

Die Netzflächen konstanten Dralls

w. M. Walter Wunderlich (Wien)

(Vorgelegt in der Sitzung der math.-nat. Klasse am 11. März 1982)

(Mit 8 Abbildungen)

1. Einleitung

§ 1.1. Eine *Regelfläche* Φ des reellen, bei Bedarf jedoch ins Komplexe fortgesetzten dreidimensionalen euklidischen Raumes sei in vektorieller Schreibweise wie üblich angesetzt durch

$$\mathfrak{X}(u, v) = \mathfrak{x}(u) + v \cdot \mathfrak{g}(u). \quad (1.1)$$

Φ erscheint dabei festgelegt durch eine geeignete Leitkurve l ($v = 0$) und den veränderlichen Richtungsvektor $\mathfrak{g}(u)$ ihrer geradlinigen Erzeugenden g ($u = \text{const}$). Der die Verwindung des Flächenstreifens längs einer Erzeugenden g messende *Drall* p ist dann bestimmt durch die Formel

$$p = \frac{(\mathfrak{g}, \dot{\mathfrak{g}}, \ddot{\mathfrak{g}})}{(\mathfrak{g} \times \dot{\mathfrak{g}})^2}, \quad (1.2)$$

wobei der Punkt die Ableitung nach u andeutet [7].

Den *konstant gedrahten Regelflächen* $p = \text{const}$ galt seit jeher ein besonderes Interesse. Durch $p = 0$ sind bekanntlich (im Reellen) die Torsen und Kegel gekennzeichnet, durch $p = \infty$ die Zylinder. Die windschiefen Regelflächen konstanten Dralls $p = b \neq 0$ wurden wiederholt von verschiedenen Gesichtspunkten aus studiert; man vergleiche hierzu die zusammenfassenden Berichte von H. Brauner [2] und bei O. Giering [3]. In der der vorliegenden Abhandlung vorausgegangenen Arbeit [8] hat der Verfasser die einschlägigen *Gewindelflächen* untersucht, also die in einem linearen Strahlkomplex enthaltenen Regelflächen festen Dralls. Hierzu gehören neben den

einschaligen Drehhyperboloiden und den (transzendenten) Regelschraubflächen gewisse algebraische Regelflächen dritten und vierten Grades, denen seit der Entdeckung des kubischen Repräsentanten durch J. Krames [4] erhöhtes Augenmerk zugewandt worden ist.

In [8] wurden vor allem jene konstant gedrahten Regelflächen betrachtet, die in einem einzigen (regulären oder singulären) Gewinde enthalten sind; sie hängen noch von einer willkürlich wählbaren Skalarfunktion ab. Die systematische Untersuchung solcher Flächen, die zwei und damit ∞^1 Gewinden angehören, also der *Netzflächen* festen Dralls, wurde damals zurückgestellt und soll jetzt nachgetragen werden.

§ 1.2. Als *Strahlnetz* wird bekanntlich die Menge der ∞^2 Treffgeraden von zwei windschiefen „Brennstrahlen“ h und \bar{h} bezeichnet, wobei — nach allfälliger Erweiterung des Raumes ins Komplexe — drei Arten von reellen Strahlnetzen zu unterscheiden sind: „hyperbolische Netze“ (h und \bar{h} reell und verschieden); „parabolische Netze“ (h und \bar{h} reell und zusammengerückt); „elliptische Netze“ (h und \bar{h} konjugiert-hochimaginär). Netzflächen sind also dementsprechend zu klassifizierende Regelflächen mit zwei *Leitgeraden* h, \bar{h} .

Die Bestimmung der Netzflächen festen, endlichen und nichtverschwindenden Dralls läuft auf die Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung hinaus und hängt nicht mehr von einer willkürlichen Funktion ab, sondern nur von den Netzdaten und dem vorgeschriebenen Drallwert. Die Integration läßt sich im Fall des elliptischen Drehnetzes (h und \bar{h} isotrop) explizit durchführen (Kap. 2). Gleiches gilt für den Fall des parabolischen Netzes (Kap. 5), wobei sich eine ganze Familie von algebraischen Lösungen einstellt; dieser gehören u. a. die kubische Fläche von J. Krames [4] und die biquadratische Fläche von H. Brauner [1] an. — Die Fälle des allgemeinen elliptischen Netzes (Kap. 3) sowie des hyperbolischen Netzes (Kap. 4) lassen sich durch zweckdienliche Substitutionen auf Quadraturen zurückführen, die jedoch auf elliptische Integrale 3. Gattung hinauslaufen und, abgesehen von einer bzw. zwei Scharen von reellen einschalenigen Drehhyperboloiden, keine algebraischen Lösungen liefern. Hierbei gelangt man zu der unerwarteten Feststellung, daß die in jeder der erwähnten Scharen enthaltenen ∞^1 Hyperboloide durchwegs den gleichen Drall aufweisen.

2. Fall des elliptischen Drehnetzes

§ 2.1. Der Anfang soll mit einem einfachen Sonderfall gemacht werden, nämlich mit dem elliptischen *Drehnetz*. Wählt man das (reelle) Gemeinlot der beiden isotropen Brennstrahlen h und \bar{h} als z -Achse eines kartesischen Koordinatensystems ($O; x, y, z$), so lassen sich dieselben ansetzen mit

$$y = \pm i x, z = \mp i a, \text{ wobei } a > 0, i^2 = -1. \quad (2.1)$$

Durch jeden Punkt $G(x_0, y_0, 0)$ der „Grundebene“ $z = 0$ geht genau ein Netzstrahl g ; sein Richtungsvektor ist $g = (y_0, -x_0, a)^T$, wie leicht nachzuprüfen ist. Die Netzstrahlen g können mithin als die Bahntangenten ihrer Grundpunkte G bei einer Linksschraubung um die z -Achse mit dem Schraubparameter $-a$ aufgefaßt werden.

Wird nun zur Festlegung einer dem Netz angehörenden Regelfläche Φ deren „Grundspur“ als Leitlinie l verwendet, so hat man für die im Ansatz (1.1) auftretenden Vektoren (mit Unterdrückung des Index 0) zu nehmen:

$$\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} x(u) \\ y(u) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} y(u) \\ -x(u) \\ a \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Die Auswertung der Drallformel (1.2) liefert dann den Ausdruck

$$p = a \frac{(x^2 + y^2 + a^2)(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{a^2(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + (\dot{x}y - x\dot{y})^2}. \quad (2.3)$$

Wie man sieht, ist der Drall bei reellen Flächen stets positiv.

§ 2.2. Die Ermittlung der gesuchten Netzflächen festen Dralls $p = b = \text{const}$ verlangt mithin die Integration jener Differentialgleichung, die aus (2.3) mit $p = b > 0$ hervorgeht, wenn man \dot{x} durch $d\dot{x}$ und \dot{y} durch $d\dot{y}$ ersetzt. Sie liefert eine Schar von brauchbaren *Grundspuren* l .

Im Hinblick auf die Rotationssymmetrie des Drehnetzes läge der Übergang zu Polarkoordinaten in der Grundebene nahe, doch ist es günstiger, auf die *Stützfunktion* $q(u)$ der Grundspur l loszusteuern. Sei also die Tangentenschar von l angesetzt durch

$$x \cos u + y \sin u = q(u). \quad (2.4)$$

Mit Benützung der Ableitung von (2.4) nach u ergibt sich so für l die Parameterdarstellung

$$x = q \cos u - \dot{q} \sin u, \quad y = q \sin u + \dot{q} \cos u. \quad (2.5)$$

Unter Beachtung von

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = (q + \dot{q})^2, \quad x\dot{y} - \dot{x}y = q(q + \dot{q})$$

erhält nun die Differentialgleichung (2.3) die Gestalt

$$a(a^2 + q^2 + \dot{q}^2) = b(a^2 + q^2). \quad (2.6)$$

Hierbei ist durch den gemeinsamen Faktor $(q + \dot{q})^2$ gekürzt worden, wodurch lediglich die ausgearteten (punktförmigen) Lösungen $q = A \cos u + B \sin u$ ($x = A, y = B$) ausgeschaltet wurden. Die nichttrivialen Lösungen ergeben sich mittels der Substitution

$$q = a \cdot \operatorname{sh} w, \quad (2.7)$$

welche (2.6) in

$$a(1 + w^2) = b \quad (2.8)$$

transformiert. Hieraus folgt dann über

$$w = \gamma u + c \quad \text{mit} \quad \gamma^2 = (b/a) - 1 \quad (2.9)$$

die gesuchte, für $b \geq a$ reelle Lösung

$$q = a \cdot \operatorname{sh}(\gamma u + c). \quad (2.10)$$

§ 2.3. Die Bauart der Stützfunktion (2.10) läßt erkennen, daß die *Grundspur* l für $\gamma \neq 0$ ($b > a$) eine sogenannte *Parazykloide* ist; als Repräsentant der Drehschar mag das Exemplar $c = 0$ dienen (Abb. 1), aus welchem die übrigen Lösungen durch Drehung um den Ursprung O hervorgehen. Es handelt sich hierbei um eine gespitzte Radlinie, deren Spitzen ($\gamma u = 0 \pmod{\pi}$) auf dem reellen Kreis $x^2 + y^2 = \gamma^2 a^2 = a(b - a)$ liegen, während die Scheitel ($\gamma u = i\pi/2 \pmod{\pi}$) dem nullteiligen Kreis $x^2 + y^2 + a^2 = 0$ angehören. Die Parazykloide entsteht als Punktbahn beim Rollen eines imaginären Kreises mit dem Durchmesser $(\gamma + i)a$ oder $(\gamma - i)a$ auf dem reellen Spitzenkreis k (Radius γa)¹. Ihre Parameterdarstellung lautet gemäß (2.5):

$$\begin{aligned} x &= a(\operatorname{sh} \gamma u \cos u - \gamma \operatorname{ch} \gamma u \sin u), \\ y &= a(\operatorname{sh} \gamma u \sin u + \gamma \operatorname{ch} \gamma u \cos u). \end{aligned} \quad (2.11)$$

