

Kubische Zwangläufe

Von

w. M. Walter Wunderlich, Wien

(Mit 5 Abbildungen)

(Vorgelegt in der Sitzung der math.-nat. Klasse am 15. März 1984)

I. Ebene kubische Zwangläufe

§1. Unter der Annahme euklidischer Metrik sollen zunächst die *ebenen kubischen Zwangläufe* bestimmt werden, also die einparametrischen Bewegungsvorgänge σ/σ' einer starren „Ganzebene“ σ längs einer fest gedachten „Rastebene“ σ' , wobei alle Punkte $C \in \sigma$ algebraische *Bahnkurven 3. Ordnung* $k' \subset \sigma'$ durchlaufen. Krumme Schiebungen mit translationskongruenten Bahnkurven bleiben dabei als trivial grundsätzlich außer Betracht. Mit Verwendung des Drehwinkels φ kann dann ein ebener *Zwanglauf* in kartesischen Koordinaten beschrieben werden durch

$$\begin{aligned}x' &= x \cos \varphi - y \sin \varphi + X'(\varphi), \\y' &= x \sin \varphi + y \cos \varphi + Y'(\varphi).\end{aligned}\quad (1.1)$$

Mit $x, y = \text{const}$ gibt (1.1) eine Parameterdarstellung der Bahn k' des Punktes $C(x, y)$ an.

Bei einem *kubischen Zwanglauf* σ/σ' kommt ein beliebiger Punkt $C \in \sigma$ mit einer beliebigen Geraden $g' \subset \sigma'$ — von vereinzelten Ausnahmen abgesehen — genau dreimal zur Inzidenz, nämlich an den Schnittpunkten der Bahnkurve 3. Ordnung k' von C mit der Testgeraden g' . Dies bedeutet, daß bei der *Umkehrbewegung* σ'/σ , dargestellt durch

$$\begin{aligned}x &= x' \cos \varphi + y' \sin \varphi + X(\varphi), \\y &= -x' \sin \varphi + y' \cos \varphi + Y(\varphi) \\ \text{mit } X &= -X' \cos \varphi - Y' \sin \varphi, \\Y &= X' \sin \varphi - Y' \cos \varphi,\end{aligned}\quad (1.2)$$

die *Geraden-Hüllbahnen Kurven 3. Klasse* sind. Eine solche „Dualität“ herrscht bei allen algebraischen Zwangsläufen, was etwa G. Darboux in [2, S. 352] vermerkt hat.

Die Geraden eines Parallelenbüschels aus σ' hüllen in σ eine Schar von *Parallelkurven* ein, die als Schichtenplan einer gewissen *Böschungstorse* Θ aufgefaßt werden kann, deren Klasse mit jener der Geraden-Hüllbahnen übereinstimmt. Die aus einem beliebigen Raumpunkt S an Θ legbaren Tangentialebenen müssen nämlich die Tangenten enthalten, die aus S an die in der Höhe von S verlaufende Schichtenlinie von Θ gehen. Im gegenständlichen Fall ist diese Klasse also 3.

§ 2. Von den *Böschungstorsen 3. Klasse* weiß man nun, daß sie aus den Tangenten einer kubischen Parabel bestehen, die sich im Grundriß (Normalriß auf die Grundebene σ) auf eine sogenannte *Ts chirnhausen-Kubik* abbildet [11]. Letztere ist als negative Fußpunktkurve einer gewöhnlichen Parabel bezüglich deren Brennpunkts wohlbekannt; ihre Tangentenschar ist daher in einem passenden Koordinatensystem erfaßbar durch

$$x \cos \psi + y \sin \psi = \frac{c}{1 + \cos \psi} = \frac{c}{2 \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\psi}{2} \right)}. \quad (2.1)$$

Alle Ts chirnhausen-Kubiken sind untereinander ähnlich. Die in Rede stehenden Geraden-Hüllbahnen der Bewegung σ'/σ sind nach allem *Evo lument von Ts chirnhausen-Kubiken*; ihre Tangentenscharen werden (in dem jeweils angepaßten Koordinatensystem) beschrieben durch Gleichungen der Form

$$x \sin \psi - y \cos \psi = c \cdot \operatorname{tg} \frac{\psi}{2} + d, \quad (2.2)$$

die sich durch Integration von (2.1) ergeben.

