

## ÜBER VERALLGEMEINERTE BÖSCHUNGSFLÄCHEN

Walter Wunderlich, Wien

1. In seiner ursprünglichen Bedeutung bezeichnet der Begriff *Böschungsfäche* eine abwickelbare Fläche  $\varphi_0$  des dreidimensionalen euklidischen Raumes, deren Erzeugenden gegen eine für gewöhnlich waagrecht gedachte Grundebene gleiche Neigungswinkel  $\beta$  aufweisen, wobei  $0 < \beta < \pi/2$ . Sieht man vom Drehkegel mit dem Öffnungswinkel  $2\alpha = \pi - 2\beta$  ab, so besteht  $\varphi_0$  aus den Tangenten einer als *Gratlinie* angesprochenen Raumkurve  $k_0$ , die wegen ihres konstanten Anstiegs  $\beta$  eine *Böschungslinie* ist. Die Tangentialebenen von  $\varphi_0$  berühren jeweils längs einer Erzeugenden und sind mit den Schmiegeebenen von  $k_0$  identisch. Für den Quotienten aus Torsion  $\tau_0$  und Krümmung  $\kappa_0$  der Gratlinie  $k_0$  gilt bekanntlich  $\tau_0/\kappa_0 = \operatorname{tg} \beta = \gamma = \text{const}$ ; dieser Wert  $\gamma$  heißt die *konische Krümmung* von  $k_0$  und  $\varphi_0$  [4].

In erweitertem Sinn versteht man nun seit E. Kruppa [4] unter *verallgemeinerten Böschungsfächen* auch windschiefe Regelflächen  $\varphi$ , deren Erzeugenden gegen eine feste Bezugsebene *gleiche Neigung*  $\beta$  und überdies *gleichen Drall*  $p$  aufweisen. Mit  $p = 0$  ordnen sich hier die traditionellen (abwickelbaren) Böschungsfächen ein. Das einfachste Beispiel für eine windschiefe Böschungsfäche stellt das einschalige Drehhyperboloid (mit lotrechter Achse) dar: Ist  $a$  der Kehlkreisradius und  $\beta$  der Steigungswinkel der Erzeugenden gegen die Kehlkreisbene, so hat der Drall den Wert  $p = \pm a \operatorname{tg} \beta$ , stimmt also dem Betrag nach mit der halben Nebenachse des Hyperboloids überein; hierbei ist für die bezüglich der Achse linksgewundenen Erzeugenden  $p > 0$ , für die rechtsgewundenen  $p < 0$ .

Für die von E. Kruppa [4] — und vor ihm schon von G. Sannia [7] — eingeführten Grundinvarianten einer »natürlichen« (intrinsic) Regelfächentheorie, nämlich die natürliche Krümmung  $\kappa$  und die natürliche Torsion  $\tau$ , gilt bei verallgemeinerten Böschungsfächen  $\varphi$  gleichfalls die Proportionalität  $\tau/\kappa = \operatorname{tg} \beta = \gamma = \text{const}$ , und  $\gamma$  wird die natürliche konische Krümmung von  $\varphi$  genannt. Als dritte Grundinvariante dient der Striktionswinkel  $\sigma$ , den die Flächenerzeugenden mit der Striktionslinie oder Kehlkurve  $k$  (s. u.) bilden; für den die Verwindung des Flächenstreifens längs einer Erzeugenden messenden *Drall* besteht die Formel  $p = \sin \sigma/\kappa$ . Eine grundlegende Untersuchung der verallgemeinerten Böschungsfächen hat H. Brauner in [1] vorgenommen und in [2] ergänzt. Die vorliegende Mitteilung will einen einfachen Zugang aufzeigen und einige bemerkenswerte Beispiele vorführen. Der Kürze halber werden dabei unter *Böschungsfächen* schlechtweg stets die verallgemeinerten (windschiefen) verstanden, während die klassischen (abwickelbaren) deutlicher als *Böschungstorsen* bezeichnet werden.

2. Auf sämtlichen Erzeugenden  $e$  einer Böschungsfläche  $\varphi$  werden zufolge ihrer gleichen Neigung  $\beta$  durch die feste Grundebene  $\pi$  und eine dazu parallele Schichtenebene  $\pi_1$  Strecken  $AA_1$  konstanter Länge begrenzt. Die Fläche  $\varphi$  kann mithin durch eine zwangsläufige *ebene Bewegung*  $\mathcal{B}_0$  erzeugt werden, bei welcher  $A$  und  $A_1$  auf den entsprechenden Schichtenlinien geführt werden. Nach den Elementen der ebenen Kinematik verhält sich diese Bewegung hinsichtlich ihrer Bahntangenten in jedem Augenblick wie eine *Drehung* um eine wohlbestimmte Momentanachse  $m_0$ , die (außer in Verzweigungslagen) im Schnitt der beiden Bahnnormalebenen von  $A$  und  $A_1$  zu finden ist. Dies bedeutet, daß  $\varphi$  längs jeder Erzeugenden  $e$  von einem einschaligen *Drehhyperboloid*  $\Sigma$  berührt wird, das bei fortgesetzter Rotation von  $e$  um  $m_0$  entstehen würde. Wegen des gemeinsamen konstanten Dralls  $p$  von  $\varphi$  und  $\Sigma$  haben alle Hyperboloide  $\Sigma$  denselben Kehlkreisradius  $a = p \cot \beta$ , sind also untereinander *kongruent*.

