KONGRUENT-INVERSE KURVENPAARE

Walter Wunderlich, Wien

Bericht Nr. 226

BERICHTE DER MATHEMATISCH-STATISTISCHEN SEKTION IM FORSCHUNGSZENTRUM GRAZ

I. Problemstellung und Konzept

§ 1. Wird in der Ebene eine *Inversion* auf eine Kurve q ausgeübt, so entsteht eine Bildkurve q' von im allgemeinen ganz anderer Gestalt. Ein von der Science Software Systems Inc. in Los Angeles veranstalteter Wettbewerb betraf nun, in Anlehnung an [1], im wesentlichen die Frage nach solchen Kurven q, die durch eine bestimmte Inversion ι an einem einteiligen Kreis j auf eine *kongruente Kopie* $q' \simeq q$ abgebildet werden, wobei der bekannte Fall der "anallagmatischen" (oder autoinversen) Kurven $q = q'$ außer Betracht bleiben darf. Das einfachste Beispiel bieten die den Inversionskreis $j = j'$ nach Gegenpunkten schneidenden Kreise q, die vermöge ι in ihr Spiegelbild q' bezüglich des Inversionszentrums O übergehen.

Der vorliegende Bericht soll einen Einblick in den Beitrag [4] des Autors zu der gestellten Frage geben, die auf Grund der Vermischung von Euklidischer und Möbiusscher Geometrie nicht ohne Reiz ist.[1] Besonderer Wert wurde dabei auf die Ermittlung von analytisch geschlossenen, nach Möglichkeit algebraischen Lösungen gelegt.

§ 2. Sei q eine Kurve, die durch die *Inversion* $\iota: P \to P'$ auf die Kurve q' abgebildet wird (Fig.1). Ist nun $q' \simeq q$, so gibt es eine *Kongruenztransformation* $\sigma: P' \to P''$, die q' nach q zurückbringt. Die Produkttransformation $\sigma\iota = \mu: P \to P''$ ist dann eine *Möbius-Verwandtschaft*, die q in sich selbst überführt.

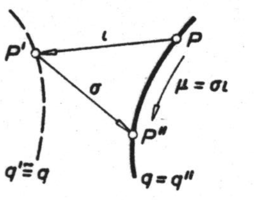

Fig. 1. Schema

Die gestellte Aufgabe läuft demnach auf die Frage nach Kurven hinaus, die gegenüber einer (quadratischen) Möbius-Transformation μ (ohne spezielle Eigenschaften) *invariant* sind.

Grundsätzlich wird dabei zu unterscheiden sein, ob die Kongruenzabbildung σ gleich- oder gegensinnig ist. Im ersten Fall ist die Möbius-Abbildung μ gegensinnig-konform, im zweiten hingegen gleichsinnig-konform.

---

[1] Der ausgesetzte Preis von 2500 $ wurde Ende Juni 1983 von der Jury zu gleichen Teilen den eingereichten Arbeiten [2], [3] und [4] zuerkannt.

Besitzt nun die wuadratische Möbius-Abbildung μ einen *reellen Fixpunkt* $N = N''$ - was im zweiten Fall stets zutrifft (Kapitel II) -, so wird sie durch eine von N aus vorgenommene *Hilfsinversion* $\kappa: P \to P^*$ $(P'' \to P''^*)$ in eine lineare Möbius-Abbildung $\mu^* = \kappa\mu\kappa$ verwandelt, also in eine *Ähnlichkeit* oder *Kongruenz*. Die so aus der gesuchten Lösungskurve $q = q''$ abgeleitete *Hilfskurve* $q^* = q''^*$ gestattet mithin die Ähnlichkeits- oder Kongruenzabbildung $\mu^*: P^* \to P''^*$ und damit die ganze, durch Iteration von μ^* und $(\mu^*)^{-1}$ erzeugte *diskontinuierliche zyklische Gruppe*. Dieser Umstand bedingt eine gewisse *periodische Struktur* der Hilfskurve q^* (vgl. Fig.2) und damit auch der zu ihr inversen Lösungskurve q (Fig.3). Die Ermittlung von passenden Hilfskurven läuft auf die Lösung einfacher *Funktionalgleichungen* hinaus, die auf periodische Funktionen führen. Hierbei sind allerdings mehrere Fallunterscheidungen nötig. - Durch rückläufige Überlegungen gelangt man zum vorläufigen