Nähere Untersuchung dieser Kurven (2.2) lehrt unter Einführung des algebraisierenden Parameters $t = \operatorname{tg}(\psi/2)$, daß es sich um *rationale monozirkulare Kurven 4. Ordnung* handelt, welche die Fengerade ($\psi = \pi$) berühren und eine reelle sowie zwei imaginäre Spitzen aufweisen; dieselben röhren von den Schnittpunkten der Schichtenebene mit der Gratkubik der Böschungstorse Θ her. Um einen Namen zu haben, seien diese (zur Kardioide kollinearen) Kurven kurzerhand als „*Ts chirnhausen-Quartiken*“ bezeichnet. Die zu $d = 0$ gehörigen Exemplare sind durch axiale Symmetrie ausgezeichnet (h in Abb. 1 und 2). Vorläufig hat man also

$$X' = -a_1 \cos \varphi + b_1 \sin \varphi + c_1 \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}. \quad (3.5)$$

Satz 1: Die nichttranslatorischen kubischen Zwangsläufe σ/σ' in der Ebene sind dadurch gekennzeichnet, daß die Geraden-Hüllbahnen der Umkehrbewegung σ'/σ *Ts chirnhausen-Quartiken* sind, nämlich die Evolutionen von ∞^1 *Ts chirnhausen-Kubiken*.

§ 3. Nach kongruenter Verlagerung der Ts chirnhausen-Quartik (2.2) erhält ihre Tangentengleichung die allgemeinere Form

$$x \sin \psi - y \cos \psi = a \sin \psi - b \cos \psi + c \cdot \operatorname{tg} \frac{\psi - a}{2} + d. \quad (3.1)$$

Wird eine gangfeste Gerade $g' \subset \sigma'$ angesetzt mit $x' \cos \varepsilon + y' \sin \varepsilon = e$, dann wird die von ihr bei der Bewegung σ'/σ erzeugte Hüllbahn $h \subset \sigma$ zufolge (1.1) erfaßt durch

$$x \cos(\varphi - \varepsilon) - y \sin(\varphi - \varepsilon) = e - X' \cos \varepsilon - Y' \sin \varepsilon. \quad (3.3)$$

Gibt man nun für zwei nichtparallele Geraden g'_1 und g'_2 die Hüllbahnen h_1 bzw. h_2 vor, wobei man sich auf symmetrische Ts chirnhausen-Quartiken $d = 0$ beschränken darf, so ist dadurch ein ebener Zwangslauf σ'/σ festgelegt. Unter der zulässigen Annahme, daß beide Geraden gleichzeitig ins Unendliche rücken und daß diese Fernlage etwa für $\varphi = \pi$ eintritt, kann man durch Vergleich der entsprechenden Darstellungen (3.1) und (3.3) die noch fehlenden Funktionen $X'(\varphi)$ und $Y'(\varphi)$ ermitteln. Es wird dann nur noch zu überprüfen sein, ob bei der so gefundenen Bewegung auch alle übrigen Geraden-Hüllbahnen Ts chirnhausen-Quartiken (oder Grenzformen davon) sind.

Wir wählen als erste Leitgerade g'_1 die y' -Achse ($e = \varepsilon = 0$). Die Äquivalenz der beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} x \sin \psi - y \cos \psi &= a_1 \sin \psi - b_1 \cos \psi + c_1 \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\psi - a_1), \\ x \cos \varphi - y \sin \varphi &= -X', \end{aligned} \quad (3.4)$$

ist unter den getroffenen Vereinbarungen gewährleistet, wenn $\psi = (\pi/2) - \varphi$ und $a_1 = \pi/2$; sie liefert

Die zweite Leitgerade g'_2 sei die x' -Achse ($e = 0$, $\varepsilon = \pi/2$). Die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} x \sin \psi - y \cos \psi &= a_2 \sin \psi - b_2 \sin \psi + c_2 \operatorname{tg} \frac{\psi}{2} (\psi - a_2), \\ x \sin \varphi + y \cos \varphi &= -Y' \end{aligned} \quad (3.6)$$

sind gleichwertig, wenn $\psi = \pi - \varphi$ und $a_2 = \pi$; dies führt auf

$$Y' = -a_2 \sin \varphi - b_2 \cos \varphi + c_2 \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}. \quad (3.7)$$