¹ Die Parazykloide l (2.10) ist *ebene Bündelaxodrome*: Sie durchsetzt die Erzeugenden ihres Verbindungskegels mit dem Punkt $(0, 0, a)$ unter dem konstanten Winkel $\vartheta = \arccot \gamma$, geht also bei der Vererbung dieses Kegels in eine logarithmische Spirale über.

Nunmehr läßt sich mit Benützung der Ansätze (1.1) und (2.2) auch eine Darstellung der zugehörigen *Netzfläche* Φ in der Gestalt

$$X = x + vy, \quad Y = y - vx, \quad Z = av \quad (2.12)$$

hinschreiben, wobei für x und y die Ausdrücke (2.11) einzusetzen sind. Mit $v = \mp i$ gelangt man zu den Brennstrahlen h, \bar{h} (2.1). Für andere Werte $v = \text{const}$ ergeben sich die zur Grundspur l ($v = 0$) *ähnlichen Schichtenlinien* von Φ .

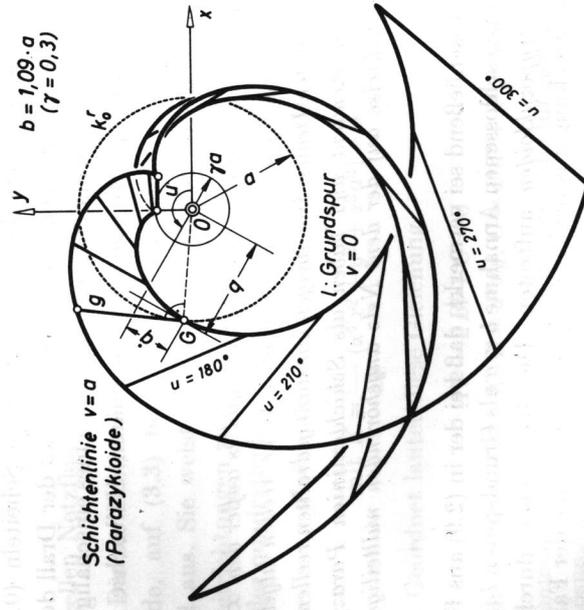


Abb. 1. Konstant gedrehte, einem elliptischen Drehnetz angehörende Regelfläche

Macht man die nullteilige Kugel $x^2 + y^2 + z^2 + a^2 = 0$ zur Maßquadratik einer projektiven (elliptischen) Metrik Cayley-Kleinschen Musters, so sind die Erzeugenden g von Φ als „parallel“ im Sinne Cliffords anzusehen; die Netzfläche Φ kann daher als *Cliffordscher Zylinder* angesprochen werden. Auf Grund ihrer Radlinienbasis l gehört die Fläche Φ zu den in [7] betrachteten Schraubabschieblflächen eines quaselliptischen Raumes; sie trägt zwei Scharen von kongruenten (allerdings imaginären) quasielliptischen Schraublinien, gekennzeichnet durch $2 \arctg v = (1 \pm i\gamma)u + \text{const}$.

§ 2.4. Für die spezielle Annahme $\gamma = 0$ ($b = a$) folgt aus (2.10) $q = \text{const}$ und damit über (2.5):

$$x = q \cdot \cos u, \quad y = q \cdot \sin u. \quad (2.13)$$

Die zu einer solchen Kreisbasis l gehörige Netzfläche Φ ist ein einschaliges Drehhyperboloid

$$\frac{X^2 + Y^2}{q^2} - \frac{Z^2}{a^2} = 1 \quad (2.14)$$

mit den vom Kehlkreisradius q unabhängigen Scheiteln $(0, 0, \pm ia)$. Damit bestätigt sich die bekannte Tatsache, daß der Drall der gegenüber der Achse linksgewundenen Erzeugenden eines einschaligen Drehhyperboloids mit dem Betrag der imaginären Halbachse übereinstimmt.

Zusammenfassend gilt also

Satz 1: *In einem elliptischen Drehnetz gibt es außer den ∞^1 in ihm enthaltenen einschaligen Drehhyperboloiden keine reellen algebraischen Regelflächen festen Dralls. Die übrigen konstant gedrahten reellen Netzflächen sind transzendent und haben als Schichtenlinien Parazykloiden, deren Scheitelkreise auf der dem Netz angehörenden nullteiligen Kugel liegen.*

§ 2.5. Abschließend sei vermerkt, daß bei der in (2.9) aus Realitätsgründen ausgeschlossenen Annahme $b < a$ als Grundspuren l imaginäre Epi- oder Hypozykloiden auftreten. Dieselben gehen durch 1-fache zentrische Streckung aus reellen Zykliden hervor, die der Familie mit der Charakteristik $(1 + \beta) : (1 - \beta)$ angehören, wenn man die jetzt rein imaginär ausfallende Konstante γ mit $i\beta$ bezeichnet. Für rationale Werte von β sind die Zyklide l und damit auch die Netzfläche Φ sogar algebraisch, aber eben nicht reell. Für $\beta = 1/3$ ($b = 8a/9$) etwa ist l eine Kardioide, für $\beta = 3$ ($b = -8a$) ein Steinerscher Dreispitz; die zugehörigen Netzflächen sind vom Grad 4 bzw. 6.

3. Fall des elliptischen Netzes mit nichtisotropen Brennstrahlen

§ 3.1. Macht man auch hier wieder das Gemeinlot der beiden konjugiert-hochimaginären Brennstrahlen h, \bar{h} zur z -Achse, so lassen sie sich ansetzen mit

$$y = \pm \alpha i x, \quad z = \bar{1} i a, \quad \text{wobei } 0 < \alpha < 1, \quad a > 0. \quad (3.1)$$

Diese Annahme geht aus dem Ansatz (2.1) für das Drehnetz ($\alpha = 1$) durch α -fache Stauchung der Ordinaten y hervor. Dementsprechend sind die Definitionen (2.2) folgendermaßen zu modifizieren:

$$\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} x(u) \\ y(u) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{g} = \begin{pmatrix} y/\alpha \\ -\alpha x \\ a \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Damit liefert die Drallformel (1.2) den Wert

$$p = \frac{a}{\alpha} \cdot \frac{(\alpha^4 x^2 + y^2 + \alpha^2 a^2)(\alpha^2 x^2 + y^2)}{\alpha^2 (\alpha^4 x^2 + y^2) + \alpha^2 (\dot{x}y - x\dot{y})^2}, \quad (3.3)$$

der bei reellen Netzflächen wiederum stets positiv ist.

§ 3.2. Die zur Bestimmung von Netzflächen festen Dralls $p = b > 0$ zu lösende, auf (3.3) beruhende Differentialgleichung sieht wenig einladend aus. Sie weist jedem Punkt $G(x, y)$ der Grundebene zwei Fortschreitrichtungen zu, deren Richtungskonstanten $t = dy/dx = \dot{y}/\dot{x}$ sich aus der quadratischen Gleichung

$$\alpha^2 (t^2 + \alpha^4) + \alpha^2 (xt - y)^2 = K (t^2 + \alpha^2) \quad (3.4)$$

mit $K = \frac{a}{\alpha b} (\alpha^4 x^2 + y^2 + \alpha^2 a^2) > 0$

ergeben². Geordnet lautet diese Gleichung

$$At^2 - 2Bt + C = 0 \quad (3.5)$$

mit $A = a^2 + \alpha^2 x^2 - K$, $B = \alpha^2 xy$, $C = \alpha^4 a^2 + \alpha^2 y^2 - \alpha^2 K$.