Hauptsatz: *Wird irgendeine Kurve* q^*, *die eine Ähnlichkeits- oder Kongruenzabbildung* μ^* *auf sich selbst gestattet, einer Inversion* κ *mit nichtinvariantem Zentrum unterworfen, so entsteht eine Kurve* q, *die durch gewisse Inversionen* ι *auf eine kongruente Kopie* q' *abgebildet wird.*

Im Hinblick auf die von μ^* erzeugte Automorphismengruppe von q^* existieren meist mehrere, unter Umständen unendlich viele der betreffenden Inversionen ι.

§ 3. Besitzt hingegen die quadratische Möbius-Abbildung μ *keinen reellen Fixpunkt* - was im gegensinnig-konformen Fall eintreten kann (Kapitel III) -, so muß ein anderer Weg eingeschlagen werden. Der allgemeine ("ellipriscche") Fall dieser Art läßt sich dabei auf den einfacheren "zyklischen Fall" zurückführen (§ 11).[2]

II. Gegensinnig kongruent-inverse Kurvenpaare

§ 4. Unter Verwendung der *Gaußschen Zahlenebene* kann die *Inversion* $\iota: P \to P'$ dargestellt werden durch

(1) $\quad z' = a^2/\bar{z} \quad (z = x + iy,\ \bar{z} = x - iy,\ a = \bar{a} > 0)$.

Die als *gegensinnig* vorausgesetzte *Kongruenzabbildung* $\sigma: P' \to P''$ kann zerlegt werden in eine Spiegelung an einem Ursprungsstrahl invarianter Richtung und eine Translation. Wird die

---

[2] Dieser zyklische Fall ist das Hauptanliegen der Beiträge [2] und [3].

Spiegelachse als x-Achse gewählt, so wird σ beschrieben durch

(2) $\quad z'' = \bar{z}' + b \quad$ mit $b = b' + ib''$, $b', b'' \in \mathbb{R}$, $b' \geqq 0$).

Sie kann auch aufgefaßt werden als Spiegelung an der x-parallelen Achse h: $y' = y'' = b''/2$ mit nachfolgender Schiebung längs h um den Betrag b' ("Gleitspiegelung").

Die durch Zusammensetzung von ι und σ erklärte (gleichsinnige) *Möbius-Transformation* $\sigma\iota = \mu$: $P \to P''$ wird dann erfaßt durch

(3) $\quad z'' = \dfrac{a^2}{z} + b \quad$ oder $\quad zz'' - bz - a^2 = 0.$

Die durch $z = z''$ gekennzeichneten *reellen Fixpunkte* $M = M''$ und $N = N''$ ergeben sich durch Auflösung der Gleichung $z^2 - bz - a^2 = 0$ mit

(4) $\quad z_{1,2} = \frac{1}{2}(b \pm R)$, $\quad$ wobei $R^2 = b^2 + 4a^2$.

Im Hinblick auf die geplante Inversion κ von N aus sei zunächst die Koordinatenverschiebung $(O; x, y) \to (N; \xi, \eta)$, also die Substitution

(5) $\quad \zeta = z - z_2 \quad (\zeta'' = z'' - z_2)$

vorgenommen. In den neuen Koordinaten schreibt sich nun die Möbius-Abbildung μ in der Gestalt

(6) $\quad \zeta\zeta'' - z_1\zeta + z_2\zeta'' = 0.$

Die Gaußschen Koordinaten der beiden Fixpunkte M und N lauten nun $\zeta_1 = z_1 - z_2 = R$ bzw. $\zeta_2 = 0$. Die *Hilfsinversion* κ: $P \to P^*$ mit dem Zentrum N und einem beliebigen Radius $c = \bar{c} > 0$ ist nun festgelegt durch

(7) $\quad \zeta^* = c^2/\bar{\zeta} \quad (\zeta''^* = c^2/\bar{\zeta}'').$

Sie verwandelt die quadratische Möbius-Abbildung μ (6) im allgeomeinen in eine *gleichsinnige Ähnlichkeit* $\kappa\mu\kappa = \mu^*$: $P^* \to P''^*$, dargestellt durch

(8) $\quad \bar{z}_2\zeta^* - \bar{z}_1\zeta''^* + c^2 = 0,$

mit einem eigentlichen Fixpunkt M^*: $\zeta_1^* = c^2/(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) = c^2/\bar{R}$, vorausgesetzt daß $R \neq 0$ $(M \neq N)$.