Durch Eintragen der angegebenen Funktionen $X'(\varphi)$ und $Y'(\varphi)$ in die Darstellung (3.3) oder in sonst eine Linearkombination der Gleichungen (1.1) überzeugt man sich unschwer, daß auch alle übrigen Geraden $g' \subset \sigma'$ im allgemeinen ebenfalls Tschirnhäusen-Quartiken in σ einhüllten. Eine Ausnahme bilden lediglich die Geraden $c_2 x' - c_1 y' = \text{const.}$, weil sich dabei die Tangens-Glieder aufheben, was zur Folge hat, daß die Hüllbahnen solcher Geraden (konzentrische) Kreise sind. Insbesondere reduziert sich der Hülbkreis des Ursprungsstrahls $c_2 x' - c_1 y' = 0$ sogar auf einen Punkt $O \in \sigma$. Identifiziert man diese ausgezeichnete Gerade mit der x' -Achse g'_2 , so bedingt dies $c_2 = 0$. Wählt man überdies den Stützpunkt O zum Ursprung des Achsenkreuzes in σ , so ist auch $a_2 = b_2 = 0$. Damit hat man (bei Unterdrückung des jetzt entbehrlichen Indexes 1) den grundlegenden

zur Bahnkurvenordnung gehörenden, aber entbehrlichen Parameter ψ und φ aus.

Satz 2: Die kubischen, nichttranslatorischen Zwangsläufe σ/σ' in der Ebene sind bei geeigneter Wahl der Koordinatensysteme in σ und σ' stets darstellbar in der Form

$$\begin{aligned} x' &= (x - a) \cos \varphi - (y - b) \sin \varphi + c \cdot \operatorname{tg}(\varphi/2), \\ y' &= x \sin \varphi + y \cos \varphi, \quad c \neq 0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Der Punkt O ($x = y = 0$) wandert entlang der x' -Achse, während alle übrigen Punkte aus σ rationale Kubiken in σ' durchlaufen, die dem Fernpunkt der x' -Achse zustreben (Asymptote $y' = -y$).

§4. Zur Bestätigung der Bahnkurvenordnung gehe man — wieder unter Einführung des rationalisierten Parameters $t = \operatorname{tg}(\varphi/2)$ — zu homogenen Koordinaten $x_0 : x_1 : x_2 = 1 : x : y$ bzw. $x'_0 : x'_1 : x'_2 = 1 : x' : y'$ über. Die Bahn k eines gangfesten Punktes C ($x_0 : x_1 : x_2$) mit konstanten

x_i wird dann zufolge (3.8) beschrieben durch

$$\begin{aligned} x'_0 &= (1 + t^2)x_0, \\ x'_1 &= [a(t^2 - 1) + 2bt + ct(1 + t^2)]x_0 + (1 - t^2)x_1, \\ x'_2 &= 2tx_1 + (1 - t^2)x_2. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Die Kurve k' ist also für $c \neq 0$ tatsächlich eine rationale Kubik. Sie ist im allgemeinen nicht zirkular, sondern nur im Sonderfall $a = b = 0$ (§ 6).

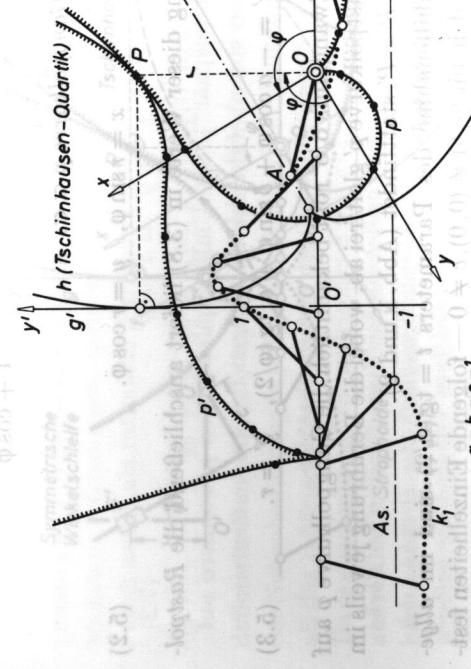


Abb. 1. Ebener kubischer Zwangslauf
Die Kurve k' besitzt im Fernpunkt der y' -Achse einen isolierten Doppelpunkt (mit den Asymptoten $x' = \pm ic$) und kann konstruktiv als Normalriffel eines aufrechten kubischen Kreises (§ 22) auf eine achsenparallele Ebene gewonnen werden. Sie mag dem Zeichner neben der vom Ursprung O durchlaufenden x' -Achse als zweite Leitkurve der Bewegung σ/σ' dienen (Abb. 1).