Zusammenfallende Fortschreitrichtungen, die für gewöhnlich Spitzen der Lösungskurven anzeigen, sind durch verschwindende Diskriminante

$$D = B^2 - AC = 0 \quad (3.6)$$

gekennzeichnet. Diese Bedingung läßt sich unter Heranziehung der in (3.5) und (3.4) erklärten Ausdrücke umformen zu

$$D = \frac{\alpha K}{b} [\alpha^3 (b - \alpha a) x^2 + (\alpha b - a) y^2 - \alpha (\alpha b - a) (b - \alpha a)] = 0. \quad (3.7)$$

Der Spitzenort erweist sich damit als Kegelschnitt k

$$\frac{\alpha^2 x^2}{\alpha b - a} + \frac{y^2}{\alpha (b - \alpha a)} = a, \quad (3.8)$$

² Die zur graphischen Integration der Differentialgleichung verwendbaren Isoklinen $t = \text{const}$ sind Kegelschnitte.

sofern $b \neq a/\alpha$ und $b \neq \alpha a$. Dieser Kegelschnitt k ist eine *Ellipse* für $b > a/\alpha$ oder eine *Hyperbel* für $\alpha a < b < a/\alpha$; die Annahme $b < \alpha a$ scheidet aus, weil dann wegen $D < 0$ keine reellen Lösungskurven zustandekommen.

Die zu verschiedenen Drallwerten b gehörigen Spitzenkegelschnitte k erfüllen eine *lineare Schar* mit den vier gemeinsamen (zu h und \bar{h} parallelen) Tangenten $y = \pm \alpha x \pm a \sqrt{1 - \alpha^2}$ (sämtliche Vorzeichenkombinationen!). Die Schar enthält mit $b = 0$ auch den nullteiligen Kegelschnitt $K = 0$. Dieser Kegelschnitt k_0 ist eine singuläre Lösung der Differentialgleichung (3.3) und wird von allen übrigen Lösungskurven berührt, wie man leicht nachprüft. Wegen $K = 0$ gilt auch $g^2 = 0$: k_0 trägt mithin die Spurpunkte aller isotropen Netzstrahlen und kann als „Netzriß“ des absoluten Kegelschnitts angesprochen werden. Er ist die Grundspur einer imaginären, durch konstant verschwindenden Drall gekennzeichneten und doch windschiefen algebraischen Netzfläche 4. Grades.

§ 3.3. Der spekulative Versuch, die Differentialgleichung (3.3) auf ein krummliniges Koordinatensystem zu transformieren, welches sich auf die Kegelschnittsschar (3.8) stützt — also affin zum Orthogonalnetz konfokaler Ellipsen und Hyperbeln ist —, erwies sich als zielführend. Mithilfe der entsprechenden Substitutionen

$$\alpha x = e \cdot \operatorname{sh} w \sin u, \quad y = e \cdot \operatorname{ch} w \cos u \quad \text{mit} \quad e^2 = (1 - \alpha^2) a^2 \quad (3.9)$$

nimmt (3.3) nach einiger Rechnung und Kürzung durch den Faktor $\sin^2 u + \operatorname{sh}^2 w \neq 0$ die folgende Gestalt an:

$$\alpha a b \left(\frac{d u^2}{a^2 - e^2 \sin^2 u} + \frac{d w^2}{a^2 + e^2 \operatorname{sh}^2 w} \right) = d u^2 + d w^2. \quad (3.10)$$

Nach Trennung der Variablen ergibt sich so die Lösung

$$\int \sqrt{\frac{a(\alpha b - a) + e^2 \sin^2 u}{a^2 - e^2 \sin^2 u}} d u \pm \int \sqrt{\frac{a(a - \alpha b) + e^2 \operatorname{sh}^2 w}{a^2 + e^2 \operatorname{sh}^2 w}} d w = \text{const.} \quad (3.11)$$

Mit Ausnahme der elementar auswertbaren Sonderfälle $\alpha b = a$ und $b = \alpha a$ (siehe § 3.4) handelt es sich um *elliptische Integrale 3. Gattung*. Anschließend soll zunächst der erste Sonderfall erörtert werden; der zweite kann aus Realitätsgründen außer Betracht bleiben, weil dann gemäß (3.7) $D < 0$ wäre.

§ 3.4. Mit $b = a/\alpha$ findet man für die Integrale in (3.11), die mit φ und ψ bezeichnet seien, die Ausdrücke

$$\varphi = \int \frac{e \sin u \cdot d u}{a^2 - e^2 \sin^2 u} = -\operatorname{arsh} \left(\frac{e}{\alpha a} \cos u \right) \quad (3.12)$$

und

$$\psi = \int \frac{e \operatorname{sh} w \cdot d w}{a^2 + e^2 \operatorname{sh}^2 w} = \operatorname{arsh} \left(\frac{e}{\alpha a} \operatorname{ch} w \right). \quad (3.13)$$

Die Lösung läßt sich daher darstellen durch

$$e \cdot \cos u = -\alpha a \cdot \operatorname{sh} \varphi, \quad e \cdot \operatorname{ch} w = \alpha a \cdot \operatorname{sh} \psi \quad \text{mit} \quad \varphi \pm \psi = \gamma = \text{const.} \quad (3.14)$$

Die dadurch auf Grund der Gleichungen (3.9) bestimmte *Grundspur* l ist offensichtlich algebraisch. Um zu einer impliziten Darstellung von l zu gelangen, sind aus den fünf Gleichungen (3.9) und (3.14) die vier Veränderlichen u , w , φ und ψ zu eliminieren. Dies kann etwa folgendermaßen geschehen: Man bilde unter Benutzung des Additionstheorems für $\pm \operatorname{sh} \psi = \operatorname{sh}(\gamma - \varphi)$ den Ausdruck

$$\begin{aligned} \alpha^2 x^2 + y^2 + e^2 &= e^2 (\operatorname{ch}^2 w + \cos^2 u) = e^2 a^2 (\operatorname{sh}^2 \psi + \operatorname{sh}^2 \varphi) = \\ &= \alpha^2 a^2 (\operatorname{sh}^2 \gamma - \operatorname{ch} \gamma \operatorname{sh} \varphi \operatorname{sh} \psi) \end{aligned}$$

und vergleiche ihn mit $ey = \mp \alpha^2 a^2 \operatorname{sh} \varphi \operatorname{sh} \psi$. So findet man mit Beachtung von $e^2 = (1 - \alpha^2) a^2$ die parameterfreie Gleichung

$$\alpha^2 x^2 + (y \mp e \operatorname{ch} \gamma)^2 = a^2 \operatorname{sh}^2 \gamma, \quad (3.15)$$

welche die Grundspur l der gesuchten Netzfläche Φ als *Ellipse* ausweist³. Die *Netzfläche* Φ selbst ergibt sich dann gemäß (1.1) und (3.2), wenn man in (3.15) die Ausdrücke

$$\alpha x = \frac{\alpha a X - Y Z}{Z^2 + a^2}, \quad y = \frac{a Y + \alpha X Z}{Z^2 + a^2} \quad a \quad (3.16)$$

einsetzt. Die so gewonnene Gleichung

$$a^2 (\alpha^2 X^2 + Y^2) \mp 2 a e \operatorname{ch} \gamma (a Y + \alpha X Z) = (a^2 \operatorname{sh}^2 \gamma - e^2 \operatorname{ch}^2 \gamma) (Z^2 + a^2) \quad (3.17)$$

³ Das bei Variation der Konstante γ in (3.15) entstehende einparametrische System untereinander ähnlicher und ähnlich gelegener Ellipsen l (Abb. 2) besitzt als Hüllkurve den nullteiligen Kegelschnitt k_0 ($K = 0$), der in § 3.2 als Netzriß des absoluten Kegelschnitts gedeutet wurde. Das Ellipsensystem ist affin zu jenem Kreissystem, das sich bei der zyklographischen Abbildung einer zur Bildebene symmetrischen Hyperbel einstellt [6, S. 285 ff.].

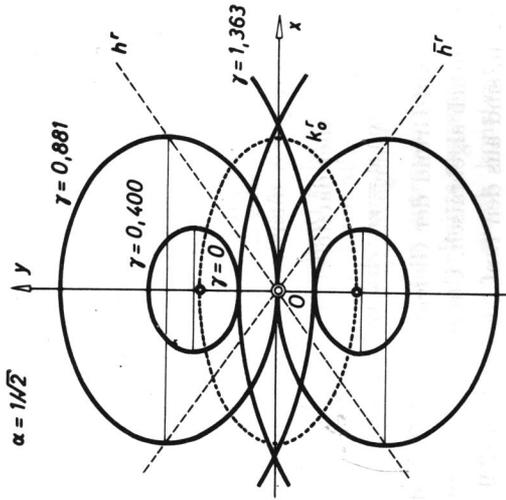


Abb. 2. Grundspurellipsen von Drehhyperboloiden aus einem elliptischen Netz.

lehrt dann, daß Φ eine Quadrik ist, und zwar — wegen des konstanten Dralls — ein einschaliges Drehhyperboloid.

