

Ebene und räumliche Kurven mit einem beweglichen geschlossenen Sehnenpolygon

Von
W. M. Walter Wunderlich (Wien)
(Mit 10 Abbildungen)
(Vorgelegt in der Sitzung der math.-nat. Klasse am 14. Oktober 1983)
Herrn Prof. Dr. Karl Strubecker zum 80. Geburtstag gewidmet

1. Einleitung

Versucht man, eine Kreislinie k mit einer konstanten Zirkelöffnung c in endlich vielen Schritten abzulaufen, so gelingt dies dann, wenn c Seite oder Diagonale eines einbeschriebenen regulären Vielecks ist; die Schließung erfolgt dabei naturgemäß unabhängig vom Ausgangspunkt. Im Gegensatz dazu wird bei einer anderen Kurve k die zu einem geschlossenen Sehnenpolygon führende Seitenlänge c im allgemeinen wesentlich von der Ausgangsstelle abhängen; man vergleiche hierzu Abb. 1 und 2.

H. J. Fischer [2] hat nun 1939 die Frage aufgeworfen, ob es außer dem Kreis noch *andere ebene Kurven* k gibt, bei welchen sich ein *gleichseitiges Sehnenpolygon* mit einer bestimmten Seitenlänge c nach einer festen Anzahl n von Schritten *unabhängig vom Ausgangspunkt schließt*. Ein derartiges Polygon $A_1 A_2 \dots A_n$, etwa als gelenkige Gliederkette vorstellbar, lässt sich dann *stetig längs der Kurve k herumführen*, wobei sich die Winkel für gewöhnlich ändern. Die in [2] entwickelte, auf ein Paar von Funktionalgleichungen zurück geführte Lösung ist allerdings nicht in jeder Hinsicht befriedigend; insbesondere liefert sie nicht die (existierenden) algebraischen Lösungskurven. In der vorliegenden Abhandlung wird nun eine anschauliche, kinematisch einfach deuthbare

Lösungsmethode mitgeteilt (Abschnitt 2), ferner werden unter einer Zusatzbedingung beliebig viele *algebraische Lösungen* gefunden (Abschnitt 3), die für eine getriebetechnische Frage von praktischer Bedeutung sind.

Das angegebene Verfahren läßt sich zwanglos auch auf die bisher nicht erörterte Frage nach *Randkurven* mit einem beweglichen geschlossenen Sehnenpolygon anwenden (Abschnitt 4). Unter geeigneten Zusatzforderungen sind ebenfalls wieder algebraische Lösungen zu gewinnen (Abschnitte 5–7). Bemerkenswert erscheint, daß in einer der betrachteten Familien sogar *ungleichseitige bewegliche Sehnenpolygone* auftreten (Abschnitt 6), ein Phänomen, für das es im ebenen Fall noch kein Beispiel gibt.

Die Möglichkeit der Bewegung eines *starrer Sehnenpolygons*, für ebene Kurven gleichfalls von H. J. Fischer [1] betrachtet und vom Verfasser in einer kurzen Note an H. H. Adwiger [4] erledigt, bleibt hier außer Betracht; die einfachsten Beispiele werden von gewissen Radlinien geliefert.

2. Das ebene Problem

Es zeigt sich, daß von den gesuchten Lösungskurven des Fischerischen Problems bei bescheidenen Ansprüchen jeweils der größte Teil willkürlich vorgegeben werden kann, worauf der Rest leicht zu ergänzen ist. (Voraussetzung: Der Kurbelradius ist relativ groß im Vergleich zum Abstand zwischen dem Führungsrand und dem Kurvenpunkt.)

Sei k irgendeine geschlossene, glatte Kurve in der Ebene, und $A_1 A_2 \dots A_n$ ($n > 3$) ein k eingeschriebenes, geschlossenes und gleichseitiges Polygon mit der Eigenschaft, daß jede seiner Seiten durch stetiges und immer im gleichen Sinn erfolgendes Gleiten ihrer Endpunkte längs k zwangsläufig in die nächste Seite übergeht. Auch wenn das Polygon gelenkig gedacht wird, ist es in der Regel nicht längs k verschiebbar. Nun entferne man etwa den zur Sehne $A_n A_1$ gehörigen Teilbogen von k und bewege das geschlossene Gelenkpolygon längs des Restes von k so, daß A_1 nach A_2 gelangt, wobei A_2 nach A_3 rückt usf. bis A_{n-1} nach A_n . Das Gelenk A_n verläßt hingegen die ursprüngliche Kurve k und beschreibt eine glatte Bahn l , die in A_1 endet und so die verbliebene Lücke schließt.

Der verwendete, von A_1 bis A_n reichende Teil von k bildet dann zusammen mit dem Ergänzungsbogen l eine *geschlossene Kurve*, in welcher sich das *geschlossene Sehnenpolygon* $A_1 A_2 \dots A_n$ *stetig herumführen* läßt.

Der vom Kniegelenk A_n durchlaufene Kurvenbogen l ist graphisch

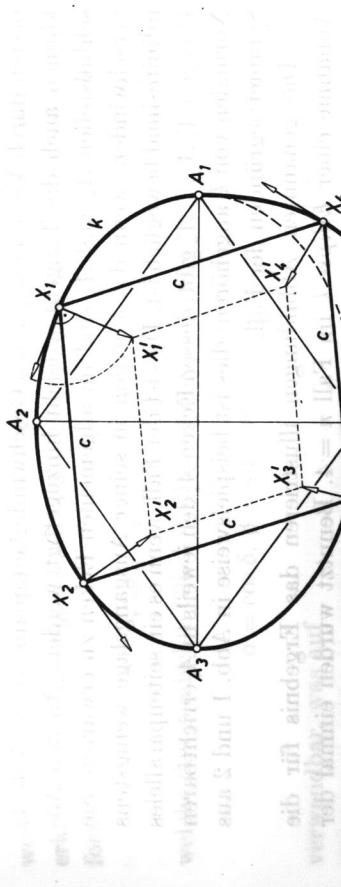


Abb. 1. Von einer Ellipse abgeleitete Kurve mit beweglichem Sehnenrhombus samt Geschwindigkeitsplan

