

Über die Böschungslinien auf Flächen

2. Ordnung

Von

Walter Wunderlich (Wien)

(Mit 1 Textfigur)

(Vorgelegt in der Sitzung am 19. Dezember 1946)

Böschungslinien (Kurven konstanter Steigung, allgemeine Schraubenlinien) auf Drehflächen 2. Ordnung mit lotrechter Achse — insbesondere auf der Kugel — sind wiederholt betrachtet worden, doch scheint das Problem der Böschungslinien auf beliebigen Flächen 2. Ordnung in seiner vollen Allgemeinheit noch kaum in Angriff genommen worden zu sein. In der vorliegenden Mitteilung wird auf einen bemerkenswerten Zusammenhang der genannten Kurven mit den Kegelschnittsevolventen hingewiesen, der trotz seiner Einfachheit bisher offenbar unbemerkt geblieben ist.

Die Betrachtungen sind in der Hauptsache rein geometrisch, geben jedoch die Mittel in die Hand, auch das mathematisch gefaßte Problem einer Lösung zuzuführen, wie an Beispielen gezeigt wird. Daß die Darstellung gelegentlich etwas flüchtig ist, möge mit dem Hinweis auf die Vielfalt der auftretenden Fälle entschuldigt werden, deren eingehende Untersuchung sehr umfangreich würde. Sind doch — selbst bei Beschränkung auf reelle Lösungen — vom reell-affinen Standpunkt aus nicht weniger als 75 Typen zu unterscheiden, von denen manche noch eine Unterteilung erfahren könnten.

I. Allgemeines. Eine Böschungslinie k ist dadurch gekennzeichnet, daß ihre sämtlichen Tangenten mit einer festen — meist waagrecht gedachten — Ebene A einen konstanten Winkel α einschließen, wobei von den trivialen Werten 0 und $\frac{\pi}{2}$ abgesehen wird. Die Tangenten treffen mithin einen gewissen

Fernkreis c , dessen Mitte durch die Hauptrichtung $\alpha \perp A$ und dessen Öffnung durch $\pi - 2\alpha$ gegeben ist.

Verläuft nun k auf einer nichtausgearteten Fläche 2. Grades Φ , dann können wir die Polarität bezüglich Φ ausüben. Jede Kurventangente t geht dabei in die konjugierte Flächentangente \bar{t} über und diese berührt den dem Fernkreis c entsprechenden Kegel oder Zylinder 2. Ordnung Γ ; dessen Scheitel O ist der Pol der Fernebene und als solcher mit dem (eigentlichen oder uneigentlichen) Mittelpunkt der Grundfläche Φ identisch. Das durch die Tangentialebenen von Γ aus der Fläche Φ herausgeschwemmte Kegelschnittsystem \mathfrak{S} und die Böschungslinien auf Φ bilden demnach ein konjugiertes Kurvennetz.

Wir wählen nun eine geeignete Bildebene II und machen O zum Projektionszentrum (die Bilder werden durch den Zeiger o gekennzeichnet). Konjugierte Flächentangenten t, \bar{t} im einem Punkt P von Φ liegen harmonisch zu dem Paar e_1, e_2 der Flächenerzeugenden durch P , und Entsprechendes gilt für die Bilder. Nun sind aber e_1^o, e_2^o Tangenten des scheinbaren Umrißes von Φ , also eines Kegelschnittes, der unter Umständen — nämlich im Fall einer parabolischen Grundfläche — in zwei Strahlbüschel ausarten kann. Machen wir diesen Umrißkegelschnitt jetzt zum Maßgebilde einer Winkelmetrikt in der Bildebene, so können wir die Bilder t^o, \bar{t}^o konjugierter Flächentangenten als senkrecht im Sinne dieser Metrik bezeichnen.

Weil nun aber die zu den Böschungsrichtungen t konjugierten Tangenten \bar{t} im Bild den Kegelschnitt Γ^o berühren, sind die Bilder der Böschungslinien die Orthogonalaltrajektorien der Tangentenschar von Γ^o und es gilt:

Satz 1: Projiziert man die zu einem bestimmten Böschungsferrnkreis c gehörigen Böschungslinien einer nichtausgearteten Fläche 2. Grades Φ aus dem (eigentlichen, bzw. uneigentlichen) Flächenmittelpunkt O auf eine Bildebene II, so erhält man dort die Evolventen eines gewissen Kegelschnittes, u. zw. Evolventen im Sinne einer Metrik, deren absolutes Gebilde der schembare Umriß von Φ ist. Der genannte Kegelschnitt ist die Spur des zu c bezüglich Φ polaren Kegels, bzw. Zylinders I.

Die Schnittlinie von Φ und Γ ist eine (unter Umständen zerfallende) Quartik q . Sie wird von allen Kegelschnitten des Systems \mathfrak{S} an zwei Stellen berührt und grenzt auf Φ das Gebiet mit reellen Böschungslinien ab. Sie ist die Berührungscurve der Φ und c umschriebenen Tore Θ und stellt den Ort jener Flächenpunkte dar, deren Berührebenen gegen die Hauptstellung A unter dem Winkel α geneigt sind¹. Die Böschungslinien weisen im allgemeinen auf q Rückkehrpunkte auf, deren Tangenten mit den Erzeugenden von Θ zusammenfallen.

Unter den Böschungslinien befinden sich auch jene Erzeugenden der Fläche Φ , die den Fernkreis c treffen, wobei nur eigentliche in Betracht zu ziehen sind. Es sind dies also bei Mittelpunktsflächen insgesamt 8 (je 4 in jeder Regelschar), bei Paraboloiden insgesamt 4.

In den folgenden Abschnitten soll auf die zu bestimmten Grundflächenarten gehörigen besonderen Verhältnisse eingangen werden.

II. Elliptische Paraboloide. Ist die Grundfläche Φ ein Paraboloid, dann ist das Polargebilde Γ des Böschungsrückkreises c ein Zylinder; dessen Scheitel, gleichzeitig das Projektionszentrum O , fällt mit dem Fernscheitel von Φ zusammen. Der (ausgeartete) Umriß des Paraboloides besteht aus den beiden Fernerzeugenden u_1, u_2 . Die Metrik in der Bildebene ist daher eine „parabolische“, d. h. sie gründet sich auf ein absolutes Punktpaar U_1, U_2 ; dasselbe wird durch die in II gelegenen Fernpunkte vom Φ dargestellt.

Im Falle des elliptischen Paraboloides ist das Erzeugendenaar u_1, u_2 konjugiert-komplex. Es liegt unter diesen Umständen nahe, für II eine zyklische Ebene zu wählen, weil die Meßpunkte U_1, U_2 dann mit den absoluten Kreispunkten zusammenfallen und die Metrik in der Bildebene euklidisch wird.