Man sieht unschwer ein, daß man mit (3.17) alle in dem elliptischen Strahlnetz enthaltenen einteiligen Drehquadriken erhalten hat. Es gilt somit der merkwürdige

Satz 2: Die einem gegebenen elliptischen Strahlnetz angehörenden Erzeugenden sämtlicher ∞^1 in dem Netz enthaltenen einschaligen Drehhyperboloide haben den gleichen Drall.

§ 3.5. Bei den übrigen, durch elliptische Integrale (3.11) bestimmten Netzflächen Φ festen Dralls $b > 0$ ist zwischen den beiden schon in § 3.2 erwähnten Spielarten zu unterscheiden. Die Unterscheidung bezieht sich auf die Art des Kegelschnitts k (3.8), der die Spitzen der Grundspur l von Φ trägt.

Fall I: $b > a/\alpha$ ($k =$ Ellipse).

Hier ist die Funktion $\varphi(u)$, definiert durch

$$\varphi = \int_0^u \sqrt{\frac{a(ab-a) + e^2 \sin^2 u}{a^2 - e^2 \sin^2 u}} du, \tag{3.18}$$

monoton wachsend, weil der Integrand positiv ist. Gleiches gilt für die Funktion $\psi(w)$, definiert durch

$$\psi = \int_{w_0}^w \sqrt{\frac{e^2 \operatorname{sh}^2 w - a(ab-a)}{e^2 \operatorname{sh}^2 w + a^2}} dw \text{ mit } e \operatorname{sh} w_0 = \sqrt{a(ab-a)} \tag{3.19}$$

im Bereich $w \geq w_0$ (Abb. 3). Hieraus ist zu entnehmen, daß der entsprechende, gemäß (3.11) durch $\varphi - \psi = \gamma = \text{const}$ bestimmte Zweig der Grundspur l spiralenförmig im Außenbereich der Ellipse k ($w = w_0$)

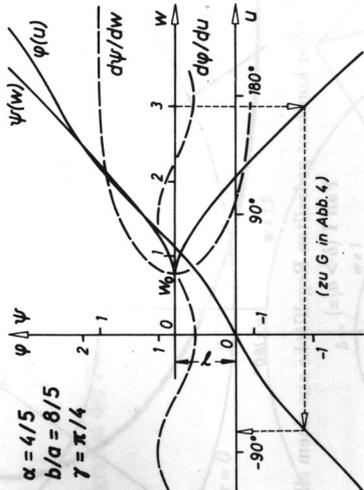


Abb. 3. Diagramm der Funktionen $\varphi(u)$ und $\psi(w)$ im Fall I ($b > a/\alpha$)

verläuft. Er setzt auf k mit einer Spitze in Richtung der Hyperbel an, wobei $\varphi(u_0) = \gamma$. Dort schließt als analytische Fortsetzung eine gegenläufige Spirale an, sodaß die Lösungskurve l der Gestalt nach an eine Ellipsenevolvente erinnert (Abb. 4). — Ähnliche Überlegungen gelten auch für $\varphi + \psi = \gamma$.

Fall II: $\alpha a < b < a/\alpha$ ($k =$ Hyperbel).

Hier ist die Funktion $\varphi(u)$, definiert durch

$$\varphi = \int_{u_1}^u \sqrt{\frac{e^2 \sin^2 u - a(a-\alpha b)}{a^2 - e^2 \sin^2 u}} du \text{ mit } e \sin u_1 = \sqrt{a(a-\alpha b)} \tag{3.20}$$

monoton wachsend im Definitionintervall $u_1 \leq u \leq u_2 = \pi - u_1$. Das zugehörige Schaubild in der u, φ -Ebene ist in analytischer Fortsetzung

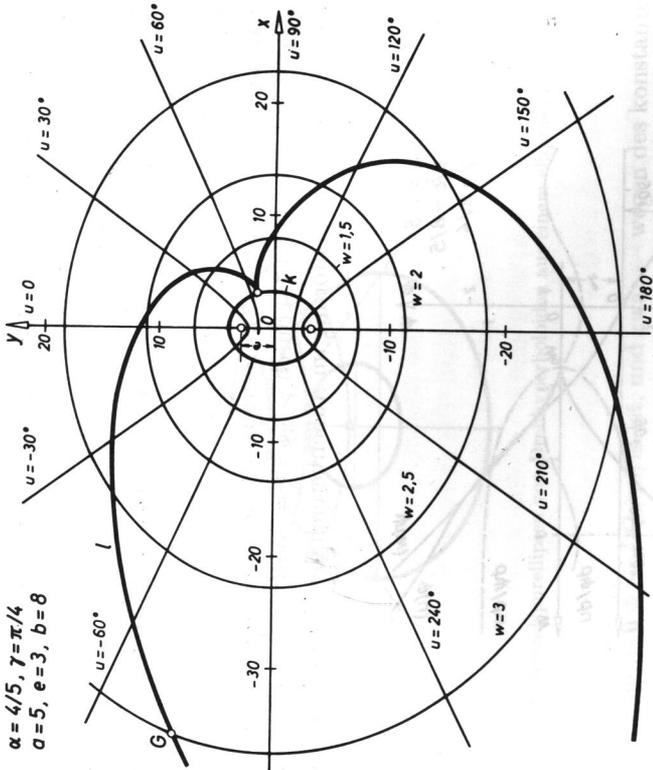


Abb. 4. Grundspur einer konstant gedrahten Regelfläche aus einem elliptischen Netz im Fall I ($b > a/\alpha$)

durch ständige Spiegelungen zu wiederholen, sodaß eine im Streifen $u_1 \leq u \leq u_2$ verlaufende periodische Zickzacklinie entsteht, die auf den Randgeraden mit unendlich vielen reellen Spitzen aufsetzt (Abb. 5). — Die Funktion $\psi(w)$ hingegen, definiert durch

$$\psi = \int_0^w \frac{e^2 \operatorname{sh}^2 w + a(a - ab)}{e^2 \operatorname{sh}^2 w + a^2} dw, \quad (3.21)$$

verläuft wieder durchwegs monoton wachsend. Hieraus ist zu schließen, daß die durch $\varphi \pm \psi = \gamma = \text{const}$ bestimmten Grundspuren l in dem Gebiet zwischen den beiden Ästen $u = u_1$ und $u = u_2$ der Hyperbel k verlaufen, auf diesen abwechselnd mit Spitzen in Richtung von Ellipsen $w = \text{const}$ aufsetzen und solcherart an Hyperbelvoluten gemahnen (Abb. 6).

Die für die beiden Illustrationsbeispiele nötigen Integrationen wurden in Abb. 3 und 5 graphisch durchgeführt, ebenso die Paarung

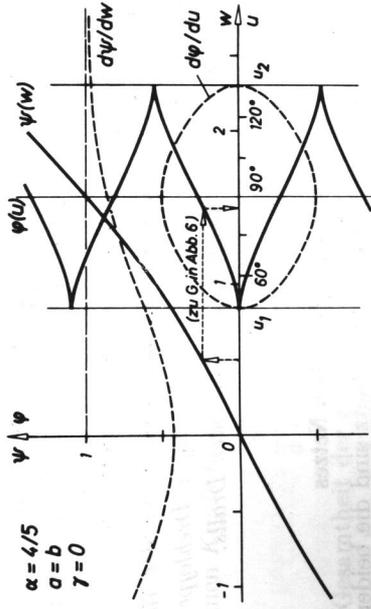


Abb. 5. Diagramm der Funktionen $\varphi(u)$ und $\psi(w)$ im Fall II ($\alpha a < b < a/\alpha$)

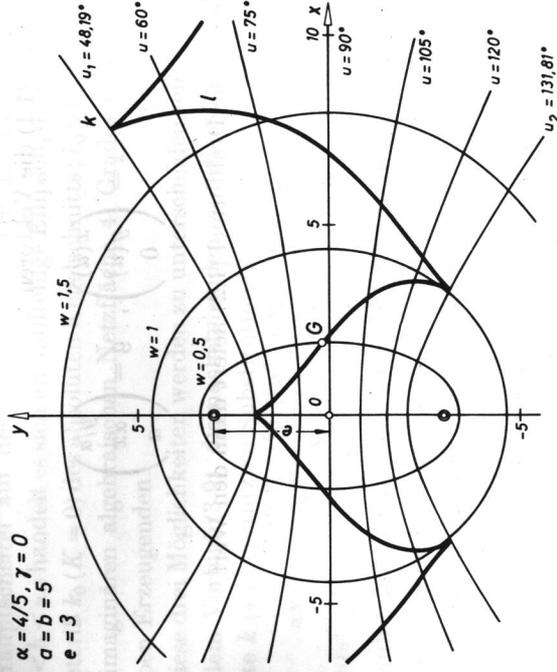


Abb. 6. Grundspur einer konstant gedrahten Regelfläche aus einem elliptischen Netz im Fall II ($\alpha a < b < a/\alpha$)

von durch $\varphi - \psi = \gamma$ gekoppelten u - und w -Werten; mit deren Hilfe wurden dann Punkte G der Grundspuren l in Abb. 4 und 6 gemäß (3.9) berechnet⁴. — Wie schon aus den angestellten qualitativen Überlegungen hervorgeht, sind die Grundspuren in beiden Fällen stets transzendent. Demnach gilt

Satz 3: Ein elliptisches Strahlnetz enthält außer der in Satz 2 genannten einparametrischen Schar von einschaligen Drehhyperboloiden keine reellen algebraischen Regelflächen konstanten Dralls.

