@ by Springer-Verlag 1983

Über Ausnahmefachwerke, deren Knoten auf einem Kegelschnitt liegen

Von

W. Wunderlich, Wien, Österreich

Mit 6 Abbildungen

(Eingegangen am 26. April 1982)

Summary

Exceptional Frameworks Whose Knots Lie on a Conic. If $m \geq 3$ points A_i of a conic k are connected with $n \geq 3$ points B_j of the same conic by $m \cdot n$ rigid rods $A_j B_j$, there will be obtained an exceptional framework. It admits an infinitesimal deformation, provided the joints at A_i und B_j are moveable. The paper considers particular deformations, where all knots are deplacing perpendicularly to the (regular) conic k. After a small deformation, the knots A_i and B_j arrive, respectively, at two different neighbor conics, confocal with k. The corresponding velocity diagram consists of points A_i , B_j lying on a certain conic k, in general similar to k. — Two limit cases, concerning degenerate conics k which split into a pair of concurrent or parallel lines, need a special treatment. Small deformations of the framework transform the two knot lines into a pair of confocal hyperbolas or parabolas, respectively.

1. Einleitung

§ 1.1. Wird ein ebenes, geschlossenes Sechseck $A_1B_2A_3B_1A_2B_3$ durch seine drei Hauptdiagonalen A_iB_i ergänzt, so entsteht für gewöhnlich ein starres Stabwerk. Es ist durch die neun Stablängen A_iB_j (i,j=1,2,3) im allgemeinen bestimmt, allerdings nicht immer eindeutig, denn die Gestaltsermittlung ist, wie in [5] gezeigt wurde, ein Problem 8. Grades.

Sind zwei reelle Lösungen nicht allzu verschieden, so wird ein sprunghafter Übergang von der einen Form in die andere möglich sein. Wie H. Stachel [3] erkannt hat, lassen sich die Knoten A_i und B_j auf zwei gleichartige konfokale Kegelschnitte k, k' verteilen, die nach dem Kippvorgang ihre Rolle tauschen: Die Neulagen A_i' befinden sich dann auf k', die Neulagen B_j' auf k, und zwar liegen A_i und A_i' sowie B_j und B_j' jeweils auf einem Kegelschnitt des zu k und k' orthogonalen Konfokalsystems (Abb. 1). Die Längengleichheit $A_iB_j = A_i'B_j'$ beruht auf dem klassischen Theorem von J. Ivory (1809).

Im Fall zweier Ellipsen k und k' ist dies mittels elliptischer Koordinaten u, v leicht zu bestätigen, die durch

$$x = \cos u \operatorname{ch} v, \qquad y = \sin u \operatorname{sh} v \tag{1.1}$$

eingeführt werden und die Ebene mit einem Orthogonalnetz konfokaler Ellipsen $v={\rm const}$ und Hyperbeln $u={\rm const}$ überziehen; die gemeinsame Exzentrizität

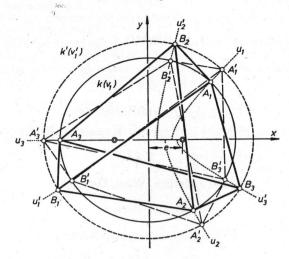


Abb. 1. Gestaltswechsel eines Neunstab-Gelenkwerks

e=1 dient dabei als Längeneinheit. Die Distanz r_{ij} zweier Punkte $A_i(u_i,v_i)$ und $B_i(u_i',v_i')$ ergibt sich aus der Formel

$$r_{ij}^2 = (\cos u_i \operatorname{ch} v_i - \cos u_j' \operatorname{ch} v_j')^2 + (\sin u_i \operatorname{sh} v_i - \sin u_j' \operatorname{sh} v_j')^2. \quad (1.2)$$