Die Menge aller im Zuge der Bewegung  $\mathcal{B}_0$  auftretenden Momentanachsen  $m_0$  erfüllt im ruhenden System im allgemeinen einen gewissen lotrechten »Rastzylinder«  $\Gamma_0$ , im bewegten System hingegen eine lotrechte »Gangebene«  $\Pi_0$ , die im Abstand  $a$  von der Erzeugenden  $e$  verläuft und auf dem Zylinder  $\Gamma_0$  gleitfrei abrollt. Die Berührung zwischen  $\Pi_0$  und  $\Gamma_0$  findet dabei jeweils längs der Momentanachse  $m_0$  statt. Damit hat man den eine bisher anscheinend nicht beachtete kinematische Erzeugung beschreibenden Satz:

*Rollt eine Ebene  $\Pi_0$  auf einem beliebigen lotrechten Zylinder  $\Gamma_0$  ab, so überstreicht eine zur Ebene  $\Pi_0$  parallele und mit ihr starr verbundene schräge Gerade  $e$  eine (verallgemeinerte) Böschungsfläche  $\varphi$ .*

Ist  $a > 0$  der Abstand zwischen  $\Pi_0$  und  $e$ , und  $\alpha > 0$  der spitze Winkel von  $e$  gegen die Lotrichtung, so hat der konstante Drall  $p$  von  $\varphi$  den Betrag  $|p| = a \cot \alpha$ ; das Vorzeichen von  $p$  ist positiv, wenn  $e$  mit der Wälzerzeugenden  $m_0$  eine Linksschraube bestimmt, sonst negativ.

Bezeichne  $e_0$  die Normalprojektion von  $e$  auf die Ebene  $\Pi_0$ . Bei der Rollung erzeugt die Gerade  $e_0$  eine Abdruckspur  $k_0$  auf dem Zylinder  $\Gamma_0$ , also eine Böschungslinie mit dem Steigwinkel  $\beta = (\pi/2) - \alpha$ . Die von  $e_0$  überstrichene Tangentenfläche  $\varphi_0$  von  $k_0$  ist die *asymptotische Torse* der Böschungsfläche  $\varphi$ , die sie längs des gemeinsamen Fernkreises  $c$  berührt. Ihre Bedeutung wird von H. Brauner [1] erkannt, der die Böschungsflächen dadurch gewinnt, daß er die Tangenten  $e_0$  einer beliebigen Böschungslinie  $k_0$  in Richtung der jeweiligen (waagrechten) Hauptnormalen um dasselbe Stück  $a$  verschiebt.

3. Sämtliche geradlinigen Flächenstreifen einer Böschungsfläche  $\varphi$  weisen die gleiche, durch den Drallwert  $p$  gekennzeichnete Verwindung auf, sind also untereinander kongruent. Infolgedessen gehören die Böschungsflächen zu den von H. Schaal [8] studierten, durch *Bewegung eines starren Streifens* erzeugbaren Flächen, unter welchen sie auch ausdrücklich angeführt werden. Im vorliegenden Fall besteht die Streifenbewegung  $\mathcal{B}$  im Schroten der  $m_0$  enthaltenden Normalebene  $\Pi^*$  von  $\Pi_0$  auf dem Evoluten Zylinder  $\Gamma^*$  von  $\Gamma_0$ , wobei der in  $\Pi^*$  befindliche Gratpunkt  $K_0$  von  $e_0$  die Böschungslinie  $k_0$  auf  $\Gamma_0$  durchläuft (vgl. Abb. 1). Nach den Elementen der räumlichen Kinematik verhält sich die Bewegung  $\mathcal{B}$  hinsichtlich ihrer Bahntangenten in jedem Augenblick wie eine bestimmte *Schraubung* um eine lotrechte Momentanachse  $m$ , längs welcher einander  $\Pi^*$  und  $\Gamma^*$  berühren; sie fällt mit der zu  $m_0$  gehörigen krümmungsachse des Zylinders  $\Gamma_0$  zusammen.<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> Der Parameter der Momentanschraubung hat den Betrag  $\sin \alpha \cos \alpha / \kappa_0 = \sin \beta \cos \beta / \kappa_0$ .



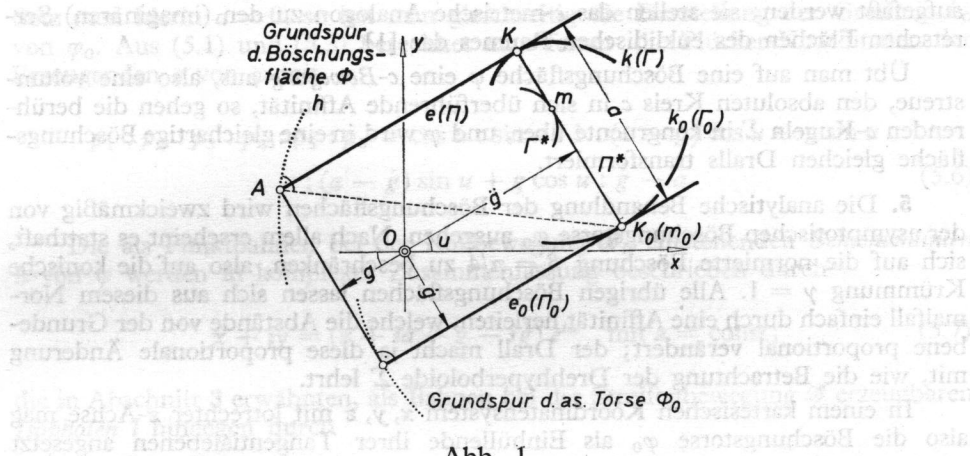


Abb. 1.