Diese Kurve besitzt im Fernpunkt der y' -Achse einen isolierten Doppelpunkt (mit den Asymptoten $x' = \pm ic$) und kann konstruktiv als Normalriffel eines aufrechten kubischen Kreises (§ 22) auf eine achsenparallele Ebene gewonnen werden. Sie mag dem Zeichner neben der vom Ursprung O durchlaufenden x' -Achse als zweite Leitkurve der Bewegung σ/σ' dienen (Abb. 1).

§ 5. Zwecks Ermittlung des den Kinematiker interessierenden *Polkurvenpaars* der Bewegung σ/σ' (3.8) sind die Momentanpole aufzusuchen, das sind die momentan in Ruhe befindlichen Punkte $P \in \sigma$ sowie deren jeweilige Positionen $P' \in \sigma'$. Durch Nullsetzen der Geschwindigkeitskomponenten $\dot{x}' = dx'/d\varphi$ und $\dot{y}' = dy'/d\varphi$ gelangt man über die Bedingungen

$$\begin{aligned} x \sin \varphi + y \cos \varphi &= r, \quad x \cos \varphi - y \sin \varphi = 0 \\ \text{mit } r &= a \sin \varphi + b \cos \varphi + \frac{c}{1 + \cos \varphi} \end{aligned} \quad (5.1)$$

zunächst zur *Gangpolkurve* $p \subset \sigma$:

$$x = r \sin \varphi, \quad y = r \cos \varphi. \quad (5.2)$$

Die Eintragung dieser Werte in (3.8) liefert anschließend die *Rastpolkurve* $p' \subset \sigma'$:

$$x' = -a \cos \varphi + b \sin \varphi + c \cdot \operatorname{tg}(\varphi/2), \quad y' = r. \quad (5.3)$$

Im Zuge des Zwangslaufs σ/σ' rollt bekanntlich die Gangpolkurve p auf der (festen) Rastpolkurve p' gleitfrei ab, wobei die Berührungsstelle im Momentanpol $P = P'$ stattfindet (Abb. 1 und 2).

Unter Zuahiffnahme des Parameters $t = \operatorname{tg}(\varphi/2)$ sind im *allgemeinen Fall* — d. h. für $(a, b) \neq (0, 0)$, $c \neq 0$ — folgende Einzelheiten festzustellen: Die Gangpolkurve p (5.2), die auf Grund ihrer Polargleichung $r = r(\varphi)$ mit r aus (5.1) als Fokalkissoiden einer Parabel und eines durch deren Brennpunkt O gehenden Kreises konstruierbar wäre, ist eine rationale bizirkulare Sextik mit einem vierfachen Punkt in O , welche die Ferngerade im Fernpunkt der y -Achse berührt und in den absoluten Kreispunkten Schnabelspitzen aufweist. Die Rastpolkurve p' (5.3) hingegen ist eine rationale monozirkulare Quartik, welche die Ferngerade im Fernpunkt der y' -Achse berührt (Abb. 1). Der verdeckte Teil der Kurve ist durch einen gestrichelten Kreis angedeutet.

§ 6. Hervorzuheben ist der wichtige *Sonderfall* $a = b = 0$ ($c \neq 0$). Hier reduziert sich die Gangpolkurve p (5.2) gemäß ihrer Polargleichung $r(1 + \cos \varphi) = c$ auf eine zur y -Achse symmetrische *Parabel* mit dem Brennpunkt O . Die Rastpolkurve p' (5.3) ist darstellbar durch $x' = ct$, $2y' = c(1 + t^2)$ und erweist sich damit als eine zur y' -Achse symmetrische und zu p kongruente Parabel, die ihren Brennpunkt in $F'(0, c)$ hat. Da p und p' einander in der Nullstellung $t = 0$ im gemeinsamen

Scheitel berühren, liegen sie auch zu jedem anderen Zeitpunkt spiegelbildlich bezüglich der Wälztangente. Dieser spezielle Zwanglauf σ/σ' ist mithin die wohlbekannte „symmetrische Parabelrollung“ (Abb. 2). Die Bahnkuriken, erhältlich als Fußpunktkurven von Parabeln, enthalten mit $t = \pm i$ in (4.1) die absoluten Kreispunkte; sie sind daher — im Gegensatz zum allgemeinen Fall (§ 4) — *zirkular*¹. Unter ihnen findet man mancherlei Kurven mit eigenen Namen, so die *Kissode* des Diokles und die *Strophoïden*.