Analog gilt für die Distanz r'_{ij} von $A_i'(u_i, v_j')$ und $B_j'(u_j', v_i)$

$$r'_{ij}^2 = (\cos u_i \operatorname{ch} v_j' - \cos u_j' \operatorname{ch} v_i)^2 + (\sin u_i \operatorname{sh} v_j' - \sin u_j' \operatorname{sh} v_i)^2.$$
 (1.3)

Bildet man nun unter Ausquadrieren der Klammern die Differenz von (1.2) und (1.3), so findet man ohne Mühe $r_{ij}^2 - r_{ij}^{\prime 2} = 0$, womit der Satz von Ivory bewiesen ist. Er besagt (in seiner ebenen Fassung), daß in jedem von vier konfokalen Kegelschnitten berandeten (rechtwinkligen) Viereck die beiden Diagonalen gleich lang sind. Bei Anwendung auf das Fachwerk in Fig. 1 ist bloß $v_1 = v_2 = v_3$ und $v_1' = v_2' = v_3'$ anzunehmen.

Im Falle zweier Hyperbeln k und k' vertauschen u und v die Rollen. Im Fall zweier Parabeln wäre der Ansatz

$$x = u^2 - v^2, y = 2uv (1.4)$$

zu verwenden.

§ 1.2. Rücken die beiden in § 1.1 betrachteten Positionen zusammen, so liegt ein wackeliges Fachwerk mit infinitesimaler Beweglichkeit vor, das dadurch gekennzeichnet ist, daß die sechs Knoten einem Kegelschnitt k=k' angehören. Dieses klassische Beispiel eines Ausnahmefachwerks findet sich schon in älteren Lehrbüchern (vgl. etwa [1, S. 443 u. 454] oder [2, S. 11]), sein Ursprung konnte jedoch nicht eruiert werden.

Da die Existenz des Kegelschnittpaars k, k' in § 1.1 nicht leicht einzusehen ist, und gleichzeitig eine Verallgemeinerung angestrebt wird, führen wir zum Nachweis der Wackeligkeit des Stabwerks zunächst ein kartesisches Koordinatensystem ein, dessen Ursprung mit A_1 zusammenfällt, und dessen x-Achse durch A_2 geht. Ferner fassen wir $A_1(0,0), A_2(x_2,0)$ und $A_3(x_3,y_3)$ als irgendwie zwangläufig

bewegliche Punkte auf. Für einen Beobachter im Achsenkreuz erscheint dieses und mit ihm A_1 fest, während A_2 auf der x-Achse wandert und A_3 eine bestimmte Bahn in der Ebene durchläuft. Die Koordinaten x_2 , x_3 und y_3 sind also gewisse Funktionen des Zeitparameters t, die aber nicht näher definiert werden, sondern von welchen nur die Werte x_2 , x_3 , y_3 zur Zeit t=0 sowie die zugehörigen Ableitungen \dot{x}_2 , \dot{x}_3 , \dot{y}_3 , also die Geschwindigkeitskomponenten, bekannt seien (Abb. 2).

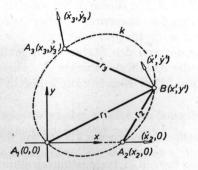


Abb. 2. Zur Herleitung des Knotenkegelschnitts

Wir betrachten ferner einen weiteren beweglichen Punkt B(x', y') und fragen: Wo und in welchem Bewegungszustand muß sich dieser Punkt zur Zeit t=0 befinden, damit alle drei Entfernungen $A_iB=r_i$ stationär sind?