4. Fall des hyperbolischen Netzes

§ 4.1. Bei einem hyperbolischen Strahlnetz sind die beiden Brennstrahlen h, \bar{h} reell und windschief. Sie seien gegeben durch

$$y = \pm \alpha x, \quad z = \pm a \text{ mit } 0 < \alpha \leq 1, \quad a > 0. \quad (4.1)$$

Für die im Netz enthaltenen Regelflächen sind dann bei Verwendung des Ansatzes (1.1) die Vektoren

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x(u) \\ y(u) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{pmatrix} y/\alpha \\ \alpha x \\ a \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

zu nehmen. Die Drallformel (1.2) liefert dann den Wert

$$p = \frac{a}{\alpha} \cdot \frac{(\alpha^4 x^2 + y^2 + \alpha^2 a^2)(y^2 - \alpha^2 z^2)}{a^2(\alpha^4 x^2 + y^2) + y^2} + \alpha^2(xy - xy)^2. \quad (4.3)$$

Die konstant gedrahten Netzflächen sind nun bestimmt durch die Differentialgleichung (4.3) mit $p = b = \text{const}$, wobei diesmal sowohl für $b > 0$ als auch für $b < 0$ reelle Lösungen existieren; dieselben stellen jeweils die durch $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}(u)$ beschriebene Grundspur l der Netzfläche Φ dar. Der Grenzfall $b = 0$ ist ohne Interesse, denn er führt über $y = \pm \alpha x + c$ lediglich auf die beiden Scharen von Netzstrahlbüscheln.

⁴ Die numerische Kontrolle und Sicherung der Ergebnisse wurde anschließend im Institut für Informationsverarbeitung der Österreichischen Akademie der Wissenschaften vorgenommen, wofür ich Herrn Dr. F. Firneis zu besonderem Dank verpflichtet bin. — Für die Reinzeichnung sämtlicher Figuren habe ich Herrn Univ.-Ass. Mag. H. Pottmann zu danken.

§ 4.2. Fragt man wie in § 3.2 zunächst nach dem Spitzenort der ∞^1 Lösungskurven l , die zu einem festen Wert b gehören, so findet man über

$$D = \frac{\alpha K}{b} [x^3(\alpha a - b)x^2 + (a + \alpha b)y^2 + \alpha a(\alpha a - b)(a + \alpha b)] = 0$$

$$\text{mit } K = \frac{a}{\alpha b} (\alpha^4 x^2 + y^2 + \alpha^2 a^2) \quad (4.4)$$

wieder einen Kegelschnitt k :

$$\frac{\alpha^2 x^2}{a + \alpha b} + \frac{y^2}{\alpha(\alpha a - b)} + a = 0. \quad (4.5)$$

Die Gesamtheit der zu verschiedenen b -Werten ($\neq \alpha a, \neq -a/\alpha$) gehörigen ∞^1 Kegelschnitte k bildet eine lineare Schar mit den vier gemeinsamen (zu h und \bar{h} parallelen, jedoch imaginären) Tangenten $y = \pm \alpha x \pm ia\sqrt{1 + \alpha^2}$ (sämtliche Vorzeichenkombinationen!). Für $b > \alpha a$ und $b < -a/\alpha$ sind die Scharkurven k Hyperbeln; erstere haben ihre Hauptachse auf der y -Achse, letztere auf der x -Achse. Für $-a/\alpha < b < \alpha a$ handelt es sich um nullteilige Ellipsen, darunter für $b = 0$ der Netzriß k_0 ($K = 0$) des absoluten Kegelschnitts; k_0 ist die Grundspur einer imaginären algebraischen Netzfläche 4. Grades mit durchwegs isotropen Erzeugenden.

Diese drei Möglichkeiten werden zu unterscheiden sein, wenn man, nach dem Vorbild (3.9), die nachstehenden, auf die Schar der Kegelschnitte k (4.5) gestützten Substitutionen

$$\alpha x = e \cdot \text{sh } w \text{ ch } u, \quad y = e \cdot \text{ch } w \text{ sh } u \text{ mit } e^2 = (1 + \alpha^2)a^2 \quad (4.6)$$

vornimmt. Sie transformieren die Differentialgleichung (4.3) nach einiger Rechnung und Kürzung durch den Faktor $\text{sh}^2 u + \text{ch}^2 w \neq 0$ in

$$\alpha ab \left(\frac{dw^2}{e^2 \text{sh}^2 u + \alpha^2 a^2} + \frac{du^2}{e^2 \text{sh}^2 w + a^2} \right) = du^2 - dw^2 \quad (4.7)$$

mit der formalen Lösung

$$\int \sqrt{\frac{e^2 \text{sh}^2 u + \alpha a(\alpha a - b)}{e^2 \text{sh}^2 u + \alpha^2 a^2}} du \pm \int \sqrt{\frac{e^2 \text{sh}^2 w + a(a + \alpha b)}{e^2 \text{sh}^2 w + a^2}} dw = \text{const.} \quad (4.8)$$

Eine elementare Auswertung dieser Integrale ist — abgesehen von dem bereits erledigten Fall $b = 0$ — nur in den Sonderfällen $b = \alpha a$ und $b = -a/\alpha$ möglich, die zunächst behandelt werden sollen.

§ 4.3. Im ersten Sonderfall $b = \alpha a$ ergeben sich für die Integrale in (4.8), die mit φ bzw. ψ bezeichnet seien, die Ausdrücke

$$\varphi = \int \frac{e \operatorname{sh} u \cdot du}{\sqrt{e^2 \operatorname{ch}^2 u - a^2}} = \operatorname{arch} \left(\frac{e}{a} \operatorname{ch} u \right) \quad (4.9)$$

und

$$\psi = \int \frac{e \operatorname{ch} w \cdot dw}{\sqrt{e^2 \operatorname{sh}^2 w + a^2}} = \operatorname{arsh} \left(\frac{e}{a} \operatorname{sh} w \right). \quad (4.10)$$

Mithilfe der neuen Parameter φ und ψ ist dann die Lösung von (4.8) bestimmt durch

$$e \operatorname{ch} u = a \operatorname{ch} \varphi, \quad e \operatorname{sh} w = a \operatorname{sh} \psi \quad \text{mit} \quad \varphi \pm \psi = \gamma = \text{const.} \quad (4.11)$$

Für die ersichtlich algebraische Grundspur l findet man dann durch Elimination von u, w, φ und ψ die parameterfreie Gleichung

$$(\alpha x \mp e \operatorname{sh} \gamma)^2 - y^2 = \alpha^2 a^2 \operatorname{ch}^2 \gamma, \quad (4.12)$$

die l als Hyperbel ausweist. Da l mit den Brennstrahlen h, \bar{h} des Netzes die Fernpunkte gemeinsam hat, ist die zugehörige Netzfläche Φ eine Quadrik, und zwar (wegen des konstanten Dralls) ein einschaliges Drehhyperboloid.

In analoger Weise findet man im zweiten Sonderfall $b = -a/\alpha$ über die Darstellung

$$e \operatorname{sh} u = \alpha a \operatorname{sh} \varphi, \quad e \operatorname{ch} w = \alpha a \operatorname{ch} \psi \quad \text{mit} \quad \varphi \pm \psi = \gamma = \text{const} \quad (4.13)$$

ein zweites System von einschaligen Drehhyperboloiden mit den Grundspurhyperbeln

$$\alpha^2 x^2 - (y - e \operatorname{sh} \gamma)^2 = -\alpha^2 \operatorname{ch}^2 \gamma. \quad (4.14)$$

Auf die Wiedergabe der unschwer herzuleitenden Gleichungen der Hyperboloide selbst — nach dem Muster (3.17) — wird verzichtet. Jedenfalls gilt

Satz 4: Ein hyperbolisches Strahlnetz enthält zwei einparametrische Systeme von reellen einschaligen Drehhyperboloiden. In jedem der beiden Systeme weisen alle Flächen den gleichen Drall auf.

Ein elementarer Beweis dieses merkwürdigen Satzes ist durchaus möglich, und man kann überdies zeigen, daß die Rotationsachsen der

Hyperboloide die beiden Erzeugendenscharen eines und desselben orthogonalen hyperbolischen Paraboloides $X Y + (\alpha + \alpha^{-1}) a Z = 0$ erfüllen. Den Schlüssel bietet der folgende, anscheinend auch noch nicht bemerkte Sachverhalt: Für irgendzwei windschiefe Erzeugende eines einschaligen Drehhyperboloids hat der Quotient aus ihrem halben Abstand und dem Tangens ihres halben Winkels einen festen Wert, dessen Betrag gleich jenem der imaginären Halbachse ist⁵.