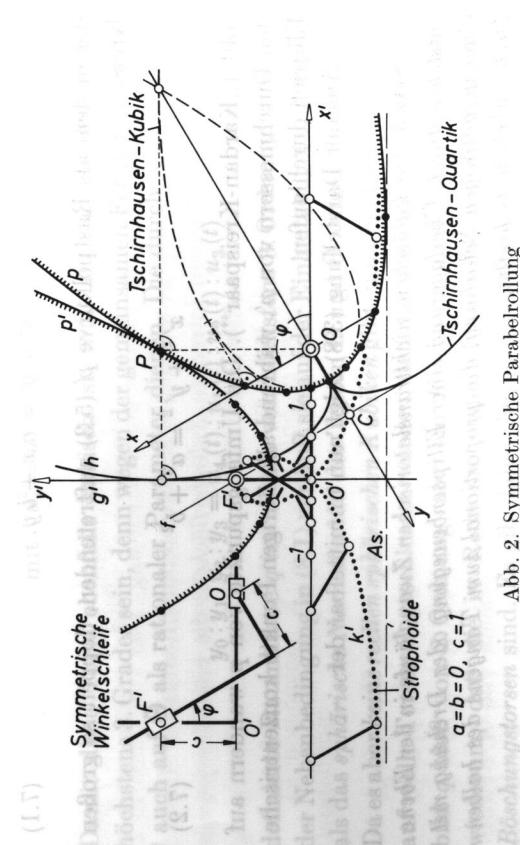


Abb. 2. Symmetrische Parabelrollung

Satz 4: Im Fall $a = b = 0, c = 1$ ist der Zwangslauf σ/σ' eine rationale bizirkulare Quintik, welche die Ferngerade $y = c$ berührt und in den absoluten Kreispunkten $(\pm 1, 0)$ aufweist. Der verdeckte Teil der Kurve ist durch einen gestrichelten Kreis angedeutet.

Der vorliegende Zwangslauf σ/σ' ist vor allem dadurch ausgezeichnet, daß die *Umkehrbewegung* σ/σ von *gleicher Art* ist, während man sonst als Punktbahnen von σ'/σ anstelle von Kubiken über (1.2) rationale bizirkulare *Quintiken* (mit absoluten Spitzen) findet. Ebenso wie der Brennpunkt O der Parabel p beim Zwangslauf σ/σ' auf der Leitlinie $y' = 0$ der Parabel p' wandert, läuft bei der Umkehrbewegung σ/σ der Brennpunkt F' von p' auf der Leitlinie $y = c$ von p . Dieser Umstand ermöglicht die getriebetechnische Realisierung der symmetrischen Parabelrollung mittels einer sogenannten *symmetrischen Winkelschleife* (Nebenfigur in Abb. 2). Die Improvisation eines solchen

¹ Damit ist auf relativ kurzen Wege die von A. Grünwald [3] behandelte Frage nach den ebenen Zwangsläufen mit durchwegs zirkulären Bahnkurven 3. Ordnung beantwortet.

Gerätes durch ein Blatt Transparentpapier gestattet nicht nur ein bequemes Zeichnen der zirkulären Bahnkubiken, sondern auch der seit § 2 auftretenden Tschirnhausen-Quartiken (als Geraden-Hüllbahnen).

§ 7. Von Bedeutung ist auch der *Grenzfall* $c = 0$, bei welchem es sich um einen *quadratischen Zwanglauf* handelt. Für $a = b = 0$ liegt bloß die Drehung um das Zentrum $O = O'$ vor, ansonsten aber die wohlbekannte *Ellipsenbewegung*. Hier ist die Gangpolkurve p (5.2) ein Kreis

$$x^2 + y^2 = ax + by, \quad (7.1)$$

der in dem als Rastpolkurve p' (5.3) auftretenden, doppelt so großen Kreis

$$x'^2 + y'^2 = a^2 + b^2 \quad (7.2)$$

rollt („Kardan-Kreispaar“). Die Umfangspunkte von p wandern auf den Durchmessern von p' , während alle übrigen Punkte konzentrische Ellipsen durchlaufen.