Die auftretenden Kegelschnittsevolventen sind jetzt die gewöhnlichen. Die Art des Kegelschnittes $\Gamma^o = q^o$ hängt von der Lage des Fernscheitels O hinsichtlich des Böschungskreises c

¹ Für α als Lichtrichtung kann q demnach als eine Isophote (Linie gleicher Helligkeit) von Φ angesehen werden.

ab, da dessen durch O gehende Tangenten in der Polarität den Fernerzeugenden von Γ entsprechen. Diese sind reell, zusammenfallend oder konjugiert-komplex, je nachdem O außerhalb, auf oder innerhalb von c liegt; demgemäß ist der Grundkegelschnitt eine Hyperbel, Parabel oder Ellipse. Er ist insbesondere ein Kreis, wenn die Fernerzeugenden von Γ und Φ identisch sind; der Böschungsfermkreis muß diese Erzeugenden u_1, u_2 dann beinhren; das bedeutet mit anderen Worten, daß die vier Flächen-erzeugenden, die gerade Böschungslinien abgeben, paarweise zusammengerückt sind. Diese besondere Annahme ist auch dadurch ausgezeichnet, daß die Grenzquartik q unter Abspaltung des Geradenpaars u_1, u_2 in einen Kegelschnitt ausartet. Wir fassen zusammen:

Satz 2: *Jede auf einem elliptischen Paraboloid oder Dreh-paraboloid Φ verlaufende Böschungslinie erscheint bei Parallelprojektion in Achsenrichtung auf eine Kreisschmittebene als gewöhnliche Evolvente eines Kegelschnittes. Derselbe ist eine Hyperbel, Parabel oder Ellipse, je nachdem die Neigung der Achse flacher, gleich oder steiler als die Böschung ist. Er ist insbesondere ein Kreis, wenn Φ den Böschungsfersmkreis doppelt berührt.*

Der von Huth² behandelte Sonderfall des Drehparaboloides mit lotrechter Achse, dessen Böschungslinien sich im Grundriß als Kreisevolventen abbilden, erscheint nunmehr einem weit allgemeineren Satz untergeordnet.

III. Hyperbolische Paraboloide. Hier liegen im wesentlichen dieselben Beziehungen vor wie im vorigen Abschnitt, lediglich mit geänderten Realitätsverhältnissen, da die Fernerzeugenden u_1, u_2 reell sind. An die Stelle der euklidischen Metrik in der Bildebene Π tritt jetzt die auf ein reelles Fernpunkt-paar U_1, U_2 gegründete „pseudoeuklidische“ Metrik. Es läßt sich stets — sogar auf unendlich viele Arten — durch geeignete Wahl von Π einrichten, daß die Meßpunkte in zwei euklidisch-senkrechte Richtungen fallen; die zugehörige Maßbestimmung ist dann die bekannte „C-Metrik“ von

E. Müller³; die betreffenden Bildebenen umhüllen einen gewissen Fernkegelschnitt.

Jedenfalls können die ebenen Projektionen der Böschungs-linien aus dem Fernscheitel O der Grundfläche jetzt als „Pseudoevolventen“ von Kegelschnitten angesprochen werden und deren Art wird in derselben Weise wie vorhin durch die Lage von O bezüglich c bestimmt.

Satz 3: *Jede auf einem hyperbolischen Paraboloid Φ verlaufende Böschungslinie erscheint bei Parallelprojektion in Achsenrichtung auf eine Ebene Π als pseudoeuklidische Evolvente eines Kegelschnittes. Derselbe ist eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem die Neigung der Achse steiler, gleich oder flacher als die Böschung ist. Die absoluten Punkte der Pseudometrik sind die in Π liegenden Fernpunkte von Φ .*

Vom euklidischen Standpunkt aus werden noch zahlreiche Unterfälle zu unterscheiden sein, entsprechend der Realität der Schnittverhältnisse von c und Φ , also der Verteilung der geraden Böschungslinien:

1. *Elliptischer Fall* (O innerhalb von c).

Alle 4 Böschungserzeugenden sind reell und getrennt.

2. *Parabolischer Fall* (O auf c).

2 Böschungserzeugende sind ins Unendliche gerückt.

a) c schneidet u_1 und u_2 (2 eigentliche, reelle Böschungs-erzeugende);

b) c berührt u_1 (eine eigentliche, reelle Böschungserzeu-gende; q zerfällt in u_1 und eine Kubik).

3. *Hyperbolischer Fall* (O außerhalb von c).

4 eigentliche Böschungserzeugende mit verschiedenen Realitätsverhältnissen.

a) c schneidet u_1 und u_2 reell;

b) c schneidet u_1 reell, u_2 komplex;

c) c schneidet u_1 und u_2 komplex;

d) c berührt u_1 und schneidet u_2 reell (q zerfällt in u_1 und eine Kubik);

² M. Huth, Kurven konstanter Steigung auf gegebenen Flächen. Progr. Realsch. Stollberg (1883).

³ Müller-Krames, Vorlesungen über darstellende Geometrie, Bd. II, „Die Zyklographie“ (Wien und Leipzig 1929), S. 441.

- e) c berührt u_1 und schneidet u_2 komplex (w. o.);
 f) c berührt u_1 und u_2 (q zerfällt in u_1, u_2 und einen Kegelschnitt).

Die mathematische Behandlung führt im allgemeinen auf elliptische Integrale, wie sie die Berechnung der (Pseudo-)Bogenlänge von Kegelschnitten erfordert. Auf elementare Funktionen lassen sich nur die Fälle zurückführen, bei welchen der abzuwickelnde Kegelschnitt q^0 eine Parabel ist oder wenigstens einen absoluten Punkt enthält, also 2a, 2b, 3d, 3e und 3f. Der letzte Fall entspricht dem Auftreten von Kreisevolventen beim elliptischen Paraboloid, während für die anderen Fälle kein entsprechendes (reelles) Analogon vorhanden ist. Der besonders interessante Fall 2b soll etwas näher ausgeführt werden, wobei gleichzeitig gezeigt wird, wie der geometrische Leitgedanke zur mathematischen Lösung führt.

Sei also Φ ein hyperbolisches Paraboloid und c ein Fernkreis, der die uneigentliche Flächenerzeugende u_1 im Fernscheitel O berühre. Wir führen nun affine Koordinaten x, y, z ein, indem wir die Fernpunkte X, Y, Z der Koordinatenachsen folgendermaßen verteilen: Z falle mit O zusammen, X sei der 2. Schnittpunkt von c mit u_2 , Y der auf u_1 liegende Pol von XZ bezüglich c ; der Ursprung schließlich sei der Berührpunkt der eigentlichen durch XY gehenden Tangentialebene von Φ . Bei dieser Annahme hat das Paraboloid die Gleichung

$$(1) \quad xy = A^z,$$

der Richtkegel des Böschungsfernkreises die Gleichung

$$(2) \quad y^2 = Bx^z.$$

Durch geeignete Verfüllung über die Einheiten können wir noch erreichen, daß $A = 1$ und $B = 2$ wird.

Die Bestimmung der Böschungslinien erfordert dann die Auflösung des Gleichungssystems

$$(3) \quad xy = z, \quad dy^2 = 2dx^z.$$

Elimination von z führt auf die quadratische Differentialgleichung

$$(4) \quad y'^2 - 2xy' - 2y = 0 \quad \text{oder} \quad y' = x \pm \sqrt{x^2 + 2y},$$

deren Auflösung durchaus nicht auf der Hand liegt.