Die zu  $\Pi_0$  parallele, die Erzeugende  $e$  enthaltende Ebene  $\Pi$  ist, da zur asymptotischen Ebene  $ee_0$  normal, die Zentralebene der Böschungsfläche  $\varphi$ . Ihr Berührungspunkt  $K$  ist der Zentralpunkt von  $e$  und liegt auf der durch  $K_0$  gehenden (waagrechten) Hauptnormale von  $k_0$ ; dieses Gemeinlot  $KK_0$  von  $e$  und  $m_0$  stellt die Zentralnormale von  $\varphi$  dar. Die Zentralebene  $\Pi$  hüllt — sowohl im Zuge der Bewegung  $\mathcal{B}$  als auch bei der Rollung  $\mathcal{B}_0$  — den Zentralzylinder  $\Gamma$  von  $\varphi$  ein, der im Abstand  $a$  äquidistant zu  $\Gamma_0$  verläuft (Abb. 1).

Im Verlauf der Streifenbewegung  $\mathcal{B}$  beschreibt der Zentralpunkt  $K$  die Striktionslinie oder Kehlcurve  $k$  der Böschungsfläche  $\varphi$ , längs der  $\varphi$  vom Zentralzylinder  $\Gamma$  berührt wird. Jeder andere Punkt  $L$  der Erzeugenden  $e$  wandert auf einer Kurve  $l$  von  $\varphi$ , wobei die mitgenommene Tangentialebene eine unveränderlich Neigung gegen die Grundebene behält; es handelt sich mithin bei  $l$  um eine *Isophote* oder *Hellegleiche* für lotrechte Beleuchtung. In Anbetracht der invarianten Entfernung  $KL$  ergibt sich so in anschaulicher Weise die von E. Kruppa erwähnte Feststellung, daß die Berührungslinien  $l$  der einer Böschungsfläche  $\varphi$  umschriebenen Böschungstorsen (zu denen als Grenzform auch der Zentralzylinder  $\Gamma$  gehört) auf den Erzeugenden von  $\varphi$  kongruente Punktreihen ausschneiden.

4. Macht man den gemeinsamen Fernkreis  $c$  aller Böschungskegel mit dem Öffnungswinkel  $2a$  zum absoluten Gebilde einer *pseudo-euklidischen Metrik* mit dem Bogenelementquadrat  $ds^2 = dx^2 + dy^2 - \operatorname{tg}^2 a \cdot dz^2$ , die als » $c$ -Metrik« im Rahmen der Zyklographie grundlegende Bedeutung gewonnen hat [5], so sind die in Abschnitt 2 aufgetretenen Drehhyperboloide  $\Sigma \supset c$  als untereinander kongruente » $c$ -Kugeln« vom Radius  $a$  anzusprechen. Die Einhüllende einer einparametrischen Schar solcher  $c$ -Kugeln ist füglich als » $c$ -Rohrfläche« zu bezeichnen; die Charakteristik einer Scharfläche  $\Sigma$  ist jeweils der  $c$ -Kreis in der zur Fortschreitrichtung des Mittelpunktes  $c$ -normalen Durchmessersebene von  $\Sigma$ . Im vorliegenden Fall ist die Mittenbahn die Böschungslinie  $k_0$ , welche als  $c$ -isotrop anzusehen ist, weil ihre Tangenten  $e_0$  den absoluten Kreis  $c$  treffen; dies hat zur Folge, daß die Charakteristik stets in ein paralleles Erzeugendenpaar  $e, \bar{e}$  von  $\Sigma$  zerfällt. Das Hüllgebilde besteht mithin aus zwei Böschungsflächen  $\varphi, \bar{\varphi}$  mit entgegengesetzten Drallwerten  $\pm a \cot a$ . Abgesehen von den  $c$ -Kugeln selbst können demnach Böschungsflächen als Bestandteile spezieller  $c$ -Rohrflächen

aufgefaßt werden; sie stellen das  $c$ -metrische Analogon zu den (imaginären) Serretischen Flächen des euklidischen Raumes dar [1].

Übt man auf eine Böschungsfäche  $\varphi$  eine  $c$ -Bewegung aus, also eine volumstreu, den absoluten Kreis  $c$  in sich überführende Affinität, so gehen die berührenden  $c$ -Kugeln  $\Sigma$  in kongruente über, und  $\varphi$  wird in eine gleichartige Böschungsfäche gleichen Dralls transformiert.

5. Die analytische Behandlung der Böschungsfächen wird zweckmäßig von der asymptotischen Böschungstorse  $\varphi_0$  ausgehen. Nach allem erscheint es statthaft, sich auf die normierte Böschung  $\beta = \pi/4$  zu beschränken, also auf die konische Krümmung  $\gamma = 1$ . Alle übrigen Böschungsfächen lassen sich aus diesem Normalfall einfach durch eine Affinität herleiten, welche die Abstände von der Grundebene proportional verändert; der Drall macht ja diese proportionale Änderung mit, wie die Betrachtung der Drehhyperboloide  $\Sigma$  lehrt.

