), 165—170.
- [3] Wunderlich, W.: Starre, kippende, wackelige und bewegliche Achttfläche. Elem. Math. 20 (1965), 25—32.
- [4] Wunderlich, W.: Snapping and shaky antiprisms. Math. Magaz. 52 (1979), 235—236.
- [5] Wunderlich, W.: Wackelige Doppelpyramiden. Anz. Österr. Akad. Wiss. 117 (1980), 82—87.
- [6] Wunderlich, W.: Wackeldodekaeder. Math. stat. Sekt. FZ Graz 149 (1980), 1—8. — Wackeldodekaeder. Elem. Math. (im Druck).
- [7] Wunderlich, W.: Wackelikosäeder. Geom. dedicata 11 (1980), 137—146. — Neue Wackelikosäeder. Anz. Österr. Akad. Wiss. 117 (1980), 28—33.