Die gleich Null gesetzte Diskriminante stellt den Grundkegelschnitt q^0 in der Bildebene $z = 0$ dar, deren Pseudometrik durch die absoluten Punkte X und Y geregelt wird, also etwa durch das Bogenelement

$$(5) \quad d\sigma^2 = -d\xi d\eta$$

erklärt werden kann, wenn wir griechische Buchstaben schreiben, um Verwechslungen zu vermeiden. Für das Bogenelement der Grundparabel $\xi^2 + 2\eta = 0$ gilt dann $d\sigma^2 = \xi d\xi^2 = \xi d\xi^2$, so daß es zweckmäßig erscheint, die wurzelfreie Parameterdarstellung

$$(6) \quad \xi = t^2, \quad \eta = -\frac{1}{2}t^4$$

einzu führen. Nun haben wir

$$(7) \quad d\sigma = 2t^2 dt, \quad \sigma = \frac{2}{3}t^3 + C$$

und damit nach Aufstellung der Pseudoevolvente die Parameterdarstellung der gesuchten Böschungslinien

$$\begin{aligned} x &= \xi - \sigma \cdot \frac{d\xi}{d\sigma} = \frac{1}{3}t^2 - \frac{C}{t} \\ y &= \eta - \sigma \cdot \frac{d\eta}{d\sigma} = \frac{1}{6}t^4 + Ct \\ z &= xy = \frac{1}{18}t^6 + \frac{C}{6}t^3 - C^2. \end{aligned}$$

Man überzeugt sich unschwer, daß (8) tatsächlich das Gleichungssystem (3) befriedigt.

Die gefundenen Böschungslinien sind mithin algebraisch, und zwar für $C \neq 0$ rationale Septiken k . Sie haben die gemeinsamen Fernpunkte X ($t = 0$) und Z ($t = \infty$). X ist ein einfacher Punkt mit der Asymptote $y = 0, z = -C^2$; $Z = 0$ ist eine höhere Schnabelspitze. Jede Böschungslinie besitzt außerdem auf der Grenzkurve q — die eine kubische Parabel ist — eine reelle und zwei konjugiert-komplexe Spitzen ($\sigma = 0$). Betrachtung der Gleichungen $x = \text{const}$ und $y = \text{const}$ lehrt, daß die beiden Scharen von Flächen erzeugenden Tri-, bzw. Tetrasekanten der Böschungslinien sind.

Die zu $C = 0$ gehörige Böschungslinie zerfällt in die x -Achse (Böschungserzeugende) und eine doppelt zählende Kubik k_0 . Es

ist zu erwähnen, daß k_0 auf q keine Spitze besitzt, sondern berührend an die Grenzkurve herangeht.

Die allgemeinen Böschungslinien erscheinen im Riß auf die xy -Ebene als rationale Quintiken, k_0 jedoch als Parabel.

IV. Ellipsoide. Ist die Grundfläche Φ eine Mittelpunktsfläche, dann ist die Polarfläche Γ des Böschungsferrnkreises c ein Kegel; sein Scheitel O , gleichzeitig das Projektionszentrum, fällt mit der Flächenmitte zusammen. Der scheinbare Umriß u^0 ist die Projektion des Fernkegelschnittes u von Φ , also die Bildspur des Asymptotenkegels, mithin ein nichtausgearterter Kegelschnitt, der in der Bildebene eine nichteuklidische Metrik nach Cayley-Kleinschem Muster begründet⁴.

Ist Φ nun speziell ein Ellipsoid — einschließlich des Sonderfalles der Kugel —, so ist der Umrißkegelschnitt u^0 nullteilig und es liegt eine elliptische Maßbestimmung in der Bildebene vor. Zufolge Satz 1 sind die Projektionen der Böschungslinien von Φ dann als „elliptische Evolventen“ des Kegelschnittes $\Gamma^0 = q^0$ anzusprechen.

Will man den Boden der euklidischen Geometrie nicht verlassen, so kann man durch Ausübung einer passenden Affinität das Ellipsoid Φ in eine Kugel Φ^* verwandeln. Hierbei geht der Kegel Γ wieder in einen konzentrischen Kegel 2. Grades Γ^* über, und die einer Böschungslinie k von Φ entsprechende sphärische Kurve k^* hat die Eigenschaft, alle Tangentialebenen von Γ^* orthogonal zu durchsetzen, da konjugierte Richtungen auf der Kugel zueinander senkrecht sind: k^* ist demnach die sphärische Evolente eines sphärischen Kegelschnittes q^* .

Satz 4: Die Böschungslinien auf einem Ellipsoid sind affin zu den sphärischen Kegelschnittsevolventen. Ihre ebenen Projektionen aus dem Flächenmittelpunkt können als nichteuklidische Kegelschnittsevolventen einer elliptischen Metrik nach Cayley-Kleinschem Muster aufgefaßt werden.

Von besonderem Interesse wird wieder der Fall einer zerfallenden Grenzkurve q sein, da derselben auf der Kugel ein Kreispaar q^* entspricht und wir damit auf die sphärischen

Kreisevolventen stoßen. Γ^* muß dann offenbar ein Drehkegel sein, und da dieser die Kugel Φ^* an zwei Stellen (im Unendlichen) berührt, gilt dasselbe auch für Γ und Φ . Dieser Sonderfall ist also wieder der Polarität auch für e und Φ . Dieser Sonderfall ist also wieder dadurch gekennzeichnet, daß die Grundfläche den Böschungsfernkreis doppelt berührt.

Dieser Fall liegt speziell dann vor, wenn die Grundfläche Φ selbst eine Kugel ist. Daß die sphärischen Kreisevolventen mit den Böschungslinien auf der Kugel identisch sind, hat schon Serret⁵ erkannt. Sie spielen in der Bündelkinematik als Bahnbogen der Punkte einer auf einem Drehkegel rollenden Ebene eine gewisse Rolle und sind besonders für die Kegelradverzahnung von Bedeutung. Enneper⁶ dürfte als erster die merkwürdige Tatsache festgestellt haben, daß sich diese Kurven im Grundriß — d.h. bei Normalprojektion auf die Hauptebene A — als Epizykloiden abbilden. Ein neuer einfacher Beweis hierfür soll im folgenden gegeben werden.

Wir denken uns einen Drehkegel Γ mit dem Basisradius r' und der Mantellinie r auf die Grundebene aufgestellt (Fig. 1; der Grundriß wird durch einen Akzent gekennzeichnet). Von der auf Γ abrollenden Ebene genügt eine Kreisscheibe vom Halbmesser r , deren Umfang l den Basiskreis q in der Anfangsstellung im Punkt A berühren möge. Wir rollen die Scheibe um den Winkel φ weiter und betrachten die Lage P , in welche A auf seiner Bahnkurve dabei gelangt; der neue Berührungs punkt des Wälz kreises sei mit B bezeichnet. Die Bahntangente t in P steht senkrecht zur Scheibe, erscheint daher im Grundriß normal zur Wälztangente und damit parallel zu OB ; t geht

⁵ P. Serret, Théorie nouvelle géométrique et mécanique des lignes à double courbure (Paris 1860), S. 39.