In einem kartesischen Koordinatensystem  $x, y, z$  mit lotrechter  $z$ -Achse mag also die Böschungstorse  $\varphi_0$  als Einhüllende ihrer Tangentialebenen angesetzt werden durch

$$x \cos u + y \sin u - z = -g \quad \text{mit } g = g(u) \in C^3. \quad (5.1)$$

Diese Schar wird von einer Ebene durchlaufen, die sich um die  $z$ -Achse dreht, während ihr Achsenpunkt gemäß dem Gesetz  $g(u)$  in Abhängigkeit vom Drehwinkel  $u$  längs dieser Achse wandert. Die Berührungserzeugende  $e_0$  der Tangentialebene (5.1) liegt in der durch Ableitung nach dem Parameter  $u$  gewonnenen lotrechten Normalebene  $\Pi_0$ :

$$x \sin u - y \cos u = \dot{g} = dg/du. \quad (5.2)$$

$\dot{g}(u)$  ist damit als Stützfunktion des Rastzylinders  $\Gamma_0$  der Rollbewegung  $\mathcal{B}_0$  aus Abschnitt 2 zu erkennen (Abb. 1). Die im Abstand  $a = p$  von  $\Pi_0$  verlaufende Zentralebene  $\Pi$  wird nun dargestellt durch

$$x \sin u - y \cos u = \dot{g} - a. \quad (5.3)$$

Sie schneidet die asymptotische Ebene (5.1) nach der Erzeugenden  $e$  der Böschungsfäche  $\varphi$ . Der Gratpunkt  $K_0$  von  $e_0$  sowie der Kehlpunkt  $K$  von  $e$  liegen in der durch nochmalige Ableitung gewonnenen Ebene  $\Pi^*$ :

$$x \cos u + y \sin u = \ddot{g}. \quad (5.4)$$

Die Auflösung des linearen Gleichungssystems (5.1), (5.3), (5.4) liefert dann als Parameterdarstellung der Kehlkurve  $k$ :

$$\begin{aligned} x &= (\dot{g} - a) \sin u + \ddot{g} \cos u, \\ y &= (a - \dot{g}) \cos u + \ddot{g} \sin u, \\ z &= g + \ddot{g}. \end{aligned} \quad (5.5)$$



Setzt man hierin  $a = 0$ , so hat man gleichzeitig die Darstellung der Gratlinie  $k_0$  von  $\varphi_0$ . Aus (5.1) und (5.3) berechnet man ferner die Plücker-Koordinaten der Erzeugenden  $e$  von  $\varphi$  mit

$$p_1 : p_2 : p_3 : p_4 : p_5 : p_6 = \cos u : \sin u : 1 : (a - \dot{g}) \cos u - g \sin u : \\ : (a - \dot{g}) \sin u + g \cos u : \dot{g} - a. \quad (5.6)$$

Die als Punktbahnen bei der Rollbewegung  $\mathcal{B}_0$  entstehenden *Schichtenlinien*  $h$  von  $\varphi$  werden in komplexer Zusammenfassung beschrieben durch

$$x + iy = (z + ia - g - i\dot{g}) e^{iu} \quad \text{mit } z = \text{const}; \quad (5.7)$$

die in Abschnitt 3 erwähnten, als Bahnen bei der Streifenbewegung  $\mathcal{B}$  erzeugbaren *Isophoten*  $l$  hingegen durch

$$x + iy = (b + ia + \ddot{g} - i\dot{g}) e^{iu}, \quad z = b + g + \ddot{g} \quad \text{mit } b = \text{const}. \quad (5.8)$$

Das einfachste Beispiel für Böschungsflächen bieten die sich mit der Annahme  $g = cu$  ( $c = \text{const}$ ) einstellenden *Regelschraubflächen*  $\varphi$ , welche die Schraublinie  $k$

$$x = (c - a) \sin u, \quad y = (a - c) \cos u, \quad z = cu \quad \text{mit } c \neq 0 \quad (5.9)$$

zur Kehlcurve haben, wenn man vom Sonderfall  $a = c$  der geschlossenen Regelschraubflächen absieht, bei welchen  $k$  auf die Schraubachse  $x = y = 0$  zusammengeschrumpft ist. Ihre Erzeugung durch die Rollbewegung  $\mathcal{B}_0$  einer Ebene  $\Pi_0$  auf einem Drehzylinder  $\Gamma_0$  vom Radius  $c$  läßt die Schichtenlinien  $h$  (5.7) unmittelbar als verschlungene oder gestreckte Kreisevolventen erkennen, je nachdem ob  $a > 0$  oder  $< 0$ ; die gespitze Kreisevolvente  $a = 0$  gehört zur (asymptotischen) Schraubtorse  $\varphi_0$ . Die Isophoten  $l$  (5.8) sind unter der Voraussetzung  $a \neq 0$  naturgemäß die auf der Schraubfläche  $\varphi$  verlaufenden Bahnschraublinien der Schraubbewegung  $\mathcal{B}$ .

#### 6. Interessantere Beispiele liefert die Annahme

$$g = c \cdot \cos nu \quad \text{mit } c = \text{const}, \quad 0 < n \neq 1. \quad (6.1)$$

Hier ist die asymptotische Torse  $\varphi_0$  (5.1) eine durch harmonischen Umschwingung erzeugbare *Umschwingtorse* [3], deren Gratlinie  $k_0$  bekanntlich Böschungslinie auf einer Drehquadrik mit lotrechter Achse ist und Grundriß als Epi- oder Hypozykloide erscheint, je nachdem ob  $n < 1$  oder  $> 1$ . Die zugehörige Böschungsfläche  $\varphi$  entsteht mithin bei der Rollung  $\mathcal{B}_0$  einer Ebene  $\Pi_0$  auf dem Rastzylinder  $\Gamma_0 \supset k_0$  mit *Zykloidenbasis*.