§ 5. Im Hauptfall $R \neq 0$, $b' = \mathrm{Re}\, b > 0$ ist M^* ein eigentlicher Punkt. Nach Vornahme einer neuerlichen Koordinatenverschiebung $(N; \xi, \eta) \to (M^*; X, Y)$, bewerkstelligt durch

(9) $\quad Z = \zeta^* - \zeta_1^* \quad (Z'' = \zeta''^* - \zeta_1^*) \quad$ mit $\zeta_1^* = c^2/\bar{R}$,

vereinfacht sich die Darstellung von μ^* zur Normalform

(10) $\quad \bar{z}_2 Z - \bar{z}_1 Z'' = 0$ oder $Z'' = \Lambda Z$ mit $\Lambda = \bar{z}_2/\bar{z}_1 = \rho \cdot e^{i\omega}$.

Diese lineare Abbildung ist unter den getroffenen Voraussetzungen eine *Drehstreckung*, bestehend aus einer Drehung um

den Ursprung M^* durch den Winkel $\omega = \arg \Lambda = \measuredangle\, NOM \neq 0$ und einer zentrischen Streckung mit dem Faktor $\rho = |\Lambda| = ON{:}OM \neq 1$ vom gleichen Zentrum M^* aus.

§ 6. Nun kommt es also darauf an, *Hilfskurven* q^* anzugeben, welche die Drehstreckung μ^* (10) vertragen. Sind A^* und A''^* irgendzwei vermöge μ^* verknüpfte Punkte, so könnte man sie durch einen beliebigen Bogen miteinander verbinden. Wiederholte Anwendung von μ^* und der Umkehrung $(\mu^*)^{-1}$ erzeugt dann aus diesem Bogen eine stetige Kurve q^* mit einer charakteristischen spiralig-periodischen Struktur (Fig.2). Wünscht man jedoch statt einer solchen aus ähnlichen Teilbögen "gestückelten" Kurve eine *analytisch geschlossene*, so kann man verfahren wie folgt.

Man denke sich q^* in Parameterform $Z = Z(\phi)$ beschrieben und verlange gemäß (10)

(11) $\quad Z'' = \Lambda \cdot Z(\phi) = Z(\phi + \omega)$, wobei $\Lambda = \rho \cdot e^{i\omega}$.

Hierzu eignet sich nach Vornahme der zulässigen Substitution $\rho = e^{p\omega}$ mit $p = \frac{1}{\omega} \ln \rho$ der Ansatz

(12) $\quad Z(\phi) = e^{p\omega} e^{i\phi} \cdot w(\phi).$

Die Forderung (11) führt dann auf die *Funktionalgleichung*

(13) $\quad w(\phi + \omega) = w(\phi),$

die lediglich verlangt, daß $w(\phi)$ eine komplexe *periodische Funktion* mit der Periode ω ist. Brauchbare Funktionen dieser Art sind etwa $\sin 2m\phi$ oder $\cos 2m\phi$ mit dem "Modul" $m = \pi/\omega$, oder allgemeiner

(14) $\quad w(\phi) = \sum_j (a_j \cos jm\phi + b_j \sin jm\phi)$, $\quad a_j, b_j \in \mathbb{C}$, $\; j \equiv 0\ (2)$.

Durch geeignete Parametrisierung von ϕ und w nach dem Muster

(15) $\quad \phi = \dfrac{t}{2\pi} + \psi(t), \quad w(t) = u(t) + iv(t)$

mittels 2π-periodischer, reeller Funktionen $\psi(t)$, $u(t)$ und $v(t)$ sind noch weitere, auch mehrwertige Funktionen $w(\phi)$ zu gewinnen, deren Vielfalt sich durch Produkt- oder Quotientenbildung, Potenzierung etc. unbeschränkt vermehren läßt.