⁶ A. Enneper, Zur Theorie der Curven doppelter Krümmung. Math. Ann. 19 (1882).

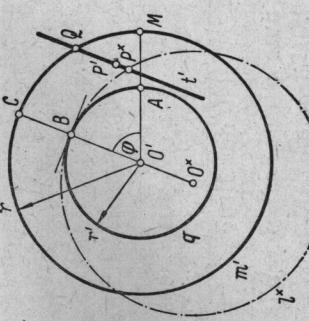


Fig. 1.

demnach auch durch die Umlegung P^\times von P , die sich beim Umklappen der Scheibe um die Wälztangente in die Grundebene ergibt. Verschieben wir noch den umgeklappten Kreis I^\times mit seiner Mitte nach O' , wobei er mit dem Kugelumriß m' zur Deckung kommt, so gelangt B nach C und P^\times in den Schnittpunkt Q von ℓ' mit m' . Aus der Gleichheit der Bögen

$$AB = P^\times B = QC = r' \varphi$$

folgt sofort

$$M Q = (r - r') \varphi.$$

Denken wir uns φ gleichförmig verändert, so bedeutet das offenbar: *Die Gerade ℓ' dreht sich gleichförmig um den Punkt Q , der seinerseits mit konstanter Geschwindigkeit auf dem Kreis m' wandert.* Dann hüllt ℓ' aber bekanntlich eine Zykloide ein, w. z. b. w.

Die Gleichungen der sphärischen Böschungslinie in einem Normalkoordinatensystem, dessen Ursprung in O liegt und dessen x -Achse parallel zu $O'A$ verläuft, sind aus der beschriebenen Rollbewegung leicht abzuleiten. Setzen wir $\varphi = r\tau$ und unterdrücken wir das Minuszeichen bei z , so erhalten wir

$$\begin{aligned} x &= r' \cos r'\tau \cos r\tau + r \sin r'\tau \sin r\tau = \\ &= \frac{r+r'}{2} \cos(r-r')\tau - \frac{r-r'}{2} \cos(r+r')\tau \\ y &= r' \cos r'\tau \sin r\tau - r \sin r'\tau \cos r\tau = \\ &= \frac{r+r'}{2} \sin(r-r')\tau - \frac{r-r'}{2} \sin(r+r')\tau \\ z &= r \cos \alpha \cdot \cos r'\tau = \sqrt{r^2 - r'^2} \cdot \cos r'\tau; \quad \left[\sin \alpha = \frac{r'}{r} \right]. \end{aligned} \tag{9}$$

Ist der Bruch $\frac{r'}{r} = \sin \alpha$ rational, dann ist die Böschungslinie algebraisch. Wir können r' und r als positiv-ganze und teilerfremde Zahlen voraussetzen. Die Böschungskurve hat dann die Ordnung 2 ($r+r'$), schließt sich nach $r-r'$ Umläufen und besteht aus 2 r' Kongruenten Zügen, die in abwechselnd auf dem Kreispaar q verteilten Spitzen zusammenstoßen; sie besitzt die absoluten Kreispunkte der Hauptebene zu r -fachen Punkten.

Morley⁷ macht die Bemerkung, daß die sphärischen Kreise⁸ Morley⁷ machen "No-Rolling" Curves of Amsler's Planimeter. Ann. of Math. I (1899).

evolventen bei stereographischer Projektion auf die Hauptebene Kreistraktrizzen ergeben. Näheres hierüber soll einem eigenen Aufsatz vorbehalten bleiben.

Multiplikation von z mit einer reellen Konstanten — also affine Streckung in der Hauptrichtung — transformiert die Kurven (9) unter Erhaltung des Grundrisses in Böschungskurven auf Drehellipsoïden mit lotrechter Achse. Diese Kurven besitzen nach Enneper⁶ die merkwürdige Eigenschaft, die Erzeugenden ihrer Verbindungskegel mit den beiden Flächenbrennpunkten unter konstantem Winkel zu durchsetzen. Blaschke⁸ entdeckt, daß jede Ebene, die mit dem begleitenden Dreibein einer solchen Böschungslinie starr verbunden ist, eine Torse umhüllt, deren Gratlinie wieder eine solche Böschungskurve auf einem anderen Drehellipsoïd ist. Cesàro⁹ stellt fest, daß bei der Verehrung der Böschungstorse die Grätzlinie in eine Epizykloide übergeht, und Krames¹⁰ findet bei der Untersuchung der zyklographischen Abbildung der Böschungslinien auf die Äquatorebene, daß auch hier wieder Epizykloiden auftreten. Entsprechende Beziehungen gelten auch für die in Abschnitt II erwähnten Böschungslinien auf dem Drehparaboloid sowie für die im nächsten Abschnitt zu besprechenden Böschungslinien auf den ein- und zweischaligen Drehhyperboloiden.

Abschließend sollen noch die Gleichungen der allgemeinen Böschungslinien auf einem dreiaxisigen Ellipsoid beliebiger Lage abgeleitet werden. Für eine Fläche 2. Grades Φ in Hauptachsenlage hat diese Aufgabe schon F. Nугель in ihrer Dissertation¹¹ in Angriff genommen, anscheinend ohne sich dessen bewußt zu sein, bei geeigneter Deutung der Koordinaten damit auch das allgemeinere Problem zu erfassen. Die Verfasserin transformiert zunächst den Böschungskreis c in den absoluten Kugelkreis c^* , wobei die Böschungslinien k in die

⁶ W. Blaschke, Bemerkungen über allgemeine Schraubenlinien. Mh. Math. Phys. 19 (1908).

⁷ E. Cesàro, Vorlesungen über natürliche Geometrie (Leipzig 1901), S. 183.

⁸ J. Krames, Die zyklographische Abbildung der Böschungskurven auf Drehflächen zweiten Grades m. lotrechter Achse. Sitzgsb. Ak. Wiss. Wien 144 (1935).

⁹ F. Nугель, Die Schraubenlinien. Diss. Halle (1912), S. 63 ff.

Minimalkurven k^* der neuen Grundfläche Φ^* übergehen; deren Bestimmung hängt mit der konformen Abbildung von Φ^* zusammen und wird dementsprechend (nach Jacob) in elliptischen Koordinaten durchgeführt.

