Das wirkl. Mitglied Walter WUNDERLICH legt für den Anzeiger eine von ihm selbst verfaßte kurze Mitteilung vor:

ELLIPSEN ALS APPROXIMATIVE DOPPELSPEICHENKURVEN

§ 1. Unter einer *Speichenkurve* versteht man eine ebene, geschlossene und doppelpunktfreie Kurve, bei welcher sämtliche durch einen festen Punkt im Inneren gehenden Sehnen die gleiche Länge haben [2]. Solche „Autokonchoiden“ sind als Fußpunktkurven von Gleichdicken (Kurven konstanter Breite) zu gewinnen. Die einfachsten Beispiele sind offenbar – vom Kreis abgesehen – gewisse Pascalschnecken (Fußpunktkurven des Kreises) mit isoliertem Doppelpunkt; sie finden praktischen Einsatz bei Kapselpumpen und Nockentrieben [1].

Eine auf M. FUJIWARA [3] zurückgehende und später neuerlich von W. BLASCHKE, H. ROTHE und R. WEITZENBÖCK [2] aufgeworfene Frage betrifft die Existenz oder Nichtexistenz von Ovalen, die auf zweierlei Weise Speichenkurven sind. Man weiß zwar seit W. SÜSS [5], daß konvexe *Doppelspeichenkurven* zwei Symmetrieachsen besitzen müßten, nämlich die Verbindungsgerade der beiden Nabenzentren sowie deren Mittelsenkrechte, und E. WIRSING [6] hat überdies gezeigt, daß solche Kurven – falls sie existieren – analytisch sein müßten; J. HARTL [4] hat auch den Krümmungsradius in den beiden der erstgenannten Symmetrieachse angehörenden Scheitelpunkten bestimmt. Die Vermutung jedoch, daß es Doppelspeichenkurven überhaupt nicht gibt, ist bislang unbewiesen geblieben.

§ 2. Im Verlauf einer Untersuchung über Raumkurven mit einem beweglichen geschlossenen Sehnenpolygon [7] ergab sich nebenbei, daß *Ellipsen* mit nicht übermäßiger Exzentrizität näherungsweise Doppelspeichenkurven darstellen müßten. Dies soll nun nachgeprüft werden, wobei sich eine erstaunlich geringe Abweichung herausstellen wird.

Sei also eine Ellipse k mit den Halbachsenlängen a und b in kartesischen Koordinaten beschrieben durch

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2 \quad (a > b > 0). \tag{1}$$

Jene beiden zur Hauptachse parallelen Sehnen, welche die Länge $2b$ der Nebenachse haben, sind durch die Ordinatenwerte $y = \pm c$ mit $c = eb/a$ gekennzeichnet, wobei $e^2 = a^2 - b^2$. Eine schräge, unter dem Winkel u gegen die Hauptachse geneigte Gerade durch das auf der Nebenachse vorgesehene Nabenzentrum $C(0, c)$ ist gegeben durch

$$y = tx + c \quad \text{mit} \quad t = \tan u, \quad c = be/a. \tag{2}$$

Ihre Schnittpunkte P_1, P_2 mit k haben die Abszissen

$$x_{1,2} = \frac{-a^2 ct \pm bQ}{a^2 t^2 + b^2} \quad \text{mit } Q^2 = a^4 t^2 + b^4 . \tag{3}$$

Für die Sehnenlänge $P_1 P_2 = s = (x_1 - x_2)/\cos u$ ergibt sich dann die Formel

$$s = \frac{2b\sqrt{a^4 \sin^2 u + b^4 \cos^2 u}}{a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u}. \tag{4}$$

Durch Nullsetzen der (logarithmischen) Ableitung von s nach u erhält man nach kurzer Rechnung die nachstehenden Extremwerte der Funktion $s(u)$ im Quadranten $0 \leqslant u \leqslant \pi/2$:

(i) Zwei *Minima* $s_{\min} = 2b$ für $u = 0$ und $u = \pi/2$;

(ii) ein *Maximum* $s_{\max} = (a^2 + b^2)/a$ bei $u = \arctan(b/a)$. Die betreffende Sehne enthält den Brennpunkt $F(-e, 0)$ der Ellipse.

Alle übrigen Sehnen haben Längen s zwischen $s_{\min}$ und $s_{\max}$. Die *relative Abweichung* der Sehnenlänge s vom Minimalwert $2b$ beträgt mithin höchstens

$$\delta = (s_{\max} - 2b)/2b = (a - b)^2/2ab. \tag{5}$$

Da das zu C spiegelbildliche zweite Nabenzentrum $D(0, -c)$ die gleiche Rolle spielt, liegt mit der Ellipse k tatsächlich eine *approximative Doppelspeichenkurve* vor.

§3. Für die in Abb. 1 wiedergegebene Ellipse mit den Halbachsen $a = 13$, $b = 12$ und der noch ansehnlichen Exzentrizität $e = 5$ findet man $c = 60/13 \approx 4{,}615$ und $\delta = 1/312 \approx 0{,}32\%$. Die Abweichung dieser Ellipse von einer echten Doppelspeichenkurve ist demnach graphisch kaum feststellbar. Der Unterschied zwischen dem Scheitelkrümmungsradius $\rho = a^2/b = 169/12 \approx 14{,}08$ der Ellipse und dem von J. Hartl [4] angegebenen, auf der Autokonchoideneigenschaft beruhenden Wert $\bar{\rho} = (b^2 + c^2)/b = 2328/169 \approx 13{,}78$ ist allerdings auffällig.

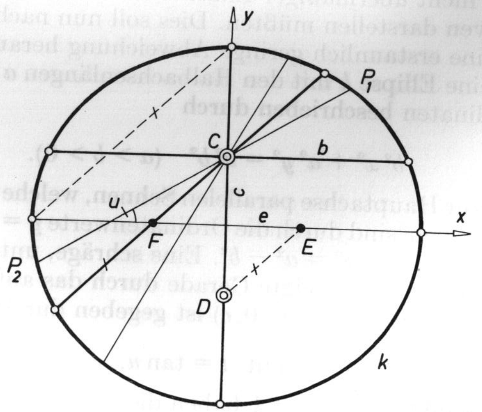

Abb. 1

Wenn auch das Existenzproblem der Doppelspeichenkurven nach wie vor ungelöst bleibt, mag ein brauchbares Studienobjekt willkommen sein.

Literatur

[1] Beyer, R.: Technische Kinematik (Leipzig 1931).

[2] Blaschke, W., H. Rothe und R. Weitzenböck: Aufgabe 552 (Doppelspeichenkurven). Archiv Math. Phys. 27 (1918), 82.

[3] Fujiwara, M.: Über die Mittelkurve zweier geschlossenen konvexen Kurven in Bezug auf einen Punkt. Tôhoku Math. J. *10* (1916), 99–108.

[4] Hartl, J.: Zum Problem der Doppelspeichenkurven. X. Österr. Math. Kongreß (Innsbruck 1981), 110.

[5] Süss, W.: Eibereiche mit ausgezeichneten Punkten; Sehnen-, Inhalts- und Umfangspunkte. Tôhoku Math. J. 25 (1925), 86–98.

[6] Wirsing, E.: Zur Analytizität von Doppelspeichenkurven. Archiv Math. *9* (1958), 300–307.

[7] Wunderlich, W.: Ebene und räumliche Kurven mit einem beweglichen geschlossenen Sehnenpolygon. Sb. Österr. Akad. Wiss. (Im Druck).