Hat man sich schließlich für eine derartige Funktion $w(\phi)$ entschieden und damit für die Hilfskurve q^* (12), so ist die entsprechende *Lösungskurve* q mit Hilfe der Rücktransformation

(16) $\quad z(\phi) = \dfrac{c^2}{\bar{Z}(\phi) + \bar{\zeta}_1^*} + z_2 \quad$ mit $\bar{\zeta}_1^* = c^2/R$

zu finden, wobei R und z_2 aus (4) zu entnehmen sind.

Das einfachste Beispiel ergibt sich mit $w = a_0 = \mathrm{const} \neq 0$. Hier ist q^* eine logarithmische Spirale mit dem Kurswinkel $\theta = \operatorname{arccot} p$; demnach ist q eine Inverse davon, die als "Möbius-Spirale" bezeichnet werden mag (vgl. l^* bzw. l in Fig.2).

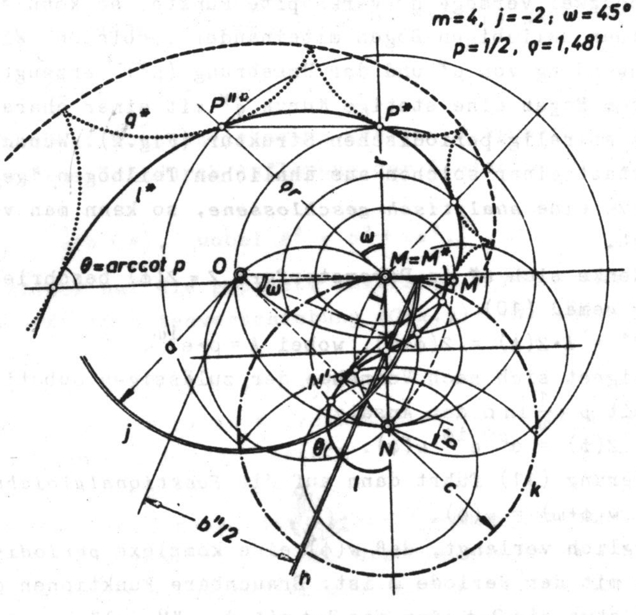

Fig. 2. Gespitzte Hypospiraloide

Weniger triviale Beispiele liefert die Wahl $w(\phi) = a_0 + a_j e^{jmi\phi}$ mit geradem j. Hier ist q^* eine sogenannte Spiraloide (Fig.2), q eine Inverse davon (Fig.3).

§ 7. Im Spezialfall $R \neq 0$, $b' = \mathrm{Re}\, b = 0$ kann $b'' = \mathrm{Im}\, b \geq 0$ angenommen werden. Das Verschwinden des Translationsvektors b' bedeutet, daß sich die Gleitspiegelung σ (2) auf eine reine *Spiegelung* reduziert. Hieraus folgt weiter, daß die Schnittpunkte der Spiegelachse h mit dem Inversionskreis j Fixpunkte der Möbius-Abbildung μ (3) sind. Die Diskriminante $R^2 = 4a^2 + b^2 = 4a^2 - b''^2$ fällt stets reell aus, man wird aber nach ihrem Vorzeichen *zwei Unterfälle* zu unterscheiden haben.

Im 1.Unterfall $R^2 > 0$ $(0 < b'' < 2a)$ sind die Schnittpunkte von h und j reell und mit den Fixpunkten M und N von μ identisch. Die Drehstreckung μ^* (10) reduziert sich wegen $\rho = 1$ auf eine reine *Drehung* durch den Winkel $\omega = 2 \arccos(b''/2)$.