Aus den Distanzformeln

$$x'^{2} + y'^{2} = r_{1}^{2},$$

 $(x' - x_{2})^{2} + y'^{2} = r_{2}^{2},$
 $(x' - x_{3})^{2} + (y' - y_{3})^{2} = r_{3}^{2}$

$$(1.5)$$

folgt durch Ableitung wegen $\dot{r}_i = 0$:

$$x'\dot{x}' + y'\dot{y}' = 0,$$

$$(x' - x_2) (\dot{x}' - \dot{x}_2) + y'\dot{y}' = 0,$$

$$(x' - x_3) (\dot{x}' - \dot{x}_3) + (y' - y_3) (\dot{y}' - \dot{y}_3) = 0.$$
(1.6)

Dies sind drei lineare Gleichungen für die zwei Geschwindigkeitskomponenten x' und y'. Notwendig und hinreichend für die Verträglichkeit der Gleichungen ist das Verschwinden der Koeffizientendeterminante. Ziehen wir gleich die erste Zeile von den übrigen ab, so lautet die Verträglichkeitsbedingung:

$$\begin{vmatrix} x' & y' & 0 \\ -x_2 & 0 & (x'-x_2) \dot{x}_2 \\ -x_3 & -y_3 & (x'-x_3) \dot{x}_3 + (y'-y_3) \dot{y}_3 \end{vmatrix} = 0.$$
 (1.7)

Die Auswertung der Determinante führt auf eine quadratische Gleichung in x' und y', womit die Antwort auf die gestellte Frage gefunden ist: Der Ort der gesuchten Punkte B ist ein gewisser $Kegelschnitt\ k$, von dem zu sehen ist, daß er

die drei Punkte A_i enthält. Hierzu sind bloß in (1.7) für x' und y' der Reihe nach die Koordinatenpaare von A_1 , A_2 und A_3 einzusetzen, was die Determinante tatsächlich zum Verschwinden bringt. — Die Geschwindigkeitskomponenten \dot{x}' , \dot{y}' eines beliebigen Punktes B von k könnten durch Auflösung des (widerspruchsfreien) Gleichungssystems (1.6) ermittelt werden.

Ein beliebiger Punkt B von k kann nun wegen seiner stationären Entfernungen r_i von den Punkten A_i mit diesen durch starre Stäbe gelenkig verbunden werden, ohne daß dadurch der momentane Bewegungszustand behindert wird. Natürlich kann dies gleichzeitig für drei (oder mehr) Punkte B_i von k geschehen, womit die Wackeligkeit des von den Stäben A_iB_i gebildeten Fachwerks nachgewiesen ist. Daß auch die Anzahl der Punkte A_i beliebig erhöht werden kann, sofern sie nur ebenfalls auf dem Kegelschnitt k liegen, wird aus dem nächsten Abschnitt hervorgehen.

2. Verallgemeinerung des klassischen Beispiels

§ 2.1. Unter Verwendung der mit (1.1) eingeführten elliptischen Koordinaten u, v betrachten wir $m \geq 3$ Knoten $A_i(u_i, v_0)$ und $n \geq 3$ davon verschiedene Knoten $B_j(u_j', v_0)$ auf einer Ellipse k ($v = v_0$). Die $m \cdot n$ Strecken A_iB_j repräsentieren ein Stabwerk, von dem gezeigt werden soll, daß es wackelig ist.

Zu diesem Zweck betrachten wir die beweglichen Punkte $A_i(u_i, v(t))$ und $B_j(u_j', v'(t))$, die die Hyperbeln $u = u_i$ bzw. $u = u_j'$ durchlaufen und sich zur Zeit t = 0 auf der Ellipse k befinden sollen; es sei also $v(0) = v'(0) = v_0 > 0$. Die veränderliche Entfernung r_{ij} von A_i und B_j ergibt sich aus

$$r_{ij}^2 = (\cos u_i \, \operatorname{ch} v - \cos u_j' \, \operatorname{ch} v')^2 + (\sin u_i \, \operatorname{sh} v - \sin u_j' \, \operatorname{sh} v')^2. \tag{2.1}$$