§ 4.4. In allen übrigen Fällen — von $b = 0$ abgesehen — sind die Funktionen $\varphi(u)$ und $\psi(w)$ durch die aus (4.8) ersichtlichen elliptischen Integrale 3. Gattung erklärt, wobei sich die Definitionsbereiche nach den in § 4.2 erwähnten Annahmen $b > \alpha a, b < -a/\alpha$ und $-a/\alpha < b < \alpha a$ richten. Die durch $\varphi \pm \psi = \gamma = \text{const}$ bestimmten Lösungskurven (Grundspuren l) und ebenso die damit festgelegten Netzflächen Φ konstanten Dralls b sind dann stets transzendent, und es gilt

Satz 5: In einem hyperbolischen Strahlnetz gibt es außer zwei einparametrischen Scharen von einschaligen Drehhyperboloiden keine reellen algebraischen Regelflächen konstanten, nichtverschwindenden Dralls.

Hier ordnet sich ein Teilegebnis von H. Brauner [1] ein, der auf anderem Wege nachgewiesen hat, daß weder in hyperbolischen noch in elliptischen Netzen reelle, konstant gedrahte Regelflächen dritten und vierten Grades existieren. — Daß es jedoch derartige imaginäre Netzflächen 4. Grades gibt, geht aus der Schlußbemerkung in § 2.5 hervor: Die dort erwähnte Netzfläche mit einer imaginären Kardioide als Grundspur ist 4. Grades (VII. Sturmscher Art) und besitzt neben den beiden isotropen doppelten Leitgeraden eine Rückkehrerzeugende.

5. Fall des parabolischen Netzes

§ 5.1. Das parabolische Strahlnetz kann als Grenzform eines hyperbolischen aufgefaßt werden, dessen Brennstrahlen h und \bar{h} in der Weise zusammenrücken, daß der Quotient aus ihrem Abstand und ihrem Winkel gegen einen endlichen Wert $a \neq 0$ strebt. Das Netz besteht demnach aus ∞^1 Strahlbüscheln, welche den Brennstrahl $h = \bar{h}$ enthal-

⁵ Eine entsprechende Aufgabe wurde den Lesern der Zeitschrift „Elemente der Mathematik“ vom Verfasser zur Lösung gestellt. Mittlerweile hat auch J. Kraus eine einschlägige Note [5] verfaßt, die demnächst erscheinen wird.

ten; die Zuordnung zwischen den Büschelscheiteln (auf h) und den Büschelebenen (durch h) ist dabei eine projektive. Macht man h zur z -Achse eines kartesischen Koordinatensystems ($O; x, y, z$), so kann die projektive Beziehung zwischen den Büschelscheiteln ($0, 0, z$) und den Büschelebenen $y = x \cdot \operatorname{tg} u$ bei geeigneter Wahl der x -Achse durch $z = a \cdot \operatorname{tg} u$ beschrieben werden, wobei $a > 0$ angenommen sei; — a mag mithin als „Eigendrall“ des Netzes angesprochen werden.

Eine in diesem Netz enthaltene *Netzfläche* Φ wird also bei Verwendung der Leitlinie $l = h$ mittels des Ansatzes (1.1) erfaßt, wenn man daselbst

$$\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \cdot \operatorname{tg} u \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{g} = \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ \zeta(u) \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

nimmt. Die Auswertung der Formel (1.2) liefert dann für den *Drall* einer Erzeugenden g ($u = \text{const}$) von Φ den Ausdruck

$$p = \frac{a}{\cos^2 u} \cdot \frac{1 + \zeta^2}{1 + \zeta^2 + \dot{\zeta}^2} > 0. \quad (5.2)$$

Setzt man ferner

$$\zeta = \frac{1}{2}(q - q^{-1}), \quad (5.3)$$

so ergibt sich die vereinfachte Drallformel

$$p = \frac{aq^2(1 + \operatorname{tg}^2 u)}{q^2 + q^2}. \quad (5.4)$$

§ 5.2. Zu den *Netzflächen konstanten Dralls* b gelangt man nun über die Bestimmung der Hilfsfunktion $q(u)$ aus der Differentialgleichung (5.4) mit $p = b > 0$. Nach Trennung der Variablen findet man

$$\ln q = \frac{1}{n} \int \sqrt{1 - n^2 + \operatorname{tg}^2 u} \cdot du \quad \text{mit } n = \sqrt{b/a} > 0. \quad (5.5)$$

Dieses Integral ist stets elementar auswertbar, wobei die Fälle $n < 1$ und $n > 1$ zu unterscheiden sind. Im *Grenzfall* $n = 1$ findet man über

$$q = c \cdot \cos u, \quad \zeta = \frac{c^2 \cos^2 u - 1}{2c \cos u} \quad (5.6)$$

für die mit Φ_1 bezeichnete Netzfläche konstanten Dralls $b = a$ die Parameterdarstellung

$$X = v \cdot \cos u, \quad Y = v \cdot \sin u, \quad Z = a \cdot \operatorname{tg} u + v \frac{c^2 \cos^2 u - 1}{2c \cos u}. \quad (5.7)$$

Aus der durch Elimination von u und v zu gewinnenden parameterfreien Darstellung

$$(1 - c^2) X^2 + Y^2 + 2cXZ = 2acY \quad (5.8)$$

ist dann zu ersehen, daß Φ_1 eine Quadrik ist, wie auch schon in [7] festgestellt wurde. Wegen des konstanten Dralls handelt es sich (für $c \neq 0$) um die im Netz enthaltenen *Drehhyperboloide*. Ihre gemeinsamer Drallwert $b = a$ steht in Einklang mit dem längs der Erzeugenden h ($v = 0$) herrschenden Eigendrall des Netzes.

§ 5.3. Unter der Annahme $n < 1$ ($b < a$) und nach Algebraisierung des Integranden in (5.5) durch die Substitution $\operatorname{tg} u = t$ ergeben sich bei Benützung der Abkürzung $1 - n^2 = m^2 > 0$ über

$$\begin{aligned} \ln q &= \frac{1}{n} \int \sqrt{\frac{t^2 + m^2}{t^2 + 1}} \cdot \frac{dt}{t^2 + 1} = \ln \left(\sqrt{\frac{t^2 + m^2}{t^2 + 1}} - nt \right) - \ln \sqrt{t^2 + 1} + \\ &+ \frac{1}{n} \ln \left(t + \sqrt{\frac{t^2 + m^2}{t^2 + 1}} \right) + \text{const} \end{aligned} \quad (5.9)$$

für die Hilfsfunktion $q(u)$ bzw. ihren Kehrwert die Ausdrücke

$$\begin{aligned} q &= \frac{c}{1-n} \frac{\sqrt{t^2 + m^2} - nt}{\sqrt{t^2 + 1}} \left(t + \sqrt{\frac{t^2 + m^2}{t^2 + 1}} \right)^{1/n}, \\ q^{-1} &= \frac{c^{-1}}{1+n} \frac{\sqrt{t^2 + m^2} + nt}{\sqrt{t^2 + 1}} \left(t + \sqrt{\frac{t^2 + m^2}{t^2 + 1}} \right)^{-1/n}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Nach Vornahme des Parameterwechsels

$$t + \sqrt{t^2 + m^2} = w^n, \quad \text{also } t = \frac{1}{2}(w^n - m^2 w^{-n}), \quad (5.11)$$

sowie Ersatz von v durch $v/\cos u = v \sqrt{t^2 + 1}$, gelangt man zur nachstehenden Darstellung der *Netzfläche* Φ_n im Fall $n < 1$:

$$\begin{aligned} X &= v, \quad Y = \frac{v}{2}(w^n - m^2 w^{-n}) \\ Z &= \frac{a}{2}(w^n - m^2 w^{-n}) + \frac{c v w}{4} [w^n + (1+n)^2 w^{-n}] \\ &\quad - \frac{v}{4c w} [w^n + (1-n)^2 w^{-n}]. \end{aligned} \quad (5.12)$$