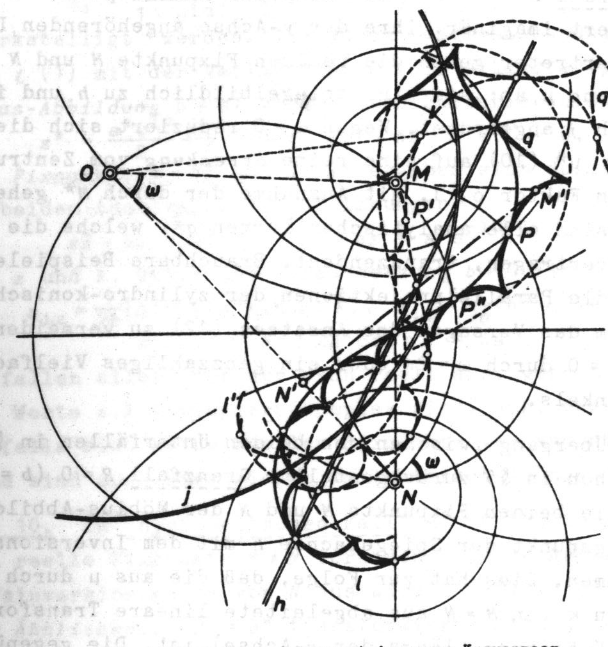

Fig. 3. Gegensinnig kongruent-inverses Kurvenpaar

Die Hilfskurve q^* ist also durch Drehymmetrie gekennzeichnet, wie sie etwa die Epi- und Hypotrochoiden aufweisen. Der analytische Apparat aus § 6 behält seine Gültigkeit, vereinfacht sich jedoch etwas zufolge $p = 0$. Ist überdies der Modul $m = \pi/\omega$ rational, so fällt q^* (und damit auch q) geschlossen, eventuell sogar algebraisch aus. Die maßgebende Modifikation des Hauptsatzes aus § 2 lautet nun:

Wird irgendeine drehsymmetrische Kurve q^* (Zentrum M^*, kleinster Drehwinkel $\omega = \pi/m$) von einem Punkt $N \neq M^*$ aus einer Inversion κ unterworfen, so entsteht eine Kurve q, die durch gewisse Inversionen ι_n auf ihr Spiegelbild q' bezüglich der Achse M^*N abgebildet wird. Das Zentrum O_n einer solchen Inversion liegt auf der Symmetrale von MN ($M = \kappa M^*$), so zwar daß $\measuredangle NO_nM = n\omega$ (n ganz).

Als Korollar für $m = 1$ $(\omega = \pi)$ ergibt sich der auf *zentrischsymmetrische Hilfskurven* q^* bezügliche (auch elementar leicht beweisbare) Satz von J.L.KAVANAU [1, S.379]. Das Zentrum O der (einzigen) Inversion ι liegt dabei in der Mitte der Strecke MN.

Im 2.Unterfall $R^2 < 0$ ($b'' > 2a$) sind die Schnittpunkte von h und j konjugiert-imaginär. Ihre der y-Achse angehörenden Laguerreschen Vertreter geben die reellen Fixpunkte M und N der Möbius-Abbildung μ ab; sie sind spiegelbildlich zu h, und invers bezüglich j angeordnet. Wegen $\omega = 0$ reduziert sich die Drehstreckung μ^* (10) auf eine reine *Streckung* vom Zentrum M^* aus, mit einem Faktor $\rho \neq 1$. Mit Ausnahme der durch M^* gehenden Strahlen sind alle analytischen Kurven q^*, welche die Streckung μ^* vertragen, transzendent. Brauchbare Beispiele liefern etwa die Parallelprojektionen der zylindro-konischen Loxodromen. Um das Versagen des Ansatzes (12) zu vermeiden, ersetze man $\omega = 0$ durch $\omega = 2\pi$ oder ein ganzzahliges Vielfaches des vollen Winkels.

§ 8. Den Übergang zwischen den beiden Unterfällen in §7 bildet der schon in §5 zurückgestellte Grenzfall $R = 0$ ($b = 2ia$). Hier rücken die beiden Fixpunkte M und N der Möbius-Abbildung μ im Berührungspunkt der Spiegelachse h mit dem Inversionskreis j zusammen. Dies hat zur Folge, daß die aus μ durch die Hilfsinversion κ von $M = N$ aus abgeleitete lineare Transformation μ^* eine *Schiebung* (längs der y-Achse) ist. Die gegenüber dieser Schiebung invarianten Hilfskurven q^* zeigen daher jene periodische Struktur, wie sie etwa die Zykloiden aufweisen. Wird also eine solche Kurve q^* einer beliebigen Inversion κ unterworfen, so erhält man eine Kurve q, die durch gewisse, abzählbar unendlich viele Inversionen ι_n auf ihr Spiegelbild q' bezüglich jener Achse h abgebildet wird, die das Zentrum $N = M$ von κ enthält und normal zur Schiebrichtung verläuft; die Zentren O_n der Inversionen ι_n liegen auf dem durch $M = N$ gehenden Schiebstrahl.