Wir wollen im folgenden die bisherigen geometrischen Erkenntnisse mathematisch auswerten. Wir legen ein Koordinatensystem x, y, z zugrunde, dessen Ursprung in der Flächenmitte O liegt, dessen Achsen das der Grundfläche Φ und dem Böschungsfernkreis c gemeinsame Poldreikant bilden und dessen Einheitsstrecken mit den zugehörigen Flächenhalbmessern zusammenfallen. Die Böschungslinien sind dann definiert durch das Gleichungssystem

$$(10) \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad a^2 dx^2 + b^2 dy^2 = dz^2,$$

in welchen wir $a^2 \geq b^2$ voraussetzen dürfen. Die Gleichung des Polarkreises Γ lautet

$$(11) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z^2.$$

Als Bildecke II wählen wir die Ebene $z=1$. Sie schneidet Γ nach dem abzuwickelnden Grundkegelschnitt $\Gamma^0 = q^0$

$$(12) \quad \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1 \quad \text{oder} \quad x_0 = a \sin \varphi, \quad y_0 = b \cos \varphi.$$

Die in II herrschende Metrik wird geregelt durch den nullteiligen Maßkegelschnitt u^0

$$(13) \quad x^2 + y^2 + 1 = 0;$$

das zugehörige (elliptische) Bogenelement lautet bekanntlich¹²

$$(14) \quad ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + (y dx - x dy)^2}{(x^2 + y^2 + 1)^2}.$$

¹² F. Klein, a. O. S. 290.

Allgemein kann mit Benützung des Symbols $(xy) = \sum a_{ik} x_i y_k$ [$a_{ik} = a_{ki}$; $i, k = 0, 1, \dots, n$] ein beliebiges quadratisches Maßgebilde des n -dimensionalen Raumes durch $(xx) = 0$ dargestellt werden. Für das zugehörige Bogenelement ds gilt dann

$$\pm (xx)^2 \cdot ds^2 = (xx)(dx dx) - (x dx)^2,$$

wobei den inhomogenen Koordinaten entsprechend $x_0 = 1$ und $dx_0 = 0$ zu setzen ist. Als Vorzeichen ist im elliptischen Fall das obere, im hyperbolischen das untere zu nehmen, während es im indefiniten Fall nach Bedarf festgesetzt werden kann.

Angewandt auf die Ellipse (12) erhalten wir

$$ds^2 = \frac{a^2(1+b^2) - (a^2 - b^2)\sin^2 \varphi}{[1+b^2 + (a^2 - b^2)\sin^2 \varphi]} d\varphi^2$$

und damit für den Bogen

$$(15) \quad s = \frac{1+a^2}{a\sqrt{1+b^2}} \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1+a^2k^2\sin^2 \varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2 \varphi}} - \frac{1}{a\sqrt{1+b^2}} \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2 \varphi}} + C$$

$$\text{mit } k^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2(1+b^2)}.$$

Die auftretenden Integrale sind die Legendreschen Normalintegrale 3. Gattung II (s, a^2k^2, k) und 1. Gattung $F(\varphi, k)$; der Wert der Konstanten C hängt von der Stelle ab, an der die Abwicklung beginnt. Im Falle von Normalkoordinaten x, y, z ist mit (15) gleichzeitig die Ratifikation der sphärischen Ellipse $q = [\Phi \Pi]$ vollzogen.

Der ermittelte Bogen s ist nun auf der (gegenläufig orientierten) Ellipsentangente

$$(16) \quad x = x_0 - a t \cos \varphi, \quad y = y_0 + b t \sin \varphi$$

aufzutragen. Hierzu ist auch das Längenelement (14) heranzuziehen, und man findet nach Einsetzung von $dx = -a \cos \varphi dt$ und $dy = b \sin \varphi dt$:

$$(17) \quad s = \int_0^t \frac{W dt}{P t^2 - 2 Q t + R} \quad \text{mit } P = a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi, \\ Q = (a^2 - b^2) \sin \varphi \cos \varphi, \\ R = a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi + 1, \\ W^2 = PR - Q^2 = P + a^2 b^2.$$

(17) ist als Bestimmungsgleichung der oberen Grenze t für den gemäß (15) bekannten Bogen s aufzufassen. Die Ausrechnung vollzieht sich elementar und man findet über

$$s = \operatorname{arc tg} \frac{P t - Q}{W} + \operatorname{arc tg} \frac{Q}{W}$$

schließlich

$$(18) \quad t = \frac{R}{q + W \operatorname{ctg} s}.$$

Einsetzung dieses Längenparameters in (16) führt dann auf den Evolventenpunkt $(x_1, y_1, 1)$ in der Bildebene. Proportional hierzu sind die Koordinaten des entsprechenden Punktes der Böschungslinie auf der Fläche, so daß man diese ansetzen kann mit

$$\begin{aligned} x &= \lambda a [W \cos s \sin \varphi - (1 + b^2) \sin s \cos \varphi] \\ y &= \lambda b [W \cos s \cos \varphi + (1 + a^2) \sin s \sin \varphi] \\ z &= \lambda [W \cos s + Q \sin s]. \end{aligned}$$

Der Proportionalitätsfaktor λ ist so zu bestimmen, daß die Quadratsumme gleich 1 wird. Man findet $\lambda^2 = \frac{1}{W^2 R}$ und damit die gesuchte Parameterdarstellung der Böschungslinie

$$\begin{aligned} x &= a [U \sin \varphi - (1 + b^2) V \cos \varphi] & U &= \frac{\cos s}{\sqrt{R}} \\ y &= b [U \cos \varphi + (1 + a^2) V \sin \varphi] & \text{mit} & V = \frac{\sin s}{\sqrt{W R}} \\ z &= U + (a^2 - b^2) V \sin \varphi \cos \varphi \end{aligned} \quad (19)$$

Der Bogen s ist in seiner Abhängigkeit vom Parameterwinkel φ aus (15) zu entnehmen, die Werte von W und R aus (17).

Für $a = b$ reduziert sich das Gleichungssystem (19) auf ein zu (9) äquivalentes.

V. Hyperboloide. Ist die Grundfläche Φ ein Hyperboloid, so ist der Fernkegelschnitt u reell und in der Bildebene herrscht eine hyperbolische, bzw. indefinit Metrik, je nachdem das Hyperboloid zweischalig, bzw. einschalig ist. Die Art des abzuwickelnden Grundkegelschnittes $\Gamma^0 = q^0$ hängt von der Verteilung und Realität der mit dem absoluten Maßkegelschnitt u^0 gemeinsamen Punkte und Tangenten ab. Auf Grund der Polarität röhren aber die absoluten Punkte von den die Grundfläche Φ berührenden Tangenten des Böschungskreises c her, die absoluten Tangenten hingegen von den Φ und c gemeinsamen Punkten. Die folgende Einteilung der möglichen Fälle gründet sich daher in erster Linie auf die Verteilung der gemeinsamen Tangenten von c und u , in zweiter Linie auf die Art der Schnittpunkte von c und u . Die Be-

zeichnung des Grundkegelschnittes q^0 nach Coolidge¹³ ist in Klammern hinzugefügt.

1. 4 komplexe, getrennte Tangenten.

- a) 4 komplexe Schnittpunkte (Ellipse);
- b) 4 reelle Schnittpunkte (uneigentliche Ellipse). |

2. 4 reelle, getrennte Tangenten.

- a) 4 komplexe Schnittpunkte (konvexe Hyperbel);
- b) 4 reelle Schnittpunkte (konkave Hyperbel).