Aus der Darstellung (3.8) folgt nun unmittelbar der

Satz 3: *Die kubischen, nichttranslatorischen Zwangläufe in der Ebene entstehen durch Überlagerung einer Ellipsenbewegung oder Drehung mit einer geradlinigen Schiebung, die proportional zum Tangens des halben Drehwinkels fortschreitet.*

II. Räumliche kubische Zwangläufe

§ 8. Über kubische Zwangläufe im dreidimensionalen euklidischen Raum, also einparametrische Bewegungsvorgänge Σ/Σ' , bei welchen die Punkte C des starren Gangsystems Σ im festen Rastsystem $\Sigma' Bahnkurven k'$ 3. Ordnung durchlaufen, weiß man nicht allzuviel. Ihre Existenz wird zwar in einer Note von G. Darboux [2, S. 360] sichergestellt, wo die Eulerschen Drehparameter als lineare Funktionen der Zeit t und die Translationskomponenten als kubische Polynome in t angenommen werden — ein Gedanke, der auch von O. Bottema und B. Roth [1, S. 310] aufgegriffen wird. Es ist jedoch keineswegs von vornherein klar, ob mit einem solchen Ansatz wirklich sämtliche kubischen Zwangläufe erfaßt werden können; dies wird sich erst in § 10 erweisen.

Sicher ist jedenfalls, daß die bei der *Umkehrbewegung* Σ'/Σ von den Ebenen $\gamma' \subset \Sigma'$ in Σ eingehüllten *Torsen* Θ von 3. Klasse sind, welche die

ausgezeichnete Eigenschaft haben, daß ihre *Parallelflächen gleichfalls Torsen 3. Klasse* sind, wenn man die rein translatorischen Bewegungen wieder ausschließt.

Mit Rücksicht auf ihre Rationalität kann jede kubische Torse Θ als Hüllgebilde ihrer Tangentialebenen in homogenen kartesischen Koordinaten x_i ($i = 0, 1, 2, 3$) angesetzt werden durch $\sum u_i x_i = 0$, wobei die u_i Polynome höchstens 3. Grades eines Lageparameters t sind. Die Parallelfläche Θ im Abstand d ist dann festgelegt durch

$$\begin{aligned} u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 &= (d \cdot u_4 - u_0) x_0 \\ \text{mit } u_4^2 &= u_1^2 + u_2^2 + u_3^2. \end{aligned} \quad (8.1)$$

Damit diese Torse ebenfalls kubisch ist, muß auch u_4 ein Polynom höchstens 3. Grades sein, denn wegen der gemeinsamen Fernkurve kann t auch auf Θ als rationaler Parameter dienen. Die durch

$$y_0 : y_1 : y_2 : y_3 = u_4(t) : u_1(t) : u_2(t) : u_3(t) \quad (8.2)$$

definierte Raumkurve q ist mithin von höchstens 3. Ordnung; zufolge der Nebenbedingung in (8.1) verläuft sie auf der Einheitskugel und kann als das *sphärische Normalenbild* der Torsen Θ und Θ' aufgefaßt werden. Da es aber *keine reellen sphärischen Kubiken* gibt, muß bei Beschränkung auf reelle Torsen Θ geschlossen werden, daß das sphärische Normalenbild q bloß von 2. Ordnung, also ein *Kreis* sein kann. Dies bedeutet wiederum, daß die in Rede stehenden Torsen Θ und Θ' *kubische Böschungstorsen* sind. Es gilt daher der entscheidende

Satz 4: *Im Reellen sind die einzigen Torsen 3. Klasse, deren Paralleltorsen ebenfalls die Klass 3 haben, die kubischen Böschungstorsen. Das System der Parallelflächen bildet eine Translationssschar in Lotrichtung².*

§ 9. Die Umkehrbewegung Σ'/Σ eines räumlichen kubischen Zwangslaufs Σ/Σ' erzeugt also, auf Ebenen $\gamma \subset \Sigma'$ angewendet, durchwegs kubische Böschungstorsen (einschließlich gewisser Grenzformen). Sie induziert auf der Einheitskugel eine Verlagerung der sphärischen

² Im komplex erweiterten Raum hingegen existieren sehr wohl sphärische Kubiken; als Beispiel sei die Kurve

$$y_0 : y_1 : y_2 : y_3 = t^3 + 1 : (t+1) : it(t-1) : t^3 - 1$$

angeführt. Die zugehörigen Parallelsscharen von kubischen Torsen bestehen nun nicht aus Böschungstorsen.