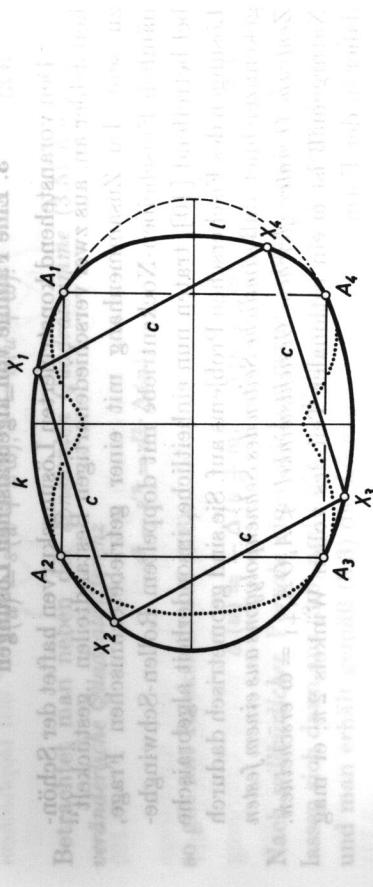


Abb. 2. Von einer Ellipse abgeleitetes Oval mit beweglichem Sehnenrhombus

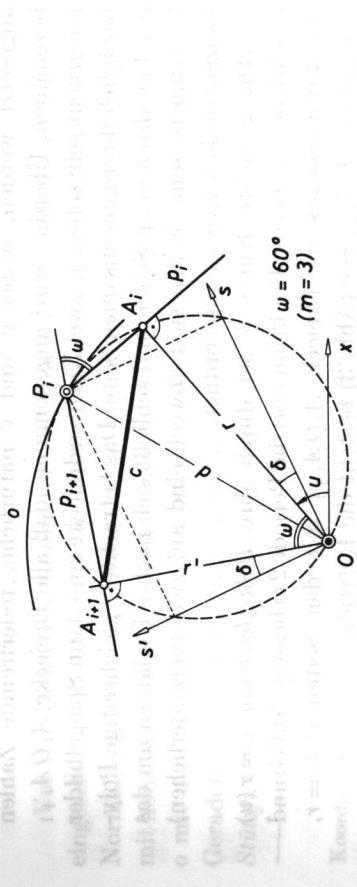


Abb. 3. Beziehungen bei konstantem Gesichtswinkel

besten durch Verwendung eines Geschwindigkeitsplans wie in Abb. 1) können auch die Tangenten leicht hinzugefügt werden. An den Anschlußstellen A_n und A_1 sind im allgemeinen Ecken zu erwarten. Sie verschwinden, wenn das Polygon in seiner Ausgangslage wenigstens infinitesimal beweglich ist. Dies ist der Fall, wenn es ein seitenparalleles Polygon $A'_1 A'_2 \dots A'_n$ gibt, dessen Ecken A'_i den jeweils in A_i errichtbaren Normalen von k angehören; dies ist beispielsweise in Abb. 1 und 2 aus Symmetriegründen der Fall.

Die genannten Abbildungen illustrieren das Ergebnis für die Annahme einer *Ellipse* k im Fall $n = 4$. Benutzt wurden einmal der Sehnenrhombus mit der größten Seitenlänge, das andere Mal jener mit der kürzesten Seite. Der ergänzende Kurvenbogen l ist in beiden Fällen Teil einer algebraischen Kurve 32. Ordnung.

Verfasser: W. Wunderlich
Verarbeitet für: Wiss. Rat

3. Eine Familie von algebraischen Lösungen

Den voranstehend konstruierten Lösungskurven haftet der Schönheitsfehler an, aus zwei verschiedenartigen Bestandteilen „gestrückelt“ zu sein. Im Zusammenhang mit einer getriebetechnischen Frage, nämlich Einscheiben-Nockentrieb mit doppeltem Rollen-Schwinghebel betreffend [10], traten nun einheitliche, insonderheit algebraische Lösungen des Fischerischen Problems auf. Sie sind geometrisch dadurch gekennzeichnet, daß sämtliche Seiten des Sehnenpolygons aus einem festen Zentrum O unter gleichem Gesichtswinkel $\propto A_i O A_{i+1} = \omega$ erscheinen. Naturgemäß ist ω ein rationaler Teil des vollen Winkels 2π ; er mag daher in der Form

$$\omega = \frac{\pi}{m} \text{ mit } m = \mu/v > 1 \quad (3.1)$$

angesetzt werden, wobei μ und v natürliche, teilerfremde Zahlen bezeichnen. Überdies wird angenommen, daß alle Dreiecke $A_i O A_{i+1}$ kongruent sein sollen; je zwei Nachbardreiecke sind dann Spiegelbilder bezüglich ihrer gemeinsamen Seite. Das betrachtete gleichseitige Polygon hat also $n = 2\mu$ Seiten und schließt sich nach v Umläufen um das Zentrum O ; seine Ecken sind abwechselnd auf zwei (veränderlichen) konzentrischen Kreisen angeordnet.

Die gesuchte Kurve k sei durch ihre *Polargleichung* $r = r(u)$ beschrieben, wobei die Funktion $r(u)$ die Periode 2ω besitzt. Auf Grund des Kosinussatzes im Dreieck $A_i O A_{i+1}$ mit den Seiten $O A_i = r$, $O A_{i+1} = r'$, $A_i A_{i+1} = c$ (Abb. 3) besteht die Relation

$$r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \omega = c^2, \quad (3.2)$$

wobei $r = r(u) = r(u + 2\omega)$ und $r' = r(u + \omega)$. Die Lösung der so erklärten *Funktionalgleichung* (3.2) gelingt mittels einer linearen Transformation

$$r = \alpha s + \beta s', \quad r' = \beta s + \alpha s', \quad (3.3)$$

welche das gemischte Glied in (3.2) beseitigt. Hierzu ist zu wechseln und $\alpha = \cos \delta$, $\beta = \sin \delta$ mit $\delta = \frac{\pi}{4} - \frac{\omega}{2}$ zu setzen.

verwendbar, was auf $s^2 + s'^2 = d^2$ mit $d = c/\sin \omega$ führt. Die durch (3.3) eingeführten neuen Veränderlichen s und s' sind, wie man leicht nachprüft, ebenfalls periodische Funktionen von u und genügen den Beziehungen

$$s(u) = s(u + 2\omega), \quad s'(u) = s(u + \omega). \quad (3.4)$$

Betrachtet man neben der *konstanten Quadratsumme* (3.5) noch die *veränderliche Quadratdifferenz*

$$s^2 - s'^2 = d^2 \cdot \Delta(u), \quad (3.7)$$

so gilt mit Rücksicht auf (3.6): $\Delta(u) = -\Delta(u + \omega) = \Delta(u + 2\omega)$. Nach *willkürlicher Vorgabe* einer solchen periodischen Funktion $\Delta(u)$ lassen sich dann aus (3.6) und (3.7) die Hilfsgrößen s und s' berechnen, und man erhält gemäß (3.3) die *Lösung*

$$r = \frac{d}{\sqrt{2}} [\alpha \sqrt{1 + \Delta(u)} + \beta \sqrt{1 - \Delta(u)}]. \quad (3.9)$$