Für die *Striktionslinie*  $k$  von  $\varphi$  ergibt sich gemäß (5.5) die Darstellung

$$\begin{aligned} x &= -(a + nc \sin nu) \sin u - n^2 c \cos nu \cos u, \\ y &= (a + nc \sin nu) \cos u - n^2 c \cos nu \sin u, \\ z &= (1 - n^2) c \cos nu. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Sie verläuft auf einer Drehfläche 4. Ordnung, die durch Rotation der Ellipse

$$x_0 = -n^2 c \cos nu, y_0 = a + nc \sin nu, z_0 = (1 - n^2) c \sin nu \quad (6.3)$$

um die  $z$ -Achse entsteht. Der Kehlcurvengrundriß  $k'$ , in komplexer Zusammenfassung

$$x + iy = \frac{nc}{2} [(1 - n) e^{(1+n)iu} - (1 + n) e^{(1-n)iu}] + ia \cdot e^{iu}, \quad (6.4)$$

ist nach [9] eine *Radlinie* 3. Stufe mit der Charakteristik  $(1 - n) : 1 : (1 + n)$ , nämlich die im Abstand  $a$  verlaufende Parallelkurve der Basiszykloide  $k'_0$  des Rastzylinders  $\Gamma_0$ ; letztere ist eine Radlinie der Familie  $(1 - n) : (1 + n)$  und wird durch (6.4) mit  $a = 0$  beschrieben.

Die *Schichtenlinien*  $h$  (5.7), ausführlich

$$x + iy = (z + ia) e^{iu} - \frac{c}{2} [(1 - n) e^{(1+n)iu} + (1 + n) e^{(1-n)iu}], \quad (6.5)$$

sind ebenfalls Radlinien 3. Stufe der Familie  $(1 - n) : 1 : (1 + n)$ . Gleiches gilt für den Grundriß der *Isophoten* 1 (5.8), die durchwegs auf Drehflächen 4. Ordnung verlaufen, welche durch Rotation einer Ellipse um die  $z$ -Achse entstehen.

Hervorzuheben ist, daß es unter den vorliegenden Böschungsflächen  $\varphi$  *rational-algebraische* gibt, nämlich für rationale Werte von  $n$ . Schreibt man in einem solchen Fall  $n = \lambda/\mu$  als gekürzten Bruch natürlicher Zahlen  $\lambda, \mu$  an, und führt man den (komplexen) rationalisierenden Parameter  $v = e^{iu/\mu}$  ein, so läuft die Ermittlung der Schnittpunkte von  $\varphi$  mit einer Testgeraden über die entsprechende, in den Plücker-Koordinaten  $p_i$  (5.6) linear-homogene Bedingung auf eine algebraische Gleichung in  $v$  hinaus, deren Grad zu beurteilen ist. Auf diesem Wege findet man als Grad der Regelfläche  $\varphi$  den Wert  $N = 2(\lambda + \mu)$ , der auch die Ordnung der Kehlkurve  $k$ , der Schichtenlinien  $h$  und der Isophoten 1 angibt. Die über (5.1) und (6.1) ähnlich zu bestimmende Klasse der asymptotischen Torse  $\varphi_0$  beträgt  $M = 2 \max(\lambda, \mu)$ . Der Böschungsfernkreis  $c$  ist wegen  $e^{iu} = v^\mu$  eine  $\mu$ -fache Kurve von  $\varphi$  und  $\varphi_0$ .

Die einfachsten Beispiele ergeben sich mit  $n = 2$  und  $n = 1/2$  als Böschungsflächen 6. Grades mit einer Striktionslinie 6. Ordnung und einer asymptotischen Torse 4. Klasse. Die Basis des Rastzylinders ist im ersten Fall eine Astroide, im zweiten Fall eine Nephroide. Der Böschungsfernkreis ist im ersten Fall einfache Kurve, im zweiten Fall Doppelkurve.

7. Mit Einführung des (reellen) rationalisierenden Parameters  $t = \operatorname{tg}(u/2)$  nimmt die Gleichung (5.1) der asymptotischen Ebene die von H. Brauner [1] verwendete Gestalt

$$(1 - t^2)x + 2ty - (1 + t^2)z = -f \quad \text{mit } f(t) = (1 + t^2)g(u) \quad (7.1)$$

an. Für die zur Umrechnung der trigonometrischen Darstellung in Abschnitt 5 benötigten Ableitungen von  $g$  nach  $u$  findet man mit Beachtung von  $du/dt = 2/(1 + t^2)$ :

$$\dot{g} = \frac{1}{2}\dot{f} - \frac{tf}{1+t^2}, \quad \ddot{g} = \frac{1+t^2}{4}\ddot{f} - \frac{t}{2}\dot{f} - \frac{1-t^2}{1+t^2} \cdot \frac{f}{2}, \quad (7.2)$$



wobei der Punkt über  $f$  jetzt die Ableitung nach  $t$  bedeutet. Zwecks Vereinfachung der sich ergebenden Ausdrücke empfiehlt sich noch der Übergang zu den affinen Koordinaten