Damit r_{ij} zur Zeit t=0 stationär ist, muß $\dot{r}_{ij}(0)=0$ sein. Dies führt über die Ableitung von (2.1) auf die Forderung

$$(\cos u_{i} - \cos u_{j}') \operatorname{ch} v_{0}(\dot{v}_{0} \cos u_{i} - \dot{v}_{0}' \cos u_{j}') \operatorname{sh} v_{0} + + (\sin u_{i} - \sin u_{j}') \operatorname{sh} v_{0}(\dot{v}_{0} \sin u_{i} - \dot{v}_{0}' \sin u_{j}') \operatorname{ch} v_{0} = 0,$$

$$(2.2)$$

die gleichbedeutend ist mit

$$\operatorname{sh} v_0 \operatorname{ch} v_0 [1 - \cos (u_i - u_i)] (\dot{v}_0 + \dot{v}_0) = 0. \tag{2.3}$$

Diese Bedingung wird — für alle Indexpaare gemeinsam — durch

$$\dot{v}_0 + \dot{v}_0' = 0 \tag{2.4}$$

erfüllt, womit die behauptete Wackeligkeit des Fachwerks nachgewiesen ist.

§ 2.2. Setzt man für kleines t $\dot{v}_0 t = \delta$, so ist gemäß (2.4) $\dot{v}_0{}'t = -\delta$, und man hat in erster Näherung $v = v_0 + \delta$ und $v' = v_0 - \delta$. Der Wackelvorgang kann mithin etwas unscharf folgendermaßen beschrieben werden: Die Knoten A_i rücken auf ihren Bahnhyperbeln, also normal zur Ellipse k ($v = v_0$), auf eine "benachbarte" konfokale Ellipse $v = v_0 + \delta$ weiter, die Knoten B_j hingegen auf die Ellipse $v = v_0 - \delta$ (Abb. 3).

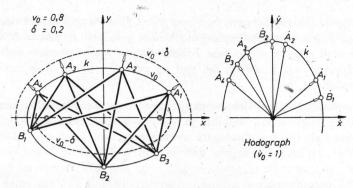


Abb. 3. Wackeliges Zwölfstab-Fachwerk mit Knotenellipse

Die Wackelgeschwindigkeiten werden zufolge des Ansatzes (1.1) für die Knoten A_i bestimmt durch die momentanen Komponenten

$$\dot{x}_i = \dot{v}_0 \text{ sh } v_0 \cos u_i, \qquad \dot{y}_i = \dot{v}_0 \text{ ch } v_0 \sin u_i,$$
 (2.5)

für die Knoten B_i hingegen durch

$$\dot{x}_{j}' = -\dot{v}_{0} \operatorname{sh} v_{0} \cos u_{j}', \qquad \dot{y}_{j}' = -\dot{v}_{0} \operatorname{ch} v_{0} \sin u_{j}'.$$
 (2.6)

Stellt man die Geschwindigkeitsvektoren in einem Diagramm ("Hodograph") durch die mit (2.5) bzw. (2.6) definierten Punkte \dot{A}_i bzw. \dot{B}_j oder deren Ortsvektoren dar, so sieht man, daß alle diese Punkte auf einer Ellipse \dot{k} mit den Halbachsen \dot{v}_0 sh v_0 und \dot{v}_0 ch v_0 liegen, allerdings in anderer Verteilung als die Knoten A_i und B_j auf der ähnlichen Ellipse k, die ja die Halbachsen ch v_0 und sh v_0 besitzt (Abb. 3). Hierdurch wird zufolge [6] erhärtet, daß die durch (2.4) bedingte Knotenverschiebung nicht bloß eine starre Verlagerung des Fachwerks bedeutet, was auch aus dem Umstand geschlossen werden kann, daß die Bahnnormalen der Knoten (als Tangenten der Ellipse k) kein Strahlbüschel bilden (vgl. § 3.2).