Vor der Diskussion konkreter Beispiele sei noch eine Bemerkung eingeschaltet. Errichtet man in den Endpunkten A_i der Radien $O A_i$ die Normalen p_i (Abb. 3), so entsteht ein veränderliches Vielseit $p_1 p_2 \dots p_n$ mit konstanten Außenwinkeln ω , dessen Ecken P_i auf einem festen Kreis σ mit dem Radius $d = c/\sin \omega$ liegen¹. Demzufolge hat die von den n Geraden p_i simultan eingehüllte Kurve k^* , beschrieben durch die *Stützfunktion* $r(u)$, den Kreis σ zur isoptischen Linie, aus deren Punkten

¹ Die mit (3.3) eingeführten Größen s und s' können mithin als die kartesischen Koordinaten des Punktes P_i in einem begleitenden Achsenkreuz gedeutet werden, dessen Achsen von den Radiusvektoren r und r' um die Winkel $\pm \delta$ abweichen (Abb. 3). Die Gleichung (3.5) drückt daher bloß die Feststellung $OP_i = d$ aus.

sie unter dem konstanten Gesichtswinkel $\pi - \omega$ erscheint. Solche „Kurven mit isoptischem Kreis“ wurden in [7] untersucht; auch ihnen kommt eine getriebetechnische Bedeutung zu, denn sie können als Profil einer Nocke dienen, welche gleichzeitig beide Arme eines geradflankigen Schwinghebels mit der Öffnung $\pi - \omega$ bestätigt [6]. Damit ist ein bemerkenswerter Zusammenhang zwischen zwei verwandten Nockenproblemen hergestellt: k ist die zentrale Fußpunktcurve von k^* . — Zusammenfassend gilt

Satz 1: Ebene Kurven k mit einem beweglichen geschlossenen Sehnenpolygon, dessen Seiten aus einem festen Zentrum O unter konstantem Gesichtswinkel ω erscheinen und die gleiche Länge $c = d \cdot \sin \omega$ besitzen, werden durch die Polargleichung (3.9) erfaßt; hierbei ist π/ω eine rationale Zahl $m > 1$, und $\Delta(u)$ bezeichnet eine willkürliche, der Bedingung $\Delta(u + \omega) = -\Delta(u)$ genügende periodische Funktion des Polarwinkels u . Jede solche Kurve k ist Fußpunktcurve einer Kurve k^* mit isoptischem Kreis vom Radius d .

Eine passende Hilfsfunktion $\Delta(u)$ ist etwa

$$\Delta = \varepsilon \cdot \cos m u \text{ mit } 0 < \varepsilon < 1. \quad (3.10)$$

Die damit zu gewinnenden Lösungskurven k (3.9) sind durchwegs algebraisch. Für die Ordnung N findet man durch Abzählung der Schnittpunkte mit einer Testgeraden $Ax + By = C$ (nach Übergang zum komplexen Parameter $v = \exp(iu/v)$) unter Ausschluß des Sonderfalls $m = 2$ ($\beta = 0$, s. u.) den Wert

$$N = \begin{cases} 4(\mu + 2v) & \text{bei ungeradem } \mu, \\ 2(\mu + 2v) & \text{bei geradem } \mu. \end{cases} \quad (3.11)$$

Allgemeiner könnte anstelle von (3.10) ein beliebiges Polynom

$$\Delta = \sum_j (a_j \cos jmu + b_j \sin jmu) \text{ mit ungeraden } j \quad (3.12)$$

verwendet werden; die zugehörigen Lösungskurven sind ebenfalls algebraisch.

Das einfachste Beispiel aus der Familie (3.10) ergibt sich mit $m = 2$ ($\omega = \pi/2, \delta = 0, \alpha = 1, \beta = 0$). Die Lösungskurve k , in Polarkoordinaten beschrieben durch

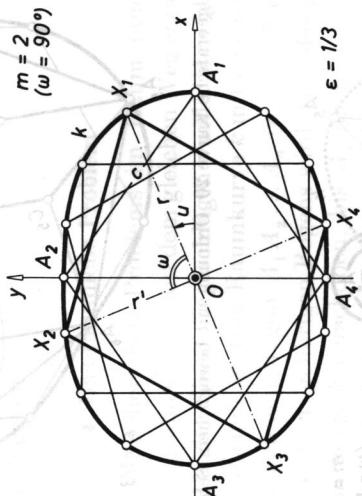
$$r = \frac{d}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \varepsilon \cdot \cos 2u}, \quad (3.13)$$

hat die kartesische Gleichung

$$(x^2 + y^2)^2 = c^2 \left(\frac{1 + \varepsilon}{2} x^2 + \frac{1 - \varepsilon}{2} y^2 \right). \quad (3.14)$$

Es handelt sich mithin bei k um eine bizirkulare Quartik, bekannt als „Boothsche Lemniskate“. Es ist dies die zentrale Fußpunktcurve jener sie in den Scheiteln berührenden Ellipse k^* , die bekanntlich einen orthoptischen Kreis o ($\pi - \omega = \pi/2$) besitzt. Eine um ihr Zentrum O rotierende Ellipse wurde schon von M. Goldberg [3] als Profil einer Nocke vorgeschlagen, die zur Betätigung beider Arme eines rechtwinkligen

noch offen, gesetzlich
natürlich sei



Lösung
Dimension
der in Abbildung
irgendeiner
nen gleiches
nung des zu
domende[n]
gelangt u. $\omega = \pi/2$
eine die Lu
Zwischenstel

gen, geradflankigen Schwinghebels geeignet ist [6]. Daß die Boothsche Lemniskate einen beweglichen Sehnenvhombus besitzt (Abb. 4), scheint bisher unbemerkt geblieben zu sein. Parallelkurven in relativ kleinem Abstand e könnten als Profil einer Nockenscheibe dienen, die einen gestreckten Doppelhebel der Länge c steuert, welcher an seinen Enden mit Rollen vom Radius e versehen ist [10].

Abb. 5 zeigt eine zur Annahme $m = 3$ ($\omega = \pi/3 = 60^\circ$, $\delta = \pi/12 = 15^\circ$) gehörige algebraische Kurve k der Ordnung $N = 20$, die ein bewegliches Sehnensechseck besitzt. Dieses wurde zu einem (in allen Fällen möglichen) mehrgliedrigen Getriebe (vom Freiheitsgrad 2) erweitert, dessen zusätzliche Gelenke C_i die Umkreismittelpunkte der Dreiecke $A_i O A_{i+1}$ sind und daher vom Zentrum O den konstanten Abstand $d/2$ haben (vgl. Abb. 3). Ein davon abgeleiteter Nockentrieb ist in [10, Fig. 5] dargestellt.