§ 5.4. Für rationale Werte der Kennzahl $n = \sqrt{b/a}$ stellen sich, wenn man vom Maßstab absieht, je ∞^1 algebraische Netzflächen Φ_n ein. Schreibt man in einem solchen Fall n als gekürzten Bruch natürlicher Zahlen μ, ν an, also

$$n = \mu/\nu \text{ mit } \nu > \mu > 0, (\mu, \nu) = 1, \quad (5.13)$$

und setzt man $w = \omega^\nu$, so folgt aus (5.12) die rationale Parameterdarstellung

$$\begin{aligned} X &= v, \quad Y = \frac{v}{2}(\omega^\mu - m^2 \omega^{-\mu}), \\ Z &= \frac{a}{2}(\omega^\mu - m^2 \omega^{-\mu}) + \frac{cv \omega^\nu}{4}[\omega^\mu + (1+n)^2 \omega^{-\mu}] - \\ &\quad - \frac{v \omega^{-\nu}}{4c}[\omega^\mu + (1-n)^2 \omega^{-\mu}]. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Hieraus berechnen sich (mit Benützung der Punkte $v = 0$ und $v = \infty$) für die Erzeugenden g ($\omega = \text{const}$) der Fläche Φ_n die sechs Plückerkoordinaten

$$\begin{aligned} p_1 &= 4 \omega^{\mu+\nu}, \\ p_2 &= 2(\omega^{2\mu+\nu} - m^2 \omega^\nu), \\ p_3 &= c[\omega^{2\mu+2\nu} + (1+n)^2 \omega^{2\nu}] - \frac{1}{c}[\omega^{2\mu} + (1-n)^2], \\ p_4 &= -a \omega^{\nu-\mu}(\omega^{2\mu} - m^2)^2, \\ p_5 &= a \omega^\nu(\omega^{2\mu} - m^2), \\ p_6 &= 0. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Durch Beurteilung des Grades der Schnittbedingung $\sum a_i p_i = 0$ findet man für die Fläche Φ_n den Grad

$$N = 2(\mu + \nu), \quad (5.16)$$

sofern nicht eine doppelte Überdeckung der Fläche stattfindet, was für spezielle Werte der Konstante c durchaus vorkommen kann (vgl. § 6.2).

§ 5.5. Die Fernkurve f ($v = \infty$) der Regelfläche Φ_n wird auf Grund des Ansatzes (5.1) für den Richtungsvektor g der Erzeugenden und mit Rücksicht auf die Substitution (5.3) in homogenen Koordinaten beschrieben durch

$$\xi : \eta : \zeta = \cos u : \sin u : \frac{1}{2}(q - q^{-1}). \quad (5.17)$$

Die Untersuchung des Verhaltens von f zum absoluten Kegelschnitt $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 0$ läuft die Gleichung $(q + q^{-1})^2 = 0$ hinaus, in welcher man sich für q und q^{-1} die Ausdrücke (5.10) eingesetzt zu denken hat, nachdem dieselben mittels (5.11) auf die Veränderliche w transformiert wurden. Man gelangt so zu einer Gleichung, die lauter Doppelwurzeln besitzt, so daß durchwegs Berührung der Fernkurve f mit dem absoluten Kegelschnitt vorliegt. Die Berührungstellen sind bestimmt durch die (im allgemeinen einfachen) Lösungen der Gleichung $q + q^{-1} = 0$; dieselbe lautet

$$c^2 w^{2n+2} + (1+n)^2 c^2 w^2 + w^{2n} + (1-n)^2 = 0. \quad (5.18)$$

Unter Umständen können zwei Berührungstellen zu einer Hyperoskulation zusammenrücken, wenn nämlich auch die Ableitung des Polynoms (5.18) verschwindet. Dies geschieht für jene speziellen c -Werte, die der Bedingung

$$(n^2 - 1)c^{2n} = \left(\frac{1-n}{1+n}\right)^n \quad (5.19)$$

genügen, und zwar an den durch $w^{2n} = n^2 - 1$ bestimmten Stellen (vgl. § 6.2).

Im algebraischen Fall $n = \mu/\nu$ (5.13) stimmt die Ordnung der Fernkurve f (5.17) mit dem Grad $N = 2(\mu + \nu)$ der Fläche überein, und f berührt den absoluten Kegelschnitt an N Stellen; bei doppelter Überdeckung sind diese Zahlen allerdings zu halbieren.

§ 5.6. Unter der alternativen Annahme $n > 1$ ($b > a$) ist $m^2 = 1 - n^2 < 0$. Da jedoch in den bisherigen Entwicklungen die Größe m stets nur im Quadrat auftrat (linear bloß in hier nicht wiedergegebenen Zwischenrechnungen), so können sämtliche abgeleiteten Formeln und Gleichungen auch für den Fall $n > 1$ beibehalten werden.

Die einzige Ausnahme bildet die für den algebraischen Fall $n = \mu/\nu$ angegebene Formel (5.16) für den Flächengrad, die wegen $\mu > \nu$ jetzt zu ersetzen ist durch

$$N' = 4\mu, \quad (5.20)$$

sofern nicht die Fläche Φ_n doppelt überdeckt ist, was wieder nur für spezielle c -Werte zu erwarten ist (vgl. § 6.4).

Die Fernkurve f (5.17) hat jedoch im algebraischen Fall nach wie vor die Ordnung $N = 2(\mu + \nu)$. Das Defizit $N' - N = 2(\mu - \nu)$ erklärt

sich aus dem Vorhandensein der beiden Fernerzeugenden $\omega = 0$ und $\omega = \infty$, die je $(\mu - \nu)$ -fach zum Ferngebilde der Fläche Φ_n zählen; sie sind in der Ferngerade der yz -Ebene vereinigt.

Zusammenfassend seien die Hauptresultate festgehalten in

Satz 6: In einem parabolischen Strahlnetz, gekennzeichnet durch den Eigendrall $-a$ längs des Brennstrahls, gibt es unter den Regelflächen festen Dralls b , die allesamt durch (5.12) erfaßt werden, abzählbar unendlich viele, durch (5.14) oder (5.15) dargestellte einparametrische Scharen reeller, rational-algebraischer Flächen, nämlich für jene Werte von $b|a$, die Quadrat einer rationalen Zahl n sind. Hierzu gehört für $n = 1$ ($b = a$) eine Schar von einschaligen Drehhyperboloiden.

6. Algebraische Beispiele zu Kapitel 5

§ 6.1. Die einfachsten Beispiele konstant gedrahter, einem parabolischen Netz angehörender Regelflächen innerhalb der Kategorie $n < 1$ ergeben sich mit der Annahme $n = 1/2$ ($b = a/4$). Zufolge (5.16) handelt es sich bei diesen Flächen $\Phi_{1/2}$ im allgemeinen um rationale Regelflächen 6. Grades. Gemäß (5.14) werden sie beschrieben durch

$$X = v, \quad Y = \frac{v}{2} \left(\omega - \frac{3}{4\omega} \right),$$

$$Z = \frac{a}{2} \left(\omega - \frac{3}{4\omega} \right) + \frac{cv\omega^2}{4} \left(\omega + \frac{9}{4\omega} \right) - \frac{v}{4c\omega^2} \left(u + \frac{1}{4\omega} \right). \quad (6.1)$$

Ihre Fernkurve f ($v = \infty$) ist eine rationale Sextik, die den absoluten Kegelschnitt an sechs Stellen berührt, sofern — mit Rücksicht auf (5.19) — $c^2 \neq 16/27$. Ohne nähere Ausführung sei vermerkt, daß irgend zwei Konstanten c und c' , die durch $cc' = 16/27$ verknüpft sind, ein und dieselbe Fläche $\Phi_{1/2}$ liefern.

Durch jeden Punkt der Leitgerade h ($v = 0$) gehen zwei (mit h komplanare) Erzeugende, so daß längs der Z -Achse h Selbstberührung der Fläche $\Phi_{1/2}$ besteht; die Parameterwerte ω, ω' der beiden Erzeugenden sind durch $\omega\omega' = -3/4$ gekoppelt.

§ 6.2. Kehrt man mittels der unter (5.11) vermerkten und $\omega^2 = w$ berücksichtigenden Substitution

$$\omega = \frac{1}{2} (\sqrt{4t^2 + 3} + 2t), \quad \omega^{-1} = \frac{2}{3} (\sqrt{4t^2 + 3} - 2t) \quad (6.2)$$

zur Veränderlichen t zurück, so lautet die Darstellung von $\Phi_{1/2}$:

$$X = v, \quad Y = vt,$$

$$Z = at + \frac{v}{2c} \left[\left(c^2 + \frac{16}{27} \right) (8t^2 + 9)t + \left(c^2 - \frac{16}{27} \right) (4t^2 + 3)^{3/2} \right]. \quad (6.3)$$

Die am Schluß stehende Irrationalität verschwindet für die speziellen Konstantenwerte $c^* = \pm 4/3\sqrt{3}$, wobei es genügt, die Annahme $c^* > 0$ zu betrachten. Die so gewonnene ausgezeichnete Fläche $\Phi_{1/2}^*$ beschrieben durch

$$X = v, \quad Y = vt, \quad Z = at + \frac{vt}{3\sqrt{3}} (8t^2 + 9), \quad (6.4)$$

ist eine kubische Fläche vom Cayleyschen Typ, die bei Verwendung der Darstellung (6.1) doppelt überdeckt wäre. Ihre Fernkurve f ist eine gespitzte Kubik, die den absoluten Kegelschnitt an zwei Stellen oskuliert. Diese Cayleysche Fläche $\Phi_{1/2}^*$ (mit dem festen Drall $b = a/4$) wurde von J. Krames [4] entdeckt und war das erste nichttriviale Beispiel einer konstant gedrahten algebraischen Regelfläche, wenn man von den kaum untersuchten Binormalflächen algebraischer Raumkurven konstanter Torsion absieht. Eine anschauliche Ansicht zeigt Abb. 7;