§ 2.3. Im Falle einer Knotenhyperbel verlaufen die auf den Ansatz (1.1) gestützten Entwicklungen mit vertauschten Rollen von u und v ganz ähnlich. Man muß nur durch Zulassung von komplexen Werten v_i und v_j mit Imaginärteil π dafür sorgen, daß sämtliche reellen Punkte beider Äste der Hyperbel k ($u=u_0 \neq 0$) erfaßt werden. Die Wackelbedingung lautet dann analog zu (2.4): $u_0'=-u_0$. Die Hodographenhyperbel k erweist sich als imaginär-ähnlich zu k, nämlich reellähnlich zur konjugierten Hyperbel von k.

Im Falle einer Knotenparabel ist der Ansatz (1.4) zu verwenden. Ausgehend von einer Parabel k ($v=v_0>0$) gelangt man auch wieder zur Wackelbedingung (2.4). Der Hodograph k artet allerdings in ein Parallelenpaar aus. — Zusammenfassend gilt jedenfalls

Satz 1: Werden $m \geq 3$ Punkte A_i eines regulären Kegelschnitts k mit $n \geq 3$ anderen Punkten B_i desselben Kegelschnitts durch $m \cdot n$ starre Stäbe A_iB_i gelenkig verbunden, so entsteht ein (zumindest) wackeliges Fachwerk mit m+n Knoten. Es gestattet eine ausgezeichnete Wackelbewegung, bei welcher die Knoten A_i und B_i normal zu k fortrücken und auf je einen von zwei zu k benachbarten, konfokalen Kegel-

schnitt gelangen. Die zugehörigen, in einem festen Punkt angebrachten Geschwindigkeitsvektoren haben ihre Endpunkte auf einem gewissen Kegelschnitt \dot{k} , der im elliptischen Fall eine zu k ähnliche Ellipse ist, im hyperbolischen Fall zur konjugierten Hyperbel von k ähnlich ist, und im parabolischen Fall in zwei parallele Geraden zerfällt.

Zu bemerken wäre, daß der genannte ausgezeichnete Wackelvorgang keineswegs der einzig mögliche ist, weil ihm ja noch irgendeine infinitesimale Bewegung des Fachwerks als Ganzes überlagert werden mag, was dann zu anderen Hodographen führt. Es läßt sich zeigen, daß auch diese auf einem Kegelschnitt angeordnet sind, und zwar im elliptischen Fall noch immer auf einer zu k ähnlichen (rechtwinklig verschwenkten) Ellipse, im hyperbolischen Fall auf einer zu k oder k ähnlichen Hyperbel oder einem Geradenpaar, während im parabolischen Fall eine nichtausgeartete Parabel auftritt, sofern die überlagerte Bewegung nicht rein translatorisch ist.

Über die Bedeutung von Stabmodellen der betrachteten Art im Vermessungswesen berichtet [5].

3. Grenzfälle

§ 3.1. In jenem Grenzfall, bei welchem die Fachwerksknoten A_i und B_j auf einem Kreis k liegen, ist wegen dessen verschwindender Exzentrizität e=0 der auf der Annahme e=1 beruhende Ansatz (1.1) nicht brauchbar. Hier wird man naturgemäß zu Polarkoordinaten u, v greifen, die durch

$$x = v \cos u, \qquad y = v \sin u \tag{3.1}$$

definiert sind. Für die Entfernung r_{ij} zweier auf den Radialstrahlen $u=u_i$ und $u=u_j'$ wandernden Punkte $A_i(u_i,v)$ bzw. $B_j(u_j',v')$ gilt die (den Kosinussatz ausdrückende) Formel

$$r_{ij}^2 = v^2 + v'^2 - 2vv'\cos(u_i - u_j').$$
 (3.2)

Unter der Annahme $v(0)=v'(0)=v_0>0$ ergibt sich dann über die Ableitung von (3.2) die Wackelbedingung

$$v_0[1 - \cos(u_i - u_j')] (\dot{v}_0 + \dot{v}_0') = 0, \tag{3.3}$$

die wieder durch (2.4), also mit $v_0' = -\dot{v}_0$, für alle Indexpaare i,j gemeinsam befriedigt wird. Wie zu erwarten war, weichen mithin beim Wackelvorgang alle Knoten A_i auf einen konzentrischen Nachbarkreis $v = v_0 + \delta$ aus, alle Knoten B_j hingegen auf den Kreis $v = v_0 - \delta$. Der Satz 1 gilt demnach auch im Grenzfall eines Knotenkreises k.