Die Annahme $m = 4/3$ ($\omega = 3\pi/4 = 135^\circ$, $\delta = -\pi/8 = -22,5^\circ$)

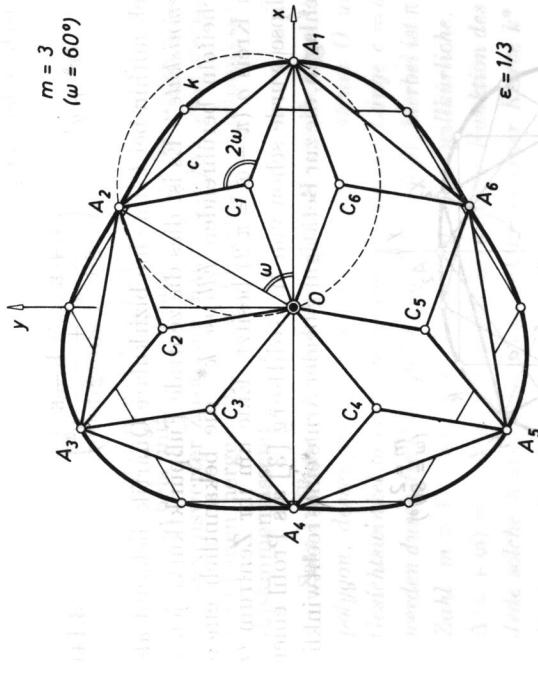
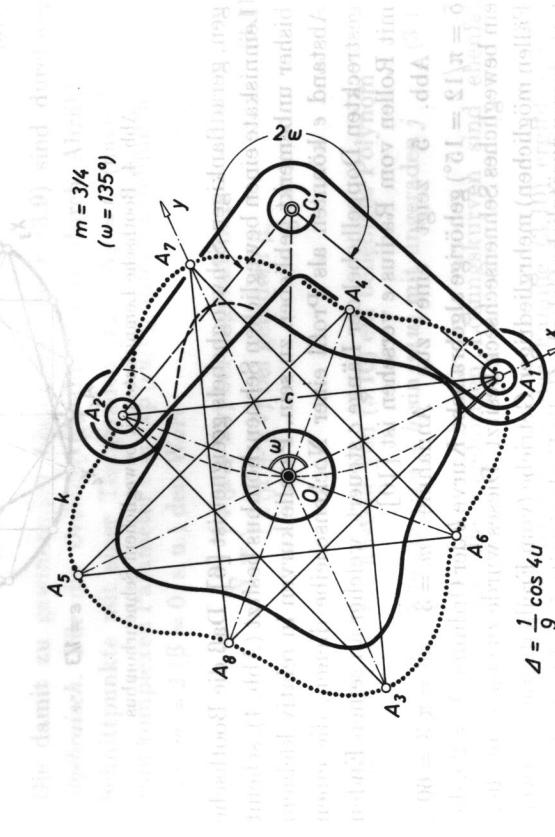


Abb. 5. Algebraische Kurve 20. Ordnung mit beweglichem Sehnensechseck

Abb. 6. Kurve 12. Ordnung mit beweglichem Sehnenachtseck mit doppeltem Rollen-Schwinghebel
Einscheiben-Nockentrieb für einen Überlegungen gilt

führt mit der gemäß (3.12) zulässigen Hilfsfunktion $\Delta = \varepsilon \cdot \cos 4u$ auf eine Kurve k 12. Ordnung, diesmal mit einem beweglichen Sehnenachtseck sternförmiger Gestalt. Der zugehörige Nockentrieb mit rechtwinkligem Schwinghebel ist in Abb. 6 zu sehen.

Die hier dargelegte Lösung (3.9) der Funktionalgleichung (3.2) ist formalmäßig etwas vorteilhafter als die in [9] hergeleitete, die dafür konstruktive Vorteile bietet. Man beachte, daß die Anzahl $n = 2\mu$ der Polygonseiten hier stets gerade ist. Die Frage nach der Existenz von analytisch geschlossenen (insbesonders algebraischen) Kurven mit beweglichen geschlossenen Sehnenpolygonen bei ungerader Seitenzahl ist noch offen; gestückelte Lösungen sind mit der Methode aus Abschnitt 2 natürlich sofort anzugeben.

4. Das räumliche Problem

Lösungen des Fischerschen Problems im Raum (auch höherer Dimension) können grundsätzlich auf dem gleichen Weg erzielt werden, der in Abschnitt 2 in der Ebene eingeschlagen wurde. Man gehe aus von irgend einer geschlossenen, glatten Raumkurve k mit einem geschlossenen gleichseitigen Sehnenpolygon $A_1 A_2 \dots A_n$ ($n > 3$). Nach Entfernung des zur Sehne $A_n A_1$ gehörigen Bogens wird dann das gelenkig zu denkende Polygon längs k verschoben, bis A_1 nach A_2 , A_2 nach A_3 gelangt usf. Das Kniegelenk A_n verläßt dabei die Kurve k und beschreibt eine die Lücke schließende Bahn l . Mit Rücksicht darauf, daß in jeder Zwischenstellung noch über eine Drehung des Stabpaars $A_{n-1} A_n A_1$ um die Achse $A_{n-1} A_1$ willkürlich verfügt werden kann, ist der Bogen l keineswegs eindeutig bestimmt, und so ergibt sich sogar eine größere Lösungsmannigfaltigkeit als in der Ebene. In der aus dem verwendeten Teil von k und dem Abschlußbogen l zusammengesetzten geschlossenen Raumkurve läßt sich jedenfalls das ursprüngliche Sehnenpolygon stetig herumführen.

Zu erwartende Ecken an den Anschlußstellen A_n und A_1 von k und l verschwinden, wenn das Sehnenpolygon in seiner Ausgangsposition infinitesimal beweglich ist. Zur Beurteilung eines solchen Verhaltens mag wieder ein *Geschwindigkeitsplan* dienen. Er besteht aus n in einem festen Ursprung O versammelten Strecken $O A_i$, welche die Bahngeschwindigkeitsvektoren der Punkte A_i repräsentieren; $O A_i$ ist jeweils parallel zur Tangente von k in A_i , und auf Grund kinematischer Überlegungen gilt

$$\dot{A}_i \dot{A}_{i+1} \perp A_i A_{i+1} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1). \quad (4.1)$$

Nach Annahme des den Geschwindigkeitsmaßstab festlegenden Betrags von $O\vec{A}_1$ lassen sich gemäß (4.1) fortschreitend die restlichen Diagrammpunkte $\vec{A}_2, \dots, \vec{A}_n$ bestimmen. Das gewünschte Wackelkriterium verlangt nun, daß die Orthogonalität (4.1) auch für $i = n \pmod n$ besteht.