III. Gleichsinnig kongruent-inverse Kurvenpaare

§ 9. Die jetzt als *gleichsinnig* vorausgesetzte Kongruenzabbildung σ: $P' \to P''$ kann zerlegt werden in eine Drehung um das Inversionszentrum O (Winkel $\alpha \neq 0$) und eine nachfolgende Schiebung (Vektor b). Nimmt man die x-Achse in Schiebrichtung an, so ist b reell, und σ wird beschrieben durch

(17) $z'' = e^{i\alpha} z' + b \quad \text{mit } b = \bar{b} \geq 0.$

Diese Verlagerung σ von q nach $q'' = q$ könnte auch durch eine Drehung allein (durch denselben Winkel α) um den durch $z' = z''$ bestimmten Drehpol H mit der Gaußschen Koordinate

(18) $z_0 = \dfrac{b}{1 - e^{i\alpha}} = \dfrac{b}{2}(1 + i \cot \dfrac{\alpha}{2})$

bewerkstelligt werden. Die durch Zusammensetzung der Inversion ι (1) mit der Verlagerung σ (17) erklärte (gegensinnige) *Möbius-Abbildung* $\mu = \sigma\iota$ wird sonach beschrieben durch

(19) $z'' = \dfrac{a^2 e^{i\alpha}}{\bar{z}} + b \quad$ oder $\quad \bar{z}z'' - b\bar{z} - a^2 e^{i\alpha} = 0.$

Ihre *Fixpunkte* $M = M''$ und $N = N''$ ergeben sich durch Auflösung der beiden (äquivalenten) Gleichungen

(20) $z\bar{z} - b\bar{z} = a^2 e^{i\alpha}, \quad z\bar{z} - bz = a^2 e^{-i\alpha}$

nach z und $\bar{z}$. Unter der Voraussetzung $b > 0$ findet man:

(21) $z_{1,2} = \dfrac{1}{2b}(b^2 + 2ia^2 \sin\alpha \pm R), \quad \bar{z}_{1,2} = \dfrac{1}{2b}(b^2 - 2ia^2 \sin\alpha \pm R)$
mit $R^2 = (b^2 + 2a^2 \cos\alpha)^2 - 4a^4$.

Sie fallen allerdings nur dann reell aus, wenn zusammengehörige Werte $z, \bar{z}$ konjugiert-komplex sind, d.h. wenn $R^2 \geq 0$; andernfalls sind keine reellen Fixpunkte vorhanden. Dementsprechend sind auch hier wieder Fallunterscheidungen nötig.

§ 10. Im "hyperbolischen Fall" $R^2 > 0$ ($b > 2a|\sin\frac{\alpha}{2}|$) sind zwei reelle Fixpunkte $M \neq N$ vorhanden. Durch Ausübung der Hilfsinversion κ (7) von N aus wird μ (19) in eine *gegensinnige Ähnlichkeit* $\kappa\mu\kappa = \mu^*$ transformiert, die in dem angepaßten Koordinatensystem ($M^*; X, Y$) dargestellt wird durch

(22) $Z'' = \Lambda \cdot \bar{Z} \quad \text{mit } \Lambda = z_2/z_1 = \rho \cdot e^{i\omega}.$

Es ist dies eine *Spiegelstreckung*, bestehend aus der Spiegelung an einer durch M^* gehenden Achse und einer zentrischen Streckung mit dem Faktor $\rho = |z_2/z_1|$ von M^* aus. Die Bestimmung von gegenüber μ^* invarianten *Hilfskurven* q^* läßt sich durch den zu (12) ähnlichen Ansatz

(23) $Z(\phi) = e^{p\phi} e^{i\omega/2} \cdot w(\phi) \quad \text{mit } e^{p\omega} = \rho$

zurückführen auf die Funktionalgleichung

(24) $w(\phi + \omega) = \bar{w}(\phi) \quad \text{mit } \omega = \arg(z_2/z_1) = \sphericalangle MON,$

die wieder auf gewisse periodische Funktionen für den Real- und Imaginärteil von $w(\phi)$ führt. Die *Lösungskurven* q bilden übrigens eine Unterfamilie der in §6 erhaltenen, weil sie mit μ auch die gleichsinnige Möbius-Abbildung μ^2 vertragen.