 \S 3.2. Die Spezialisierung von Satz 1 auf den Fall, daß eine Knotenhyperbel k in ein schneidendes Geradenpaar ausartet, führt hingegen zu nichts, wenn man von vornherein annimmt, daß die Knoten normal zu ihren Prägergeraden weiterrücken: Dies würde lediglich eine starre Verdrehung des Fachwerks bedeuten. Man muß offenbar auch Radialkomponenten der Geschwindigkeitsvektoren berücksichtigen.

Unter Verwendung der mit (3.1) eingeführten Polarkoordinaten u, v betrachten wir also bewegliche Punkte $A_i(u_i, v_i)$ und $B_i(u_i', v_i')$, die sich in der Austrachten wir also bewegliche Punkte $A_i(u_i, v_i)$ und $B_i(u_i', v_i')$, die sich in der Austrachten wir also bewegliche Punkte $A_i(u_i, v_i)$ und $B_i(u_i', v_i')$, die sich in der Austrachten wir also bewegliche Punkte $A_i(u_i, v_i)$ und $B_i(u_i', v_i')$, die sich in der Austrachten $A_i(u_i, v_i)$ und $A_i(u_i', v_i')$ und $A_i(u_i$

gangslage auf den Geraden g (u=0) bzw. h ($u'=\gamma$) befinden. Die Koordinaten seien also Funktionen der Zeit t mit den Festsetzungen $u_i(0)=0$ und $u_j'(0)=\gamma$, wobei $0<\gamma<\pi$. Aus der Distanzformel

$$r_{ij}^2 = v_i^2 + v_j^2 - 2v_i v_j \cos(u_i - u_j)$$
 (3.4)

und ihrer verschwindenden Ableitung folgt dann als Bedingung für eine stationäre Entfernung $r_{ij}=A_iB_j$ zur Zeit t=0:

$$v_i\dot{v}_i + v_j'\dot{v}_j' - (v_j'\dot{v}_i + v_i\dot{v}_j')\cos\gamma - v_iv_j'(\dot{u}_i - \dot{u}_j')\sin\gamma = 0. \tag{3.5}$$

Es geht nun darum, diese Bedingung so zu erfüllen, daß \dot{u}_i und \dot{v}_i nur von A_i abhängen, ebenso \dot{u}_i' und \dot{v}_i' nur von B_i . Dies gelingt, wie man leicht nachprüft, mit den Festsetzungen

$$\dot{v}_i = -1/v_i, \quad \dot{v}_j{}' = 1/v_j{}', \quad \dot{u}_i = c/v_i{}^2, \quad \dot{u}_j{}' = c/v_j{}'^2, \quad c = \cot \gamma, \quad (3.6)$$

wobei ein überflüssiger Proportionalitätsfaktor unterdrückt wurde. Die zumindest infinitesimale Beweglichkeit des von den Stäben A_iB_j gebildeten Gelenkwerks ist damit erwiesen.

Die Wackelgeschwindigkeiten sind aufgrund von (3.1) für die Knoten A_i bestimmt durch die Komponenten

$$\dot{x}_i = -1/v_i, \qquad \dot{y}_i = c/v_i, \tag{3.7}$$

für die Knoten B_j hingegen durch

$$\dot{x}_{i}' = 0, \qquad \dot{y}_{i}' = 1/v_{i}' \sin \gamma.$$
 (3.8)

Die Hodographenpunkte \dot{A}_i liegen daher auf einer zu h normalen Geraden \dot{g} ($c\dot{x}+\dot{y}=0$), während die Punkte \dot{B}_i der zu g normalen \dot{y} -Achse \dot{h} angehören (Abb. 4).