$$X = x - z, \quad Y = y, \quad Z = x + z. \quad (7.3)$$

Die Gleichung der asymptotischen Ebene (7.1) lautet dann

$$X + tY - t^2 Z = -f, \quad (7.4)$$

und anstelle der Zentralebene (5.3) kann die durch Linearkombination mit (7.4) zu gewinnende Ebene

$$Y - 2tZ = -\dot{f} + 2a \quad (7.5)$$

treten. Aus der Matrix der Ebenenkoordinaten in (7.4) und (7.5) bestimmen sich die neuen Plücker-Koordinaten der Erzeugenden der Böschungsfläche  $\varphi$  mit

$$P_1 : P_2 : P_3 : P_4 : P_5 : P_6 = -t^2 : 2t : 1 : 2a - \dot{f} : f - t\dot{f} + 2at : \\ : -2tf + t^2\ddot{f} - 2at^2. \quad (7.6)$$

Die aus (5.5) zu entnehmende Gleichung der den Zentralpunkt enthaltenden Schichtenebene  $z = g + \ddot{g}$  lautet nun:

$$-X + Z = \frac{1+t^2}{2}\ddot{f} - t\dot{f} + f. \quad (7.7)$$

Durch Auflösung des linearen Gleichungssystems (7.4), (7.5), (7.7) gelangt man dann zur Darstellung der *Kehlkurve*  $k$ :

$$X = -\frac{t^2}{2}\ddot{f} + t\dot{f} - f - \frac{2at}{1+t^2}, \\ Y = t\ddot{f} - \dot{f} + 2a\frac{1-t^2}{1+t^2}, \\ Z = \frac{1}{2}\ddot{f} - \frac{2at}{1+t^2}. \quad (7.8)$$

Die Rückkehr zu den kartesischen Koordinaten ist mittels der Umkehrformeln

$$x = \frac{1}{2}(X + Z), \quad y = Y, \quad z = \frac{1}{2}(Z - X) \quad (7.9)$$

jederzeit möglich.

Nimmt man für  $f$  ein quadratisches Polynom in  $t$  an, so ist die asymptotische Torse  $\varphi_0$  gemäß (7.1) oder (7.4) algebraisch und von 2. Klasse, also ein *Drehkegel*,

dessen Spitze sich durch Verschiebung oder die Festsetzung  $f \equiv 0$  in den Ursprung verlegen läßt. Als zugehörige Böschungsfläche  $\varphi$  stellt sich mithin bloß das *einschalige Drehhyperboloid* ein.

Durch Wahl irgendeiner algebraischen Funktion  $f(t)$  lassen sich alle möglichen *algebraischen Böschungsflächen*  $\varphi$  gewinnen. Die in [1] enthaltene Bemerkung, daß solche Flächen stets sogar rational sind, ist allerdings nicht haltbar. Hinreichend (aber keineswegs notwendig) für die Gültigkeit dieser Aussage wäre etwa die Bedingung, daß der Böschungsfernkreis  $c$  einfache Kurve von  $\varphi$  ist; dies trifft beispielsweise bei der Annahme  $n = 2$  aus Abschnitt 6 zu, während bei der Annahme  $n = 1/2$  der Fernkreis  $c$  zwar Doppelkurve, die Fläche  $\varphi$  aber trotzdem rational ist.

8. Auf eine Familie von bemerkenswerten Beispielen führt die Annahme

$$f = c \cdot t^n \quad \text{mit } c = \text{const und } n \geq 1. \quad (8.1)$$

Sie erfaßt im übrigen auch die Exponenten  $n < 1$ , da ein solcher Fall durch den Parameterwechsel  $t' = 1/t$  auf  $n' = 2 - n > 1$  zurückführbar ist. Die Darstellung der Böschungsfläche  $\varphi$  in Plücker-Koordinaten lautet gemäß (7.5):

$$P_1 : \dots : P_6 = -t^2 : 2t : 1 : 2a - nct^{n-1} : 2at - (n-1)ct^n : \\ : (n-2)ct^{n+1} - 2at^2. \quad (8.2)$$

Ihre *Kehlkurve*  $k$  wird zufolge (7.8) beschrieben durch

$$X = \frac{c}{2} (n-1)(2-n)t^n - \frac{2at}{1+t^2}, \\ Y = cn(n-2)t^{n-1} + 2a \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad (8.3) \\ Z = \frac{c}{2} n(n-1)t^{n-2} - \frac{2at}{2+t^2}.$$

Man erkennt, daß die mit  $a = 0$  miterfaßte *Gratlinie*  $k_0$  der asymptotischen Torse  $\varphi_0$  eine *W-Kurve* ist, nämlich Bahnkurve der einparametrischen Affinitätsgruppe

$$X' = \tau^n X, \quad Y' = \tau^{n-1} Y, \quad Z' = \tau^{n-2} Z. \quad (8.4)$$

Die Transformationen der Gruppe lassen das Achsenkreuz  $X, Y, Z$  fest und führen sämtliche Kegel des Berührungsbüschels  $Y^2 + \varrho XZ = 0$  in sich über, darunter auch den Böschungskegel  $\varrho = 1$  und damit den Böschungsfernkreis  $c$ . Im Sinne der pseudo-euklidischen  $c$ -Geometrie aus Abschnitt 4 sind die Transformationen (8.4) daher als » $c$ -Ähnlichkeiten« aufzufassen, und die Gruppe kann als » $c$ -Spiralung« angesprochen werden. Dementsprechend ist die Torse  $\varphi_0$  eine *c-Spiraltorse*; ihre Gratlinie  $k_0$  verläuft als *c-Spiralbahn* auf dem invarianten *c-Drehkegel*

$$(n-1)^2 Y^2 + 4n(n-2) XZ = 0. \quad (8.5)$$



Die Striktionslinie  $k$  (8.3) ist jedoch keine Bahnkurve der Gruppe (8.4), und die Böschungsfläche  $\varphi$  ist keine  $c$ -Spiralfläche.