5 Familien einheitlicher Lösungen

Zu analytisch geschlossenen, insbesondere algebraischen Raumkurven k mit einem beweglichen geschlossenen Sehnenpolygon $A_1 A_2 \dots A_n$ gleicher Seitenlänge c gelangt man etwa durch die einschränkende Forderung, daß sämtliche Seiten aus einer festen Achse z unter gleichem Winkel ϑ gegen $A_i A_{i+1} = 0$ erscheinen sollen; dieser Winkel mag wieder in der Form (3.1) angesetzt werden.

Unter Verwendung räumlicher Polarkoordinaten R, u, v , die mit den kartesischen Koordinaten x, y, z verknüpft sind, sei die gesuchte Raumkurve k durch $R = R(u), v = v(u)$ beschrieben, wobei wieder Periodizität

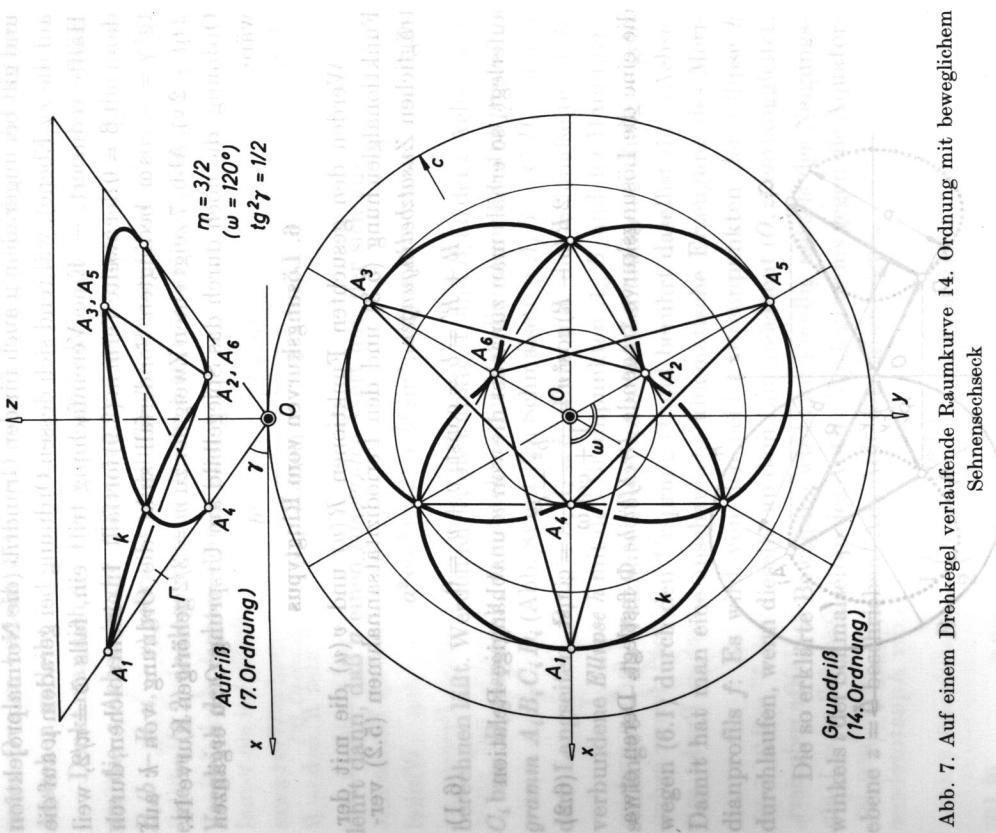
$$x = R \cos u \cos v, \quad y = R \sin u \cos v, \quad z = R \sin v \quad (5.1)$$

$$R(u + 2\omega) = R(u), \quad v(u + 2\omega) = v(u) \quad (5.2)$$

angenommen wird. Die Distanzformel für die Entfernung c zweier Nachtpunkte $A_i(R, u, v)$ und $A_{i+1}(R', u + \omega, v')$ führt dann auf die Relation

Damit hat man aber bloß eine Funktionalgleichung für zwei unbekannte Funktionen $R(u)$ und $v(u)$, so daß noch *Zusatzbedingungen* gestellt werden dürfen — etwa die Vorgabe einer der beiden Funktionen oder

Abb. 7. Auf einem Drehkegel verlaufende Raumkurve 14. Ordnung mit beweglichem



Gleichung (3.2) und kann daher ebenso behandelt werden. Die *Lösung* wird wieder durch die Formel (3.9) dargestellt, nur daß jetzt $d = c/\sin \delta$ und $\delta = (\pi/4) - (\Phi/2)$ zu nehmen ist, während die willkürliche Hilfsfunktion $\Lambda(\alpha)$ noch wie von der Bodenwelle (2.8) "motorisiert"

Die Wahl (3.10) liefert wegen des rational vorausgesetzten Wertes von $\pi/\omega = m = \mu/\gamma$ wiederum *algebraische Lösungen*. Die *Ordnung* beträgt, sofern $\tilde{\omega} \neq \pi/2$ ($\beta \neq 0$)

$$R^2 + R'^2 - 2RR' \cos\phi = c^2 \text{ mit } \cos\omega = \cos\omega \cos\gamma + \sin\gamma \quad (5.5)$$

und gilt bei ungeradem μ auch für den Grundriß (die Normalprojektion auf die xy -Ebene), während sich dessen Ordnung bei geradem μ auf die Hälfte reduziert. — Eine Vereinfachung tritt ein, falls $\tilde{\omega} = \pi/2$, weil dann mit $\beta = 0$ der zweite Term in (3.9) fortfällt. In einem solchen, durch $\operatorname{tg}^2 \gamma = -\cos \omega$ bedingten Sonderfall sinkt die Ordnung von k auf $2(\mu + 2v)$. Abb. 7 zeigt einen Zweig der zu $m = 3/2$ gehörigen Kurve 14. Ordnung, die noch durch das Spiegelbild am Ursprung O zu ergänzen wäre.