3. 2 reelle und 2 komplexe Tangenten (Semihyperbel).

4. 2 vereinigte und 2 komplexe Tangenten.

- a) 2 vereinigte und 2 komplexe Schnittpunkte (elliptische Parabel);
- b) 2 vereinigte und 2 reell-getrennte Schnittpunkte (uneigentliche Parabel).

5. 2 vereinigte und 2 reell-getrennte Tangenten.

- a) 2 vereinigte und 2 komplexe Schnittpunkte (konvexe hyperbolische Parabel);
- b) 2 vereinigte und 2 reell-getrennte Schnittpunkte (konkave hyperbolische Parabel).

6. 3 zusammenfallende Tangenten (oskulierende Parabel).

7. Zweimal 2 zusammenfallende Tangenten.

- a) komplexe Doppelberührungen (Kreis);
- b) reelle Doppelberührungen (Überkreis oder Abstandslinie).

8. 4 zusammenfallende Tangenten (Grenzkreis oder Horozykel).

Die Einteilung ist eigentlich für die hyperbolische Geometrie aufgestellt, gilt aber sinngemäß auch für die indefinite Metrik. Es ist zu beachten, daß — für den hyperbolischen Fall gesprochen — auch uneigentliche Kegelschnitte oder Kegelschnittsteile sehr wohl eigentliche Evolventenäste aufweisen können, wenn sie nämlich Tangenten ins Innere des Maßkegelschnittes entsenden; Entsprechendes gilt umgekehrt für die im Außengebiet herrschende indefinite Metrik. So ist etwa im

¹³ J. L. Coolidge, The elements of non-euclidean geometry (Oxford 1909), S. 142. — S. a. F. Klein, a. a. O. S. 229.

Falle 7b sowohl die eigentliche als auch die uneigentliche Abstandsline in Betracht zu ziehen.

Solange der Grundkegelschnitt vier getrennte absolute Punkte besitzt (1, 2, 3), läuft die Berechnung der Böschungslien ähnlich wie im vorigen Abschnitt auf elliptische Integrale hinaus. Sobald jedoch wenigstens zwei der absoluten Punkte zusammenrücken, lassen sich die erforderlichen Integrationen elementar ausführen; es zeigt sich, daß der Integrand bei einfacher Berührung des Maßkegelschnittes (4, 5) als Irrationalität die Quadratwurzel aus einem quadratischen Polynom enthält, bei Oskulation (6) nur mehr die Quadratwurzel aus einem linearen Ausdruck, bei Doppelberührung (7) und Hyperoskulation (8) jedoch überhaupt rational wird.

Der Fall 7a der komplexen Doppelberührung von Grundfläche und Böschungskreis liegt insbesondere bei den Drehhyperboloiden mit lotrechter Achse vor, deren Böschungslien wiederholt betrachtet wurden⁶⁻¹¹. Sie lassen sich auf einfache Weise durch komplexe Streckungen aus den sphärischen Böschungslinien (9) ableiten. Auf dem einschaligen Hyperboloid ergeben sich Kurven, die im Grundriß als Hypozykloiden oder Hyperzykloiden erscheinen, je nachdem die Böschung steiler oder flacher ist als die Neigung der Flächen erzeugenden; im Grenzfall $c = u$ sind die Erzeugenden selbst Böschungslinien. Beim zweischaligen Hyperboloid treten Parazykloiden als Grundrisse der Böschungslinien auf.

Auch der Fall 7b der reellen Doppelberührung läßt sich mittels komplexer Streckungen unschwer auf die sphärischen Böschungslinien (9) zurückführen, wie an einem Beispiel gezeigt werden soll.

Ersetzen wir in (9) etwa τ durch τ_i , y durch y_i und z durch $z \operatorname{tg} \alpha$, so erhalten wir nachstehende 45° -Böschungslinien auf dem einschaligen Hyperboloid $x^2 - y^2 + z^2 \operatorname{tg}^2 \alpha = r^2$:

$$(20) \quad \begin{aligned} x &= r' \operatorname{ch} r' \tau \operatorname{sh} r \tau - r \operatorname{sh} r' \tau \operatorname{sh} r \tau \\ y &= r' \operatorname{ch} r' \tau \operatorname{sh} r \tau - r \operatorname{sh} r' \tau \operatorname{ch} r \tau \\ z &= r \operatorname{ctg}^2 \alpha \cdot \operatorname{ch} r' \tau \end{aligned} \quad \left[\sin \alpha = \frac{r'}{r} \right].$$

Dieser Unterfall ist durch das Auftreten algebraischer Böschungslinien für rationale Werte von $\frac{y}{r}$ ausgezeichnet.

Zusammenrückende Berührungsstellen ergeben den Übergangsfall 8 der Hyperoskulation. Durch Wahl eines geeigneten Koordinatensystems läßt sich erreichen, daß der Böschungskreis c durch $y^2 = 2xz$ dargestellt wird, während die Gleichung der Grundfläche eine der vier Gestalten $y^2 = 2xy \pm z^2 \pm 1$ annimmt. Die vier Unterfälle unterscheiden sich in der Realität, der Flächenerzeugenden und der Grenzquartik q .

Wir beschränken uns auf den Fall mit positiven Vorzeichen (einschaliges Hyperboloid, reelle Grenzkurven):

$$(21) \quad y^2 - 2xz - z^2 = 1, \quad dy^2 = 2dx dz.$$

Am schnellsten führt diesmal die einfache Elimination von x zum Ziel. Sie liefert die Differentialgleichung

$$(22) \quad zd y = (y \pm \sqrt{1 - z^2}) dz.$$

Division durch z^2 führt auf ein vollständiges Differential und man erhält unmittelbar durch Integration

$$(23) \quad \pm \frac{y}{z} = \int \frac{\sqrt{1 - z^2}}{z^2} dz.$$

Mittels der Substitution $z = \sin \varphi$ ergibt sich schließlich das Lösungssystem

$$(24) \quad \begin{aligned} x &= \frac{1}{2} (\varphi + C)^2 \sin \varphi + (\varphi + C) \cos \varphi - \sin \varphi \\ y &= (\varphi + C) \sin \varphi + \cos \varphi \\ z &= \sin \varphi. \end{aligned}$$

Die dadurch dargestellten Böschungslinien sind transzendente Kurven, die zwischen den beiden Parabeln $z = \pm 1$ (die die zerfallene Grenzquartik q darstellen) unendlich oft hin und her gehen und jedesmal mit einer Spitze aufsetzen. Die Kurven sind untereinander affin, da sie durch eine gewisse Grendrehung ineinander übergehen.

Die beiden anderen Unterfälle $y^2 = 2xz - z^2 \pm 1$, die noch reelle Lösungen ergeben, lassen sich mittels hyperbolischer Funktionen ähnlich darstellen.