Die zu verschiedenen Werten des Koeffizienten  $c$  in (8.1) gehörigen Böschungsflächen sind untereinander  $c$ -kongruent. Übt man nämlich die durch

$$\bar{X} = \sigma X, \bar{Y} = Y, \bar{Z} = \sigma^{-1} Z \quad (8.6)$$

erklärte  $c$ -Drehung um die  $Y$ -Achse aus, so geht die maßgebende Darstellung (7.4) der asymptotischen Torse (mit  $f = ct^n$ ) nach Vornahme des Parameterwechsels  $\bar{t} = \sigma t$  in eine vollkommen gleichartige mit  $\bar{c} = \sigma^{1-n} c$  über. Will man allerdings im Reellen bleiben, so müssen unter Umständen, entsprechend dem Vorzeichen von  $c$ , zwei Grundtypen von Flächen unterschieden werden; so etwa bei dem weiter unten diskutierten Beispiel  $n = 3$ . Bei der vorgenommenen pseudo-euklidischen Drehung (8.6) geht übrigens der (euklidische) Charakter der Kehlkurve verloren.

*Rational-algebraische Böschungsflächen*  $\varphi$  ergeben sich wieder für rationale Werte  $n = \lambda/\mu$  ( $\lambda \geq \mu > 0$  ganz und teilerfremd). Nach Einführung des rationalisierenden Parameters  $v = t^{1/\mu}$  hat man  $t = v^\mu$  und  $t^n = v^\lambda$ . Aus (8.2) ergibt sich der Grad der Regelfläche  $\varphi$  mit  $N = \lambda + \mu$ , falls  $n \neq 2$ ; der Böschungsfernkreis  $c$  zählt  $\mu$ -fach. Die Klasse der asymptotischen Torse  $\varphi_0$  (7.4) beträgt  $M = \max(\lambda, 2\mu)$ ; sie stimmt mit der Ordnung der Gratlinie  $k_0$  und des Rastzylinders  $\Gamma_0 \supset k_0$  überein. Als Ordnung der Striktionslinie  $k$  (8.3) findet man  $N' = \lambda + 2\mu$ , falls  $n > 2$ ; sonst  $N' = 4\mu$ , außer für  $n = 2$  oder  $n = 1$  ( $k = \text{Kreis}$ ).

Als wichtigstes nichttriviales Beispiel wäre der Fall  $n = 3$  hervorzuheben, der gleichzeitig die Annahme eines beliebigen kubischen Polynoms  $f(t)$  erfaßt, weil dessen Glieder niedrigerer Ordnung durch eine Verschiebung des Koordinatensystems zu beseitigen sind, wie aus dem Ansatz (7.4) abzulesen ist. Die zugrundeliegende asymptotische Torse  $\varphi_0$  hat die Klasse  $M = 3$ , ist also die wohlbekannte *kubische Böschungstorse* mit einer kubischen Parabel  $k_0$  als Gratlinie [10]. Die zugehörige Böschungsfläche  $\varphi$  ist vom Grad  $N = 4$  und stellt, wie H. Brauner in [1] angegeben und in [2] ausführlich begründet hat, die *einzige Böschungsfläche 4. Grades* dar. Sie läßt sich als Regelschraubfläche einer  $c$ -Grenzschraubung auffassen und besitzt eine kubische Bahnparabel als Doppelkurve, ist demnach von III. Sturmscher Art [6].<sup>2)</sup> Ihre Striktionslinie  $k$  hat die Ordnung  $N' = 5$ . — Die gleiche Fläche (abgesehen von einer Verschiebung längs der  $y$ -Achse) ist auch durch den trigonometrischen Ansatz aus Abschnitt 5 mit  $g = c \cdot \operatorname{tg}(u/2)$  zu gewinnen. Wie aus  $\dot{g} = c/(1 + \cos u)$  zu erkennen ist, hat der Rastzylinder  $\Gamma_0$  der Rollbewegung  $\mathcal{B}_0$  als Basis die negative Fußpunktkurve einer Parabel bezüglich ihres Brennpunktes, also eine sogenannte Tschirnhaus-Kubik. Daß diese als Grundriß jeder kubischen Böschungslinie (hier  $k_0 \subset \Gamma_0$ ) auftritt, ist bekannt [10].

Mit diesem Beispiel ist auch die Frage nach allfälligen Böschungsflächen 3. Grades negativ zu entscheiden. Eine solche Regelfläche  $\varphi$  würde den Böschungsfernkreis  $c$  enthalten und längs desselben von einer kubischen Böschungstorse

<sup>2)</sup> Vom reellen Standpunkt aus sind zwei Typen zu unterscheiden: Die Doppelkubik ist reelle Knotenlinie für  $a > 0$ , jedoch isoliert für  $a < 0$ . Für die Parameterwerte  $t, t'$  einander schneidender Erzeugenden von  $\varphi$  gilt nämlich, wie mit Hilfe von (7.6) festzustellen ist,  $(t' - t)^2 = 4a$ .