6. Lösungskurven vom Ringtypus

Werden den gesuchten Funktionen $R(u)$ und $v(u)$ die mit der Funktionalgleichung (5.3) und den Periodizitätsannahmen (5.2) verträglichen **Zusatzbedingungen**

$$R + R' \equiv h \equiv \text{const.}, v + v' = 0 \quad (6.1)$$

hält man zunächst die von u unabhängige Relation

die eine die Lösungskurve tragende Drehfläche Φ festlegt. Deren etwa

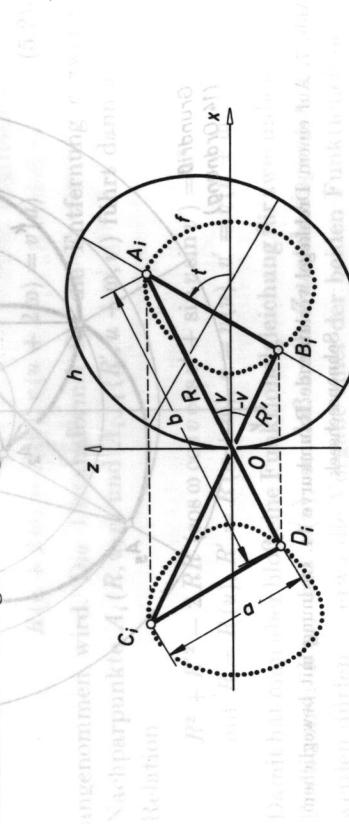


Abb. 8. Kinetische Erzeugung des Ringflächenermittlungsverfahrens auf einer kreisförmigen Fläche.

beschrieben durch (6.2), hat die kartesische Gleichung

Demnach ist f eine doppelt-symmetrische zirkulare *Sextik*, die unter der Annahme $b > c$ aus zwei bezüglich der z -Achse spiegelbildlich angeordneten Teilen besteht.

Aussehen verleiht.

Denkt man sich den Punkt $A_{t+1}(b - R, u + \omega, -v)$ durch Drehung um die z -Achse in die Meridianebene des Punktes $A_i(R, u, v)$ nach $B_i(b - R, u, -v)$ gebracht, so gilt für den Abstand a zwischen A_i und B_i eine zu (6.2) analoge Formel, in der a statt c und 0 statt ω steht. Der

$$\text{length of } \overline{WZ} = \frac{b^2 - c^2}{1 + \cos \omega}, \quad \text{and length of } \overline{VW} = \frac{b^2 - a^2}{1 + \cos \omega}. \quad (6.4)$$

lehrt dann, daß a einen konstanten Wert hat, der sich aus

$$a^2 \cos^2(\omega/2) + b^2 \sin^2(\omega/2) = c^2 \quad (6.5)$$

berechnen läßt. Werden ferner die Punkte A_i und B_i an der z -Achse nach C_i bzw. D_i gespiegelt, so entsteht in der Meridianebene ein *Antiparallelogramm* $A_i B_i C_i D_i$ (Abb. 8) mit den Schmalseiten $A_i B_i = C_i D_i = a$ und den Langseiten $B_i C_i = D_i A_i = b$. Eine mit der Schmalseite $A_i B_i$ verbundene *Ellipse* h mit den Brennpunkten A_i, B_i und der Hauptachsenlänge b — als Wälzkurve bei elliptischen Zahnrädern gefäufig — geht wegen (6.1) durch den Ursprung O und berührt daselbst die z -Achse. Damit hat man eine anschauliche kinematische Erzeugung des Meridiaprofils f : Es wird von den beiden Brennpunkten der Ellipse h

Die so erklärte Bewegung wird zweckmäßig mittels des Neigungswinkels t der Schmalseiten des Antiparallelogramms gegen die Äquatorebene $z = 0$ beschrieben. Aus Abb. 8 ist abzulesen:

$$R = \frac{1}{2} \left(b + a \frac{\cos t}{\cos v} \right), \quad b \sin v = a \sin t. \quad (6.6)$$

Die noch fehlende *Koppelung* zwischen den Drehwinkeln t und u , die sicherstellt, daß A_i nach A_{i+1} gelangt, daß also etwa die Vermehrung von t um π einen Zuwachs von u um ω bedingt, mag am einfachsten

(6.7) $t = mu$ mit $m = \pi/\omega$ vorgenommen werden². Damit wird für die gesuchte Lösungskurve k die

² Brauchbar wären auch die Festsetzungen $t = jmu$ mit ungeradem j , oder $t = mu/(1 - 2m)$.

nachstehende Parameterdarstellung in räumlichen Polarkoordinaten gewonnen:

$$R = \frac{1}{2} \left(b + a \frac{\cos mu}{\cos v} \right), \quad \sin v = \frac{a}{b} \sin mu. \quad (6.8)$$

Unter der getroffenen Voraussetzung eines rationalen „Moduls“ $m = \pi/\omega = \mu/v > 1$ sind diese Kurven k durchwegs *algebraisch* (jedoch nicht rational). Sie umwinden μ -mal die Ringfläche Φ , wobei sie v -mal die z -Achse umkreisen, bevor sie sich schließen. Dazu zu jedem u -Wert zwei supplementäre Werte v und $\pi - v$ gehören und von R und $R' = b - R$ begleitet werden, bestehen das vollständige algebraische Gebilde k aus zwei kongruenten Zweigen, die durch Spiegelung an der xy -Ebene mit nachfolgender Drehung um die z -Achse durch den Winkel $\pi - \omega$ ($\text{mod } 2\omega$) mit einander vertauscht werden. Ohne Beweis sei angeführt, daß die durch Abzählung der Schnittpunkte mit einer Testebene zu ermittelnde *Ordnung* von k den Wert

$$N = 2(3\mu + v) \quad (6.9)$$

hat; k besitzt im Ursprung O einen isolierten $2(\mu - v)$ -fachen und im Fernpunkt Z der z -Achse einen isolierten 4μ -fachen Punkt, ferner in den absoluten Kreispunkten der xy -Ebene je einen μ -fachen Punkt mit durch Z gehender Tangente.

Der Grundriß k' von k hat in der Regel die Ordnung $N = 2(\mu + v)$, die sich jedoch infolge doppelter Überdeckung auf die Hälfte reduziert, falls μ und v ungerade sind. Demnach wäre im Grenzfall $m = 1$ ein kreisförmiger Grundriß zu erwarten, was unschwer zu bestätigen ist. Zwischen den Polarkoordinaten $r = R \cos v$ und u in der Äquatorebene besteht nämlich zufolge (6.8) die Beziehung

$$r = \frac{1}{2} (a \cos u + b \cos v) \text{ mit } a \sin u = b \sin v, \quad (6.10)$$

und die Elimination von v führt auf

$$r^2 - ar \cos u = \frac{1}{4} (b^2 - a^2) \text{ oder } \left(x - \frac{a}{2} \right)^2 + y^2 = \frac{b^2}{4}, \quad (6.11)$$

also auf einen Kreis k'_1 mit dem Radius $b/2$ und dem Zentralabstand $a/2$. Die Raumkurve k_1 selbst ist von 8. Ordnung; sie besteht aus zwei kongruenten, spiegelbildlich zur xy -Ebene angeordneten (fast ebenen und daher nahezu ellipsenförmigen) Zweigen. Jeder derselben ist wegen $\omega = \pi$ eine räumliche „Speichenkurve“ (Autokonchoide), d. h. er weist