VI. Kegel. Auf die singulären Flächen 2. Grades lassen sich die bisherigen Beobachtungen nicht übertragen, weil das Polarsystem ausartet. Ihre Böschungslinien sind daher bestensfalls als Grenzfälle derjenigen auf regulären Flächen aufzufassen; da an ihnen auch keine besonderen allgemeingültigen Eigenschaften festgestellt wurden, sollen sie nur kurz gestreift werden.

Ist die Grundfläche Φ ein — natürlich reeller — Kegel 2. Ordnung, so kann dieser als Grenzform eines Hyperboloides angesehen werden. Für die zahlreichen Möglichkeiten der Lage gegen den Böschungskreis c ist mithin im wesentlichen die im vorigen Abschnitt aufgestellte Übersicht maßgebend.
Bei Ausübung einer Streckung vom Kegelscheitel O aus bleibt Φ und auch c fest, jede Böschungslinie auf Φ geht demnach wieder in eine Böschungslinie desselben Systems über. Diese Invarianz des Kurvensystems gegenüber der eingliedrigen kontinuierlichen Gruppe von Ähnlichkeitstransformationen hat nach Lie zur Folge, daß sich die Differentialgleichung der Böschungslinien durch Quadraturen lösen läßt. Die Rechnung bietet keinerlei grundsätzliche Schwierigkeiten, führt aber im allgemeinen wieder auf elliptische Integrale; nur im Falle einer mindestens einfachen Berührung zwischen Φ und c — wenn also mindestens zwei von den vier Böschungserzeugenden zusammenrücken — werden die Integrale elementar.

Besondere Beachtung verdient wieder der Fall der Doppelberührung. Seien X, Y die beiden (getrennten) Berührungs punkte von Φ und c und Z der Pol der Berührungssehne. Jede Affinität \mathfrak{A} mit dem Fixtetraeder $OXYZ$, die durch ein auf Φ liegendes Paar entsprechender Punkte P_0P_1 vollständig definiert ist, hat die Eigenschaft, die Grundfläche in sich überzuführen: Φ geht ja sicher in einen Kegel 2. Ordnung Φ_1 über, der das Fixtetraeder wieder längs der Kante OX und OY berührt und durch P_1 geht; durch diese Angabe ist Φ_1 aber eindeutig bestimmt und fällt daher mit Φ zusammen. Betrachten wir nun alle ∞^1 Kegel, die das Fixtetraeder längs OX und OY berühren, so stellen wir fest, daß dieses Flächentetraeder gegenüber \mathfrak{A} gänzlich invariant ist: Anwendung von \mathfrak{A} kann ja die Kegel

höchstens untereinander vertauschen, u. zw. in projektiver Weise; nun bleiben aber drei Büschelflächen fest, nämlich Φ , das Ebenenpaar $OXZ + OYZ$ und die Doppelebene OXZ ; dann bleiben aber alle Büschelflächen einzeln fest. Beachten wir vor allem die Schnittkurven mit der ebenfalls invarianten Fern ebene XYZ , dann erkennen wir: *Jede „automorphe“ Affinität \mathfrak{A} des Grundkegels Φ mit dem Fixtetraeder $OXYZ$ transformiert auch den Böschungskreis c in sich.*

Diese Invarianz bleibt natürlich auch bei wiederholter Anwendung von \mathfrak{A} aufrecht. Wählen wir das Punktpaar P_0P_1 so, daß seine Verbindungsgerade den Böschungskreis c trifft, dann liefert die fortgesetzte Anwendung von \mathfrak{A} und der Umkehrung \mathfrak{A}^{-1} ein Raumpolygon $\dots P_{-2}P_{-1}P_0P_1P_2\dots$, dessen Punkte sämtlich auf Φ liegen, dessen Seiten durchwegs dieselbe durch c bestimmte Neigung haben und das als Ganzes gegenüber \mathfrak{A} — und damit natürlich auch gegenüber der diskontinuierlichen Gruppe \mathfrak{A}^∞ — invariant ist. Bei fortschreitender Verfeinerung strebt das Näherungspolygon schließlich gegen eine Böschungslinie k auf Φ , die nun eine eingliedrige kontinuierliche Gruppe von automorphen Affinitäten der Grundfläche verträgt und als deren Bahnkurve angesprochen werden kann; sie ist daher als „W-Kurve“ zu bezeichnen.

Satz 5: *Die Böschungslinien auf einem Kegel 2. Ordnung, der den Böschungskreis an zwei Stellen berührt, bestehen aus zwei Scharen von W-Kurven, die die Bahnen zweier eingliedriger automorpher Affinitätsgruppen des Kegels sind. Die Böschungskurven einer Schar sind untereinander zentrisch ähnlich.*

Die beiden Scharen gehen durch die (i. a. schiefe) Spiegelung an der Ebene OXY in Richtung Z in sich, durch gewisse Spiegelungen an den ∞^1 Ebenen durch OZ ineinander über. — Die ebenen Projektionen der Böschungskurven aus einem Fixpunkt sind ebene W-Kurven.

Über einen interessanten Zusammenhang derartiger Böschungslinien mit den Hundeckurven soll in einer eigenen Arbeit berichtet werden.

Für die rechnerische Behandlung bietet sich von selbst

das Fixtetraeder $OXYZ$ als Grundlage des Koordinatensystems an, weil die Affinitätsgruppe dann die bekannte einfache Darstellung

$$(25) \quad x = t^\alpha x_0, \quad y = t^\beta y_0, \quad z = t^\gamma z_0$$

gestattet. Die Einheiten können so festgesetzt werden, daß der Böschungskreis c durch $2dx dy = dz^2$ definiert wird. Soll dieser Bedingung durch eine der Bahnkurven (25) Genüge geleistet werden ($x_0 y_0 z_0$ fest, t veränderlich), so ist das nur möglich, wie die Einsetzung lehrt, wenn die Exponenten die Bedingung

$$(26) \quad \alpha + \beta = 2\gamma$$

erfüllen und der erzeugende Punkt $P_0(x_0, y_0, z_0)$ auf dem Grundkegel Φ

$$(27) \quad 2\alpha\beta xy = \gamma^2 z^2$$

liegt.

Im Falle reeller Doppelberührungen sind alle auftretenden Größen reell. Hat das Verhältnis $\alpha : \beta$ einen rationalen Wert — in welchem Fall α, β und γ als ganzzahlig und teilerfremd vorausgesetzt werden können —, dann sind die Böschungslinien (25) rational-algebraisch. Hinsichtlich ihrer Ordnung n sind zwei Unterfälle zu unterscheiden:

$$\begin{aligned} \alpha\beta &> 0 \quad (c \text{ umschließt } \Phi); \quad n = \max(|\alpha|, |\beta|) \\ \alpha\beta &< 0 \quad (\Phi \text{ im Außengebiet von } c); \quad n = |\alpha - \beta|. \end{aligned}$$

Die einfachsten Annahmen sind:

$\alpha : \beta : \gamma = 1 : 3 : 2; n = 3$. Die Böschungskurven sind kubische Parabeln. Jede von ihnen ist übrigens Böschungslinie auf ∞^2 Flächen 2. Grades, unter welchen sich ∞^1 Kegel befinden.