Mit kleinem t gelangen die Knoten A_i in erster Näherung auf die in Parameterform durch

$$\tilde{x} = x + \dot{x}t = v - \frac{t}{v}, \qquad \tilde{y} = y + \dot{y}t = \frac{ct}{v}$$
 (3.9)

dargestellte $Hyperbel\ \tilde{g}$ mit der Gleichung $(c\tilde{x}+\tilde{y})\ \tilde{y}=c^2t$. Die Knoten B_i rücken währenddessen auf eine andere Hyperbel \tilde{h} mit der Gleichung $\tilde{x}'(c\tilde{y}'-\tilde{x}')=c^2t$

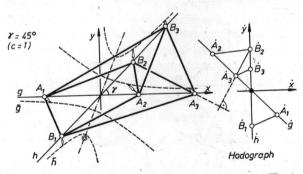


Abb. 4. Wackeliges Neunstab-Fachwerk mit schneidenden Knotengeraden

weiter (Abb. 4). Es läßt sich zeigen, daß die beiden Hyperbeln konfokal sind (Exzentrizität $e = 2\sqrt{t/\sin \gamma}$). — Damit haben wir

Satz 2: Werden $m \geq 3$ Punkte A_i einer Geraden g mit $n \geq 3$ Punkten B_j einer g schneidenden Geraden h durch $m \cdot n$ starre Stäbe A_iB_j gelenkig verbunden, so entsteht ein (zumindest) wackeliges Fachwerk mit m+n Knoten. Es gestattet eine infinitesimale Deformation, bei welcher die Knoten A_i normal zu h auf eine benachbarte Hyperbel weiterrücken, während die Knoten B_j normal zu g auf eine konfokale Hyperbel gelangen.

Hervorzuheben wäre der Sonderfall $\gamma=\pi/2$ (c=0): Von diesem Gelenkwerk, dessen Knoten sich auf zwei orthogonale Geraden verteilen, ist ganz elementar nachzuweisen, daß es einen in endlichem Ausmaß stetig beweglichen zwangläufigen Mechanismus darstellt [4]. Dies leuchtet durchaus ein, denn die Gelenke rücken auf ihren Trägergeraden weiter, so daß sich immer wieder eine zur Ausgangslage gleichartige Situation einstellt.

§ 3.3. Auch der Fall paralleler Knotengeraden g, h läßt sich nicht schlechthin als Grenzfall von Satz 1 oder 2 abtun, sondern verlangt eine eigene Behandlung.

Wird die Gerade g zur x-Achse eines kartesischen Koordinatensystems gemacht, und bezeichnet a den Abstand der Geraden h, so sind bewegliche Punkte $A_i(x_i, y_i)$ und $B_j(x_j', y_j')$ unter den Maßnahmen $y_i(0) = 0$ und $y_j'(0) = a$ zu betrachten. Die Entfernung $A_iB_j = r_{ij}$ berechnet sich aus

$$r_{ij}^2 = (x_i - x_j')^2 + (y_i - y_j')^2, (3.10)$$

und durch Ableitung nach t an der Stelle t=0 gelangt man zur Wackelbedingung

$$(x_i - x_j') (\dot{x}_i - \dot{x}_j') - a(\dot{y}_i - \dot{y}_j') = 0.$$
(3.11)

Dieselbe ist für alle Indexpaare i, j etwa durch

$$\dot{x}_i = x_i, \quad \dot{x}_j' = -x_j', \quad \dot{y}_i = x_i^2/a, \quad \dot{y}_j' = x_j'^2/a$$
 (3.12)

zu befriedigen, wobei wieder auf einen überflüssigen Proportionalitätsfaktor verzichtet wird.