Ähnlich Feststellungen sind auch im "parabolischen Fall" $R = 0$ ($b = 2a|\sin\frac{\alpha}{2}|$) zu machen, in welchem die Fixpunkte in einem reellen Punkt $M = N$ des Inversionskreises j zusammenrücken. Dies führt dann auf eine *Gleitspiegelung* μ^* und damit auf periodische Hilfskurven q^* vom Charakter der Sinuslinien.

§ 11. In dem wichtigen "zyklischen Fall" $b = 0$ geht es um Lösungskurven q, die mit ihren Inversen q' durch eine *Drehung um das Inversionszentrum* $O = H$ verknüpft sind. Auf Grund von $R^2 = -4a^4\sin^2\alpha \leq 0$ besitzt die zugehörige Möbius-Abbildung μ

(25) $\quad \bar{z}z' = a^2 e^{i\alpha}$

keine reellen Fixpunkte, sofern nicht $\alpha = 0 \pmod{2\pi}$. Diese hinfort ausgeschlossene Annahme, bei welcher jeder Punkt des Inversionskreises j festbleibt, würde zu den anallagmatischen Kurven $q = q'$ führen, die sich als Inverse von axial-symmetrischen Hilfskurven q^* gewinnen ließen.

Ansonsten lassen sich die in der Gestalt $z = z(\phi)$ dargestellten, gegenüber μ invarianten *Lösungskurven* $q = q''$ durch den Ansatz

(26) $\quad z(\phi) = a\, e^{i\phi}\cdot w(\phi)$

erfassen, was entweder

(27) $\quad \bar{w}(\phi)\cdot w(\phi+\alpha) = 1$

oder

(28) $\quad \bar{w}(\phi)\cdot w(\phi+\beta) = -1 \quad$ mit $\beta = \alpha+\pi$

verlangt. Die multiplikative Funktionalgleichung (27) kann durch die Substitution

(29) $\quad W(\phi) = \dfrac{1+w(\phi)}{1-w(\phi)}$

auf die additive Form

(30) $\quad \bar{w}(\phi) + w(\phi+\alpha) = 0$

gebracht werden. Nach der Aufspaltung $w = u + iv$ ergeben sich für den Real- bzw. Imaginärteil die Bedingungen

(31) $\quad u(\phi+\alpha) = -u(\phi), \quad v(\phi+\alpha) = v(\phi),$

die am einfachsten wieder durch trigonometrische Polynome (oder konvergente Reihen) der Gestalt (14) zu erfüllen sind, wobei diesmal $m = \pi/\alpha$ und $a_j, b_j \in \mathbb{R}$; die Indizes j sind für u ungerade, für v gerade zu nehmen. Durch Parametrisierungen nach dem Muster (15) und sonstige periodenerhaltende Operationen ist die Lösungsmannigfaltigkeit beliebig zu erweitern.

Die schwierigere Alternative (28) ist durch den Ansatz

(32) $\quad W(\phi) = \dfrac{P(\phi)}{Q(\phi)}$ mit $P(\phi+\beta) = -\bar{Q}(\phi)$, $Q(\phi+\beta) = \bar{P}(\phi)$

zu bewältigen, der wieder durch geeignete trigonometrische Polynome $P(\phi)$ und $Q(\phi)$ mit komplexen Koeffizienten zu befriedigen ist.

Mit rationalem Modul $m = \pi/\alpha$ kann man wieder zu *algebraischen Lösungen* gelangen. So liefert etwa die Wahl $w = a_1\cos 2\phi$

in (29) eine doppelt-symmetrische Sextk q, die nach Viertelschwenkung um ihr Zentrum mit ihrer Inversen q' zur Deckung kommt. Die gleiche Eigenschaft weist die zur Annahme $W = \cot\phi$ in (28) gehörige Kappa-Kurve auf (Fig.4). Nebenbei bemerkt, erhält man für $m = 1$ $(\omega = \pi)$ die anti-anallagmatischen Kurven.