$\alpha : \beta : \gamma = 2 : 4 : 3$ oder $-1 : 3 : 1; n = 4$. Die Böschungskurven sind rationale Quartiken mit einer Fernspitze. Jede von ihnen ist Böschungslinie auf ∞^1 Flächen 2. Grades eines Büschels.

Bei komplexer Doppelberührung von Grundkegel und Böschungskreis existieren im Reellen nur transzendentale Böschungslinien k . Transformieren wir einen der Φ und c in X und Y berührenden nullteiligen Fernkegelschnitte durch eine

geeignete Affinität in den absoluten Kugelkreis, so geht c wieder in einen Fernkreis und Φ in einen Drehkegel über, dessen Achse parallel zur Hauptrichtung verläuft. Die Automorphiengruppe besteht dann aus Ähnlichkeitstransformationen und ist eine sogenannte „Spiralung“. Ihre Bahnkurven sind die bekannten zylindrokonischen Schraubenlinien; sie sind Isogonaltrajektorien der Kegelerzeugenden und erscheinen bei lotrechter Achse im Grundriß als logarithmische Spiralen.¹⁴ Die algenen Böschungslinien k dieses Falles sind demnach affine zylindrokonische Schraubenlinien.

Bei vereinigten Berührungsstellen — Hyperoskulation von Φ und c — treten ebenfalls nur transzendentale W -Kurven auf.

VII. Zylinder. Zylindrische Grundflächen 2. Ordnung lassen sich als Grenzfälle von Paraboloiden ansehen und dementsprechend ordnen. Je nach der Lage des Fernscheitels O gegenüber dem Böschungskreis c ergeben sich stets drei Hauptfälle, die sich dadurch kennzeichnen lassen, daß die Neigung der Zylindererzeugenden steiler, gleich oder flacher als die Böschung ist. Die Unterteilung richtet sich nach der Art der Schnittpunkte von c mit den Fernzeugenden u_1, u_2 des Zylinders.

Liegt ein elliptischer Zylinder vor — Drehzyliner in begriffen —, so ergeben sich im wesentlichen nur vier Fälle. In der Aufzählung sind in Klammern normierte Annahmen vermerkt, die sich durch Anwendung reeller Affinitäten immer herbeiführen lassen; die Hauptrichtung a ist dabei lotrecht angenommen.

1. *O innerhalb von c.*
 - a) c schneidet u_1 und u_2 (elliptischer Zylinder mit lotrechter Achse);
 - b) c berührt u_1 und u_2 (Drehzyliner mit Böschungssachse).
2. *O auf c* (Drehzyliner mit waagrechter Achse).
3. *O außerhalb von c* (Drehzyliner mit waagrechter Achse).

¹⁴ Hinsichtlich ihrer konstruktiven Behandlung vgl. W. Wunderlich, Darstellende Geometrie der Spiralfächen, Mh. Math. Phys. **46** (1938).

Die Fälle 1a und 3 führen auf einfache elliptische Integrale, während 1b und 2 nur elementare Funktionen erfordern. Im Falle 1b ergeben sich Böschungskurven, die mit den gewöhnlichen Schraubenlinien identisch oder zu diesen affin sind. Im Falle 2 wird eine Schar der Böschungslinien von den Zylindererzeugenden dargestellt.

Für einen hyperbolischen Zylinder als Grundfläche ist die Einteilung aus Abschnitt III mit ihren neun Fällen maßgebend; auch die Bemerkungen über die Art der auftretenden Integrale bleiben aufrecht. Besondere Erwähnung verdienen die Fälle 2b und 3f. Bei der ersten Annahme treten algebraische Böschungslinien auf, nämlich jene W -Kurven 4. Ordnung, denen wir im vorigen Abschnitt begegnet sind. Der zweite Fall liefert als Böschungskurven pseudoeuklidische Schraubenlinien; normieren wir die Annahme in der Form

$$(28) \quad x^2 - y^2 = 1, \quad d\varepsilon^2 = dy^2 - dx^2,$$

dann lautet die Lösung

$$(29) \quad x = \operatorname{ch} \varphi, \quad y = \operatorname{sh} \varphi, \quad z = \pm \varphi + C.$$

Diese Böschungslinien werden von Loria¹⁶ erwähnt; im Normalriß auf die $x\varepsilon$ -Ebene (rechtwinkelige Koordinaten vorausgesetzt) erscheinen sie als Kettenlinien, im Normalriß auf die Asymptotenebenen des Grundzylinders als Exponentialkurven oder logarithmische Linien.

Beim parabolischen Zylinder sind die Fernerzeugenden in einer Geraden u zusammengefallen, längs welcher die Fernebene berührt. Für die Lage des Linienelementes Ou gegenüber c sind sechs Annahmen möglich:

1. O innerhalb von c (lotrechter parabolischer Zylinder).

2. O auf c .

- a) u schneidet c (Böschungszyliner mit lotrechter Hauptebene);
- b) u berührt c (Böschungszyliner mit Böschungshauptebene).

Die Fälle 1a und 3 führen auf einfache elliptische Integrale, während 1b und 2 nur elementare Funktionen erfordern. Im Falle 1b ergeben sich Böschungskurven, die mit den gewöhnlichen Schraubenlinien identisch oder zu diesen affin sind. Im Falle 2 wird eine Schar der Böschungslinien von den Zylindererzeugenden dargestellt.

Die Rechnung kommt durchwegs mit elementaren Funktionen aus. Hervorzuheben sind die Fälle mit W -Kurven als Böschungslinien: 2a (transzendente Kurven), 2b (kubische Parabeln), 3c (Quartiken); die krummen Böschungslinien der Annahme 2b sind als Bahnkurven einer affinen — d. h. pseudoeuklidischen — Grenzschaubung anzusehen¹⁶. Bemerkenswert ist schließlich noch der Fall 3a, dessen Grundfläche in der angegebenen Normierung als Grenzfall einer Drehfläche mit lotrechter Achse angesehen werden kann; damit wird die Tatsache verständlich, daß sich ihre Böschungslinien im Grundriß als gemeine Zykloiden abbilden.⁸

¹⁶ W. Wunderlich, Über eine affine Verallgemeinerung der Grenzschaubung. Sitzgsb. Akad. Wiss. Wien 144 (1935).

Es soll nicht unverwähnt bleiben, daß alle in den Abschnitten VI und VII angeführten Tatsachen, soweit sie sich auf W -Kurven beziehen, vom Verfasser bereits 1933 im Rahmen seiner ihm von Prof. E. Krupp gestellten Lehramtsprüfungs-Hausarbeit „Schaubungen im nichteuklidischen Räumen“ behandelt wurden.

- 3. O außerhalb von c .
 - a) u schneidet c komplex (waagrechte Hauptebene);
 - b) u schneidet c reell (waagrechte Scheitelebene);
 - c) u berührt c (waagrechter Zylinder mit Böschungshauptebene).

¹⁶ G. Loria, Curve sghembe speciali (Bologna 1925), II. Bd., S. 169.