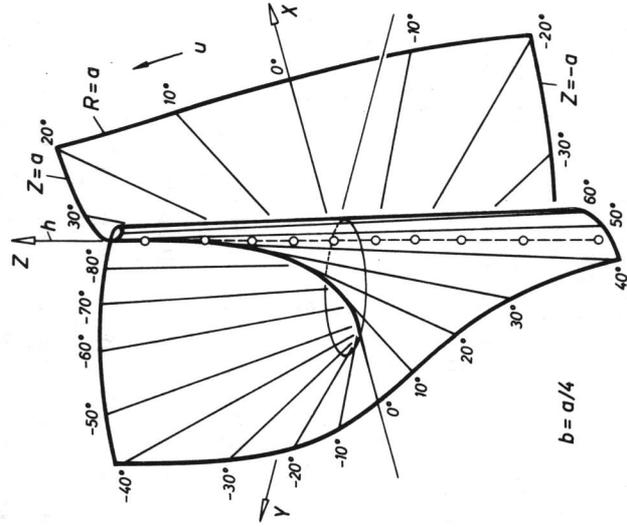


Abb. 7. Konstant gedrahlte Cayleysche Fläche 3. Grades $\Phi_{1/2}^*$ von J. Krames

es läßt sich zeigen, daß der Schnitt der Fläche mit einem koaxialen Drehzylinder $X^2 + Y^2 = R^2$ eine rationale Raumkurve 6. Ordnung ist.

§ 6.3. Die einfachsten Beispiele konstant gedrahter, einem parabolischen Netz angehörender Regelflächen innerhalb der Kategorie $n > 1$ ergeben sich mit der Annahme $n = 2$ ($b = 4a$). Zufolge (5.20) handelt es sich bei diesen Flächen Φ_2 im allgemeinen um rationale Regelflächen 8. Grades. Gemäß (5.12) werden sie beschrieben durch

$$\begin{aligned} X &= v, \quad Y = \frac{v}{2} \left(w^2 + \frac{3}{w^2} \right), \\ Z &= \frac{a}{2} \left(w^2 + \frac{3}{w^2} \right) + \frac{c w v}{4} \left(w^2 + \frac{9}{w^2} \right) - \frac{v}{4 c w} \left(w^2 + \frac{1}{w^2} \right). \end{aligned} \quad (6.5)$$

Das Ferngebilde zerfällt in die doppelt zählende Ferngerade der YZ -Ebene (in der sich die Erzeugenden $w = 0$ und $w = \infty$ vereinigen) und eine rationale Sextik f ($v = \infty$), welche den absoluten Kegelschnitt an sechs Stellen berührt, sofern — mit Rücksicht auf (5.17) — $c^4 \neq 1/27$. Die Leitgerade h ($v = 0$) ist als vierfach anzusehen, weil durch jeden ihrer Punkte vier (mit h komplanare) Erzeugende gehen.

§ 6.4. In dem unter (5.19) einzuordnenen Sonderfall $c^* = 1/\sqrt[4]{27}$ besteht gemäß der mit (5.11) vorgenommenen Substitution

$$w^2 = t + \sqrt{t^2 - 3}, \quad w^{-2} = \frac{1}{3} (t - \sqrt{t^2 - 3}) \quad (6.6)$$

für die ausgezeichnete Fläche Φ_2^* die Parameterdarstellung

$$X = v, \quad Y = vt, \quad Z = at + \frac{c^*}{\sqrt{2}} (t - \sqrt{t^2 - 3})^{3/2}. \quad (6.7)$$

Der Parameterwechsel $t - \sqrt{t^2 - 3} = \tau^2$ liefert schließlich die rationale Darstellung

$$X = v, \quad Y = v(\tau^2 + \sqrt{3}), \quad Z = a(\tau^2 + \sqrt{3}) + v\tau^3/\sqrt[4]{108}. \quad (6.8)$$

Eingehendere Untersuchung lehrt, daß es sich bei Φ_2^* um eine rationale Regelfläche 4. Grades (VIII. Sturmischer Art) handelt, die eine Selbstberührung längs der Z -Achse h und eine Rückkehrerzeugende ($\tau = 0$) aufweist (Abb. 8). Diese „Mohrmannsche“ Fläche 4. Grades (mit dem festen Drall $b = 4a$) wurde von H. Brauner [1] entdeckt und war das erste Beispiel einer konstant gedrahten Regelfläche 4. Grades. Ihre Fernkurve f ist ebenfalls eine gespitzte, den absoluten Kegelschnitt

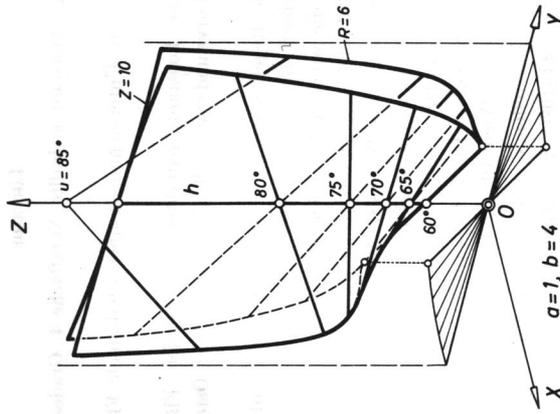


Abb. 8. Konstant gedrahtte Mohrmannsche Fläche 4. Grades Φ_2^* von H. Brauner

doppelt oskulierende Kubik; sie ist kongruent zur Fernkurve der Kramesschen Fläche $\Phi_{1/2}^*$ (§ 6.2), doch wird nur der zu $t \geq \sqrt{3}$ gehörige Teilbogen von reellen Flächenerzeugenden getroffen. Ansonsten teilt Φ_2^* mit $\Phi_{1/2}^*$ die Eigenschaft, als Zentraltorse einen Drehkegel mit 60gradigem Öffnungswinkel zu besitzen.

§ 6.5. Ob es unter den übrigen algebraischen Flächen Φ_n doppelt oder mehrfach überdeckte Sonderformen Φ_n^* gibt, ist nicht geklärt, doch eher zu bezweifeln.

Zuguterletzt sei nochmals auf eine naheliegende, schon in [8] erwähnte Verallgemeinerung hingewiesen, die darin besteht, den in § 5.1 getroffenen Ansatz $z = a \cdot \operatorname{tg} u$ durch $z = a \cdot \operatorname{tg} ku$ zu ersetzen. Die Integration der entsprechenden Differentialgleichung ist in ähnlicher Weise (wie hier für $k = 1$) stets elementar zu bewältigen, da das entscheidende Integral die gleiche Bauart wie in (5.5) aufweist. Die solcherart zu gewinnenden Regelflächen konstanten Dralls gehören zwar für $k \neq 1$ keinem parabolischen Strahlnetz an, wären aber vielleicht einer näheren Untersuchung wert, da sich unter ihnen wieder beliebig viele algebraische finden lassen. Der bemerkenswerte Sonderfall $k = b/a$ wurde in [8] bereits erledigt.

Literatur

- [1] Brauner, H.: Die konstant gedrahlte Netzfläche 4. Grades. *Monatsh. Math.* **65** (1961), 53—73.
- [2] Brauner, H.: Neuere Untersuchungen über windschiefe Flächen. *Jber. DMV* **70** (1967), 61—85.
- [3] Giering, O.: Die konstant gedrahten windschiefen Flächen 4. Grades mit irreduzibler Fernkurve und einer reellen Torsallinie. *Sb. d. Österr. Akad. d. Wiss.* **177** (1968), 257—293.
- [4] Krames, J.: Die Regelflächen 3. Ordnung, deren unendlich ferne Kurve den absoluten Kegelschnitt doppelt oskuliert. *Sb. d. Akad. d. Wiss. Wien* **133** (1924), 65—90. — Über die windschiefen Flächen mit konischer Zentraltrorse. *Monatsh. Math.* **65** (1961), 337—350. — Über die konstant gedrahlte windschiefe Fläche dritten Grades. *Sb. d. Österr. Akad. d. Wiss.* **187** (1978), 297—312.
- [5] Krames, J.: Über die in einem Strahlennetz enthaltenen Drehhyperboloide. *Rad Jugosl. Akad. Zagreb* (im Druck).
- [6] Müller, E., und J. Krames: Die Zyklographie. (Vorlesungen über Darstellende Geometrie, Bd. II). Leipzig/Wien, 1929.
- [7] Wunderlich, W.: Darstellende Geometrie nichteuklidischer Schraubflächen. *Monatsh. Math. Phys.* **44** (1936), 249—279.
- [8] Wunderlich, W.: Gewindflächen festen Dralls. *Sb. d. Österr. Akad. d. Wiss.* **190** (1982), 385—403.