Die zugehörigen Hodographenpunkte \dot{A}_i und \dot{B}_j sind zufolge (3.12) auf der $Parabel \ a\dot{y} = \dot{x}^2$ angeordnet. Eine einfache Konstruktion der Geschwindigkeitsvektoren ist aus Abb. 5 ersichtlich.

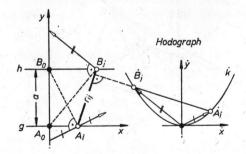


Abb. 5. Wackelgeschwindigkeiten bei parallelen Knotengeraden

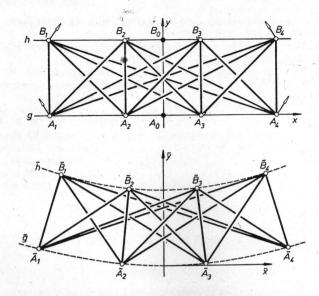


Abb. 6. Verformung eines wackeligen Sechzehnstab-Fachwerks mit parallelen Knotengeraden

Mit kleinem trücken die Knoten \boldsymbol{A}_i von der Geraden g in erster Näherung auf eine durch

$$\tilde{x} = x + \dot{x}t = (1+t)x, \qquad \tilde{y} = y + \dot{y}t = x^2t/a$$
 (3.13)

(mit veränderlichem x) beschriebene Parabel \tilde{g} vom Parameter $p=(1+t)^2 a/2t$, während die Knoten B_i auf die zu h benachbarte, durch

$$\tilde{x}' = x' + \dot{x}'t = (1 - t) x', \qquad \tilde{y}' = y' + \dot{y}'t = a + x'^2t/a$$
 (3.14)

dargestellte Parabel \tilde{h} mit dem Parameter $p'=(1-t)^2\,a/2t$ gelangen (Abb. 6). Zufolge der gemeinsamen Brennpunktsordinate p/2=a+(p'/2) sind die beiden Parabeln konfokal. — Abschließend hat man den

Satz 3: Werden $m \geq 3$ Punkte A_i einer Geraden g mit $n \geq 3$ Punkten B_j einer zu g parallelen Geraden h durch $m \cdot n$ starre Stäbe A_iB_j gelenkig verbunden, so entsteht ein wackeliges Fachwerk mit m+n Knoten. Es gestattet eine Wackelbewegung mit parabolischem Hodographen, bei welcher die Knoten A_i in den gleichen Richtungen weiterrücken wie bei einer Drehung um einen festen Punkt B_0 auf h, ebenso die Knoten B_j wie bei einer Drehung um den Fußpunkt A_0 des Lotes aus B_0 auf g. Die Geraden g und h transformieren sich dabei näherungsweise in zwei konfokale Parabeln.

Literatur

- Müller-Breslau, H.: Die graphische Statik der Baukonstruktionen, I, 3. Aufl. Leipzig: 1901.
- [2] Ritter, W.: Anwendungen der graphischen Statik, II. Zürich: 1890.
- [3] Stachel, H.: Eine Anwendung der kinematischen Abbildung. Anz. Österr. Akad. Wiss. 118, 108-111 (1981).

- [4] Wunderlich, W.: On deformable nine-bar linkages with six triple joints. Proc. Nederl.
- Akad. Wetensch. 79, 257—262 (1976).

 [5] Wunderlich, W.: Gefährliche Annahmen der Trilateration und bewegliche Fachwerke, I. Z. angew. Math. Mech. 57, 297-304 (1977).
- [6] Wunderlich, W.: Zur projektiven Invarianz von Wackelstrukturen. Z. angew. Math. Mech. 60, 703-708 (1980). - Projective invariance of shaky structures. Acta Mech. 42, 171-181 (1982).

Emer. Prof. Dr. W. Wunderlich Institut für Geometrie Technische Universität Wien Gußhausstraße 27—29 A-1040 Wien $\ddot{O}sterreich$

Printed in GDR VEB Druckhaus "Maxim Gorki", DDR - 7400 Altenburg