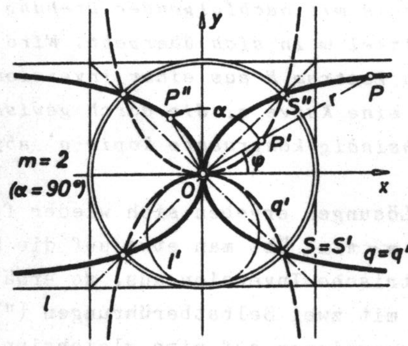

Fig. 4. Kappa-Kurve (4.Ordnung)

Eine andere Möglichkeit zur Gewinnung von Lösungskurven des zyklischen Typs bietet die stereographische Projektion geeigneter periodischer Kurven auf der Kugel.[3] So gelangt man etwa durch stereographische Projektion der sphärischen "Tennisball-Kurve" (4.Ordnung) zu der inder Ausschreibung erwähnten Cassinischen Kurve

(33) $\quad (x^2+y^2)^2 - 2b^2(x^2-y^2) = a^4.$

§ 12. Im "elliptischen Fall" $R^2 < 0$, $b > 0$ sind auch keine reellen Fixpunkte vorhanden. Die durch die Gaußschen Koordinaten z_1, z_2 aus (21) definierten reellen Punkte M und N bilden jedoch ein *vertauschbares Punktepaar:* $M'' = N$, $N'' = M$. Die Ausübung der Hilfsinversion κ (7) von N aus wirft diesen Punkt ins Unendliche und verwandelt daher die Möbius-Abbildung μ (19) in eine solche vom *zyklischen Typ* (§ 11). Diese Abbildung $\mu^* = \kappa\mu\kappa$ wird dargestellt durch

(34) $\quad \bar{Z}Z'' = \dfrac{b^2c^4}{-R^2}\cdot\dfrac{z_1}{z_2} = A^2 e^{i\omega}$

[3] Diese Methode wird auch in [2] und [3] ausgiebig benutzt.

und setzt sich demgemäß zusammen aus der Inversion an einem Kreis vom Radius A und einer Drehung um das Inversionszentrum $M^* = \kappa M$ durch den Winkel $\omega = \arg(z_1/z_2) = \sphericalangle NOM$; dieser läßt sich berechnen aus $\cos\omega - \cos\alpha = b^2/2a^2$.

Anstelle des Hauptsatzes aus § 2 tritt nun der

<u>Satz:</u> *Sei q^* irgendeine Kurve des zyklischen Typs aus § 11, d.h. eine drehsymmetrische Kurve, die durch Inversion an einem konzentrischen Kreis mit nachfolgender Drehung um ihr Zentrum M^* durch einen Winkel ω in sich übergeht. Wird diese Kurve q^* von einem anderen Zentrum N aus einer Inversion κ unterworfen, so entsteht eine Kurve q, die durch gewisse Inversionen ι auf eine gleichsinnig-kongruente Kopie q' abgebildet werden kann.*

Algebraische Lösungen ergeben sich wieder für rationale Werte des Moduls $m = \pi/\omega$. Übt man etwa auf die Kappa-Kurve aus Fig.4 eine exzentrische Inversion aus, so erhält man eine trizirkulare Sextik mit zwei Selbstberührungen ("Brezel-Kurve"), die durch zwei Inversionen auf eine gleichsinnig-kongruente Kopie und durch eine andere Inversion auf ein Spiegelbild abbildbar ist (§7); überdies ist sie im allgemeinen doppelt anallagmatisch (§ 11).

Literatur

[1] J.L.KAVANAU: Curves and Symmetry, I. Science Software Systems, Inc. (Los Angeles, 1982).

[2] J.F.RIGBY: The inversive Symmetry of Curves. University College, Cardiff (1983), 57 pp. with 70 figg.

[3] J.B.WILKER: Möbius Equivalence and Euclidean Symmetry. University of Toronto (1983), 48 pp. with 39 figg.

[4] W.WUNDERLICH: Congruent-inverse Curve Pairs. Technical University of Vienna (1982), 71 pp. with 34 figg.

Anschrift des Autors:

Emer.Prof. W.Wunderlich
Institut für Geometrie
Technische Universität Wien
Gußhausstraße 27
A-1040 Wien