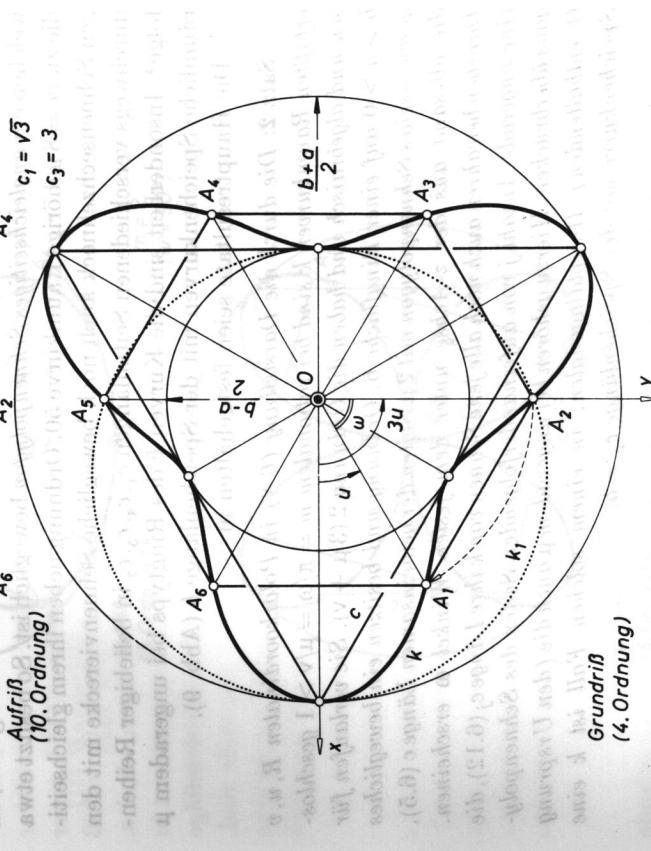
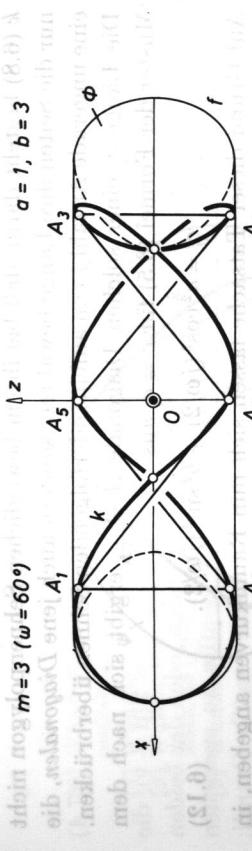


Abb. 9. Räumliche Speichenkurve 20. Ordnung mit beweglichem Sehnensechseck
Abbildung 8.1.1. Räumliche Speichenkurve 20. Ordnung mit beweglichem Sehnensechseck

eine stetige Schar von durch das Nabenzentrum O gehenden Sehnen gleicher Länge $c = b$ auf [11]. Der Kreis k'_1 ist insoferne von Interesse, als sich aus ihm die Grundrisse aller übrigen Lösungskurven k durch $(1/m)$ -fache *Winkelstauchung* konstruktiv einfach ableiten lassen (Abb. 9)³.

Eine merkwürdige Besonderheit der hier behandelten Raumkurven

³ Eine gleichartige Beziehung besteht nach K. Strubecker [5] auch zwischen den Villareauschen Loxodromenkreisen des Ringtorus und dessen übrigen Loxodromen. Deren Grundrisse sind durch Winkelzerrung einer Ellipse um einen Brennpunkt zu gewinnen.

k (6.8) besteht darin, daß bei ihrem beweglichen Sehnepolygon nicht nur die Seiten ihre Länge bewahren, sondern auch jene *Diagonalen*, die eine ungerade Anzahl j von aufeinanderfolgenden Sehnen überbrücken. Die Länge c_j einer solchen Diagonale $A_i A_{i+j}$ ergibt sich nach dem Muster der Formel (6.5) für $c = c_i$ aus

$$c_j^2 = a^2 \cos^2(j\omega/2) + b^2 \sin^2(j\omega/2). \quad (6.12)$$

Auf Grund dieser Tatsache lassen sich nun Raumkurven angeben, in welchen ein *ungleichseitiges Sehnepolygon* beweglich ist. So besitzt etwa die zu $m = 8$ gehörige Raumkurve 50. Ordnung neben ihrem gleichseitigen Sehnenzehnneck auch noch bewegliche Sehnenvierecke mit den durchwegs verschiedenen Seitenlängen c_1, c_3, c_5, c_7 in beliebiger Reihenfolge*. Insbesondere sind die Kurven k des Ringtyps bei ungeradem μ räumliche Speichenkurven mit der Speichenlänge b (Abb. 9).

Die Hauptresultate seien festgehalten in

Satz 2: Die durch die Darstellung (6.8) in Polarkoordinaten R, u, v erfaßten Raumkurven k sind bei rationalem $m = \mu/\omega = \mu/\sqrt{\omega} > 1$ geschlossen und algebraisch und haben die Ordnung $2(3\mu + v)$. Sie verlaufen für $b > a > 0$ auf einer Ringfläche 6. Ordnung und besitzen ein bewegliches geschlossenes Sehnepolygon mit 2μ Seiten der gemeinsamen Länge c (6.5), die allesamt aus der z -Achse unter dem festen Winkel ω erscheinen. Daneben bewahren auch noch alle jene Sehnen von k ihre Länge c_j (6.12), die eine ungerade Anzahl j von aufeinanderfolgenden Seiten des Sehnepolygons überbrücken. Hierzu gehören bei ungeradem μ auch die (den Ursprung O enthaltenden) Hauptdiagonalen; in einem solchen Fall ist k eine Speichenkurve mit der Speichenlänge $c_\mu = b$.

7. Lösungskurven auf Drehellipsoiden

In Zylinderkoordinaten r, u, z — erklärt durch $x = r \cos u$, $y = r \sin u$ — lautet die entscheidende Schlüsselgleichung:

$$r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \omega u + (z - z')^2 = c^2 \quad \text{mit } r = r(u), r' = r(u + \omega), z = z(u), z' = z(u + \omega). \quad (7.1)$$

Nach Einführung der mit den Periodizitätsannahmen $r(u) = r(u + 2\omega)$, $z(u) = z(u + 2\omega)$ verträglichen **Zusatzbedingungen**

$$r + r' = 0, \quad z + z' = 0 \quad (7.2)$$

* Das Phänomen der konstanten Diagonalenlänge liegt auch einer merkwürdigen Familie von beweglichen Stabwerken zu Grunde, die sich ergeben, wenn bei einem geraden Prisma mit regulärem Basispolygon sämtliche Basisecken mit allen Ecken der Deckfläche durch Stäbe gelenkig verbunden werden [8].