$\varphi_0$  berührt werden [6]. Deren Gratlinie  $k_0$  erscheint aber im Grundriß als Tschirnhaus-Kubik, womit man zwangsläufig zum abigen Ansatz gelangt. Dieser führt jedoch auf eine Fläche  $\varphi$  4. Grades: Es gibt mithin, wie schon H. Brauner betont hat, keine kubischen Böschungsflächen.

Die Annahme  $n = 4$  in (8.1) liefert eine Böschungsfläche 5. Grades mit einer Kehlkurve 6. Ordnung und einer asymptotischen Torse 4. Klasse. Deren Gratlinie 4. Ordnung wird, wenn man der Kürze zuliebe  $c = 2$  setzt, gemäß (7.9) und (8.3) dargestellt durch

$$x = 6t^2 - 3t^4, y = 8t^3, z = 6t^2 + 3t^4$$

und ist in [10] als Normalform einer Böschungsquartik mit eigentlicher Spitze angeführt.

Auch die Annahme  $n = 3/2$  führt auf eine Böschungsfläche 5. Grades, die jedoch den Fernkreis  $c$  als Doppelkurve enthält; ihre Striktionslinie ist von 8. Ordnung. Die asymptotische Torse 4. Klasse hat (für  $c = 16$ ) die Gratlinie

$$x = v^3 + 3v^{-1}, y = -6v, z = 3v^{-1} - v^3,$$

die in [10] als Normalform einer Böschungsquartik mit uneigentlicher Spitze zu finden ist.<sup>3)</sup>

<sup>3)</sup> Der dort verwendete Parameter unterscheidet sich von dem hiesigen um den Faktor  $\sqrt{3}$ , was, abgesehen vom anderen Maßstab, die abweichenden Koeffizienten erklärt.

#### LITERATUR

- [1] H. Brauner, Die verallgemeinerten Böschungsflächen. Math. Ann. **143** (1961), 431—439.
- [2] H. Brauner, Die windschiefen Flächen konstanter konischer Krümmung. Math. Ann. **152** (1963), 257—270.
- [3] W. Kautny, Über die durch harmonischen Umschwung erzeugbaren Strahlflächen. Monatsh. Math. **63** (1959), 169—188.
- [4] E. Kruppa, Zur Differentialgeometrie der Strahlflächen und Raumkurven. Sitzgsber. Österr. Akad. Wiss. **157** (1949), 143—176. — Analytische und konstruktive Differentialgeometrie. Wien, 1957.
- [5] E. Müller- $\ddot{J}$ . Krames, Die Zyklographie (Vorlesungen über Darstellende Geometrie, Bd. II). Wien 1929.
- [6] E. Müller- $\ddot{J}$ . Krames, Konstruktive Behandlung der Regelflächen (Vorlesungen über Darstellende Geometrie, Bd. III). Leipzig/Wien, 1931.
- [7] G. Sannia, Una rappresentazione intrinseca delle rigate. Giorn. Mat. **1925**, 31—47.
- [8] H. Schaal, Über die durch Bewegung eines Streifens erzeugbaren Flächen. Math. Z. **96** (1967), 143—178.
- [9] W. Wunderlich, Höhere Radlinien. Österr. Ingen. Archiv **1** (1947), 277—296.
- [10] W. Wunderlich, Algebraische Böschungslinien dritter und vierter Ordnung. Sitzgsber. Österr. Akad. Wiss. **181** (1973), 353—376.

Angenommen in II. Abteilung

II. 12. 1979.



## O generaliziranim ploham konstantnog nagiba

Walter Wunderlich, Wien

### Sadržaj

Pod »generaliziranim ploham konstantnog nagiba« razumijevaju se prema E. Kruppi takve vitopere pravčaste plohe kod kojih sve izvodnice zatvaraju s jednom horizontalnom osnovnom ravninom isti prikloni kut  $\beta$ , a osim toga se odlikuju konstantnim zavrtnjem  $p \neq 0$ . Klasične razvojne plohe konstantnog nagiba mogu se tada smatrati graničnim slučajem za  $p = 0$ . Za generalizirane plohe konstantnog nagiba daje se jednostavno kinematičko izvođenje: kotrlja li se neka ravnina  $\Pi_0$  po bilo kojem vertikalnom cilindru  $\Gamma_0$ , svaki pravac  $e$ , koji je sa  $\Pi_0$  paralelan i uz  $\Pi_0$  kruto vezan, izvodi jednu generaliziranu plohu  $\Phi$  konstantnog nagiba, a normalna projekcija  $e_0$  od  $e$  na  $\Pi_0$  opisuje pritom pripadnu asimptotsku torzu  $\Phi_0$  konstantnog nagiba. Tada je  $p = \pm a \operatorname{tg} \beta$ , gdje je sa  $a$  označena udaljenost od  $e$  do  $\Pi_0$ . Tim putem ne samo da se dolazi na providan način do poznatih svojstava ploha konstantnog nagiba nego se dobiva više primjera koji su vrijedni pažnje, a među kojima ima i mnogo algebarskih.

Primljeno u II. razredu  
11. 12. 1979.