[5] Strubecker, K.: Zur Raumkurve 50. Ordnung und ihrer Verallgemeinerung auf \mathbb{Q} . $(\mathcal{E}, \mathbb{F})$, 275–290.

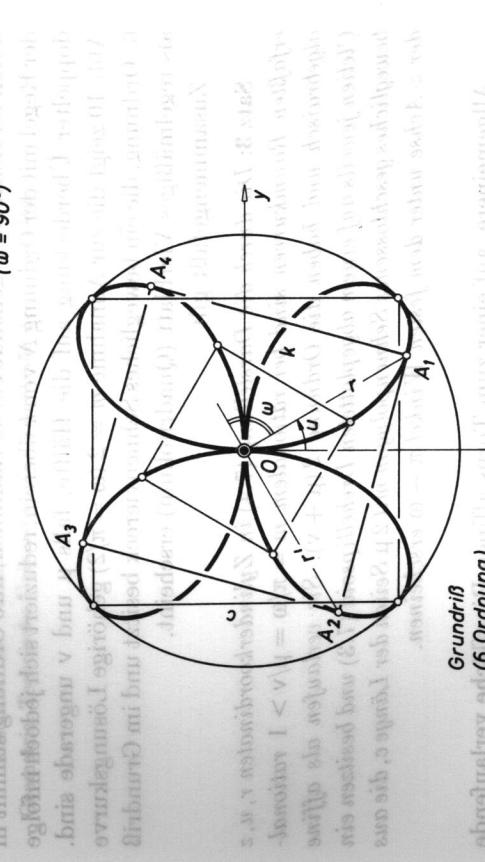
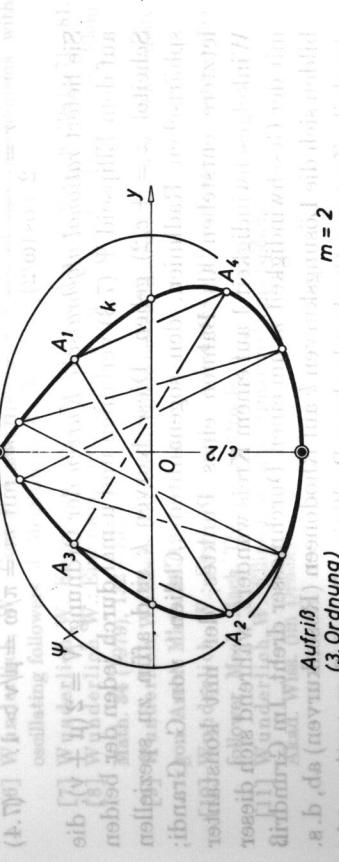


Abb. 10. Auf einem Drehellipsoid verlaufende Raumkurve 6. Ordnung mit beweglichem Sehnenviereck

Grundriss

6. Ordnung

erhält man mit

$$r^2 \cos^2(\omega/2) + z^2 = c^2 \quad (7.3)$$

die Gleichung eines die Lösungskurve k tragenden abgeplatteten **Drehellipsoids** Ψ . Die numerische Exzentrizität der Meridianellipse hat den Betrag $\varepsilon = \sin(\omega/2)$.

Im Prinzip könnte nun für $r(u)$ oder $z(u)$ eine beliebige periodische Funktion gewählt werden, die der Bedingung $r(u + \omega) = -r(u)$ bzw. $z(u + \omega) = -z(u)$ genügt; die andere Funktion ergibt sich dann aus

(7.3). Die einfachste Annahme besteht wohl in

$$r = \frac{c}{2} \cdot \frac{\cos mu}{\cos(\omega/2)}, \quad z = \frac{c}{2} \sin mu \text{ mit } m = \pi/\omega = \mu/\nu > 1. \quad (7.4)$$

Sie liefert *rational-algebraische Kurven* der Ordnung $N = 2(\mu + \nu)$, die auf dem Ellipsoid Ψ (7.3) verlaufen und μ -mal durch jeden der beiden Scheitel ($z = \pm c/2$) gehen. Diese Kurven k sind affin zu speziellen sphärischen Radlinien, den sogenannten „Clelien“ von G. Grandi; letztere entstehen als Bahnen eines Punktes, der mit konstanter Winkelgeschwindigkeit 1 auf einem Kreis wandert, während sich dieser mit der Geschwindigkeit m um einen Durchmesser dreht. Im Grundriß bilden sich die Lösungskurven k auf Rhodoneen (Rosenkurven) ab, d. s. durch ihr Zentrum O gehende ebene Radlinien; ihre Ordnung stimmt in der Regel mit der Ordnung N von k überein, reduziert sich jedoch infolge doppelter Überdeckung auf die Hälfte, falls μ und ν ungerade sind. Abb. 10 zeigt die zur Annahme $m = 2(\omega = \pi/2)$ gehörige Lösungskurve 6. Ordnung, die ein bewegliches Sehnenviereck besitzt und im Grundriß als regelmäßiges Vierblatt (Quadrifolium) erscheint.

Zusammengefaßt gilt

Satz 3: *Die durch die Darstellung (7.4) in Zylinderkoordinaten r, u, z erfaßten Raumkurven sind bei rationalem $m = \pi/\omega = \mu/\nu > 1$ rational-algebraisch und haben die Ordnung $2(\mu + \nu)$. Sie verlaufen als affine Clelien jeweils auf einem abgeplatteten Drehellipsoid (7.3) und besitzen ein bewegliches geschlossenes Sehnennpolygon mit 2μ Seiten der Länge c , die aus der z -Achse unter dem festen Winkel $\pi - \omega$ erscheinen.*

Allgemeinere, auf einer zum Torus affinen Ringfläche verlaufende Raumkurven mit einem beweglichen Sehnennpolygon könnte man erhalten, wenn die Zusatzbedingung (7.2) durch $r + r' = b > c$ mit konstantem b ersetzt würde.

Literatur

- [1] Fischer, H. J.: Kurven, in denen ein Dreieck so herumbewegt werden kann, daß seine Ecken die Kurve durchlaufen. Deutsche Math. **1** (1936), 485–498.
- [2] Fischer, H. J.: Kurven, in denen ein Zug von Sehnen gleicher Länge sich unabhängig vom Ausgangspunkt schließt. Deutsche Math. **4** (1939), 228–237.
- [3] Goldberg, M.: Rotors in polygons and polyhedra. Math. Comput. **14** (1960), 229–239.
- [4] Hadwiger, H.: Ungelöste Probleme; Nachtrag zu Nr. 21. Elem. Math. **13** (1958), 59–60.