Normalenbildpunkte $Q' (O' Q \perp \gamma')$, die ebenfalls eine *Bewegung* ist, weil die sphärische Entfernung irgendzweier Punkte Q_1 und Q_2 , die ja den Winkel zweier Ebenen γ'_1 und γ'_2 mißt, unverändert bleibt. Diese sphärische Bewegung weist durchwegs kreisförmige Bahnen auf, kann somit nur eine *Drehung um eine feste Achse* sein. Damit hat man

Satz 5: Die reellen kubischen, nichttranslatorischen Zwangsläufe Σ/Σ' im Raum sind dadurch gekennzeichnet, daß die Ebenen-Hülltoreisen der Umkehrbewegung Σ'/Σ durchwegs kubische Böschungstorsen mit gemeinsamer Lotrichtung sind, wenn man die lotrechten und die waagrechten Ebenen ausschließt.

Die Momentanachsen von Σ'/Σ (gleichzeitig auch von Σ/Σ') sind infolgedessen allesamt parallel zur Lotrichtung. Das von ihnen in Σ erfüllte „Gangaxoid“ Π und das in Σ' auftretende „Rastaxoid“ Π' sind daher im allgemeinen lotrechte Zylinderflächen, die einander jeweils längs der Momentanachse berühren und im Zuge der Bewegung aufeinander „schrotten“.³ Unter Einschluß der Möglichkeit, daß sich alle Momentanachsen vereinigen, gilt somit der grundlegende

Satz 6: Die reellen kubischen, nichttranslatorischen Zwangsläufe im Raum sind Zylinderschrotungen oder axiale Umschwünge⁴.

§10. Die Zylinderschrotungen wurden allgemein von A. Schönflies [7] studiert, so daß sie bei Bottema-Roth [1, S. 312] als „Schönflies-Bewegungen“ bezeichnet werden. Sie können stets aus einem ebenen Zwanglauf σ/σ' und einer dazu normalen Schiebung zusammengesetzt werden. Die Punktbahnen der Zylinderschrotung Σ/Σ' bilden sich im Grundriß auf die Bahnen von σ/σ' ab.

Im vorliegenden Fall einer *kubischen Zylinderschrottung* Σ/Σ' müs-

³ Damit ist ein Bewegungsvorgang gemeint, bei welchem das Gangaxoid auf dem Rastaxoid gleichzeitig rollt und längs der jeweiligen Berührungsgeraden gleitet. Ein zwischen die beiden Axoide geratendes Getreidekorn würde nämlich nicht bloß zerdrückt, sondern auch zerrieben werden.

⁴ Ein bemerkenswerter kubischer Zwanglauf im komplexen Raum ist die euklidische Schraubung um eine Tangente des absoluten Kugelkreises. Hier sind die eigentlichen Bahnkurven kubische Parabeln konstanter Krümmung und Torsion, die J. Lyon um 1890 entdeckt hat [8, S. 93]. Ein reelles, pseudoeuklidisches Seitenstück dieser sogenannten „Grenzschaubung“ hat der Verfasser in [10] behandelt.

sen daher die Bahnkurven der ebenen Komponente σ/σ' von dritter, allenfalls von zweiter Ordnung sein. Der ebene Zwanglauf σ/σ' ist somit von einer der in Abschnitt I betrachteten Arten. Unter Berufung auf Satz 2 kann demnach die Raumbewegung Σ/Σ' angesetzt werden durch die beiden Gleichungen (3.8), zu welchen noch eine Schiebung $z' = z + v(\varphi)$ tritt. Das Translationsgesetz $v(\varphi)$ muß dabei mit Rückblick auf die rationale Darstellung (4.1) so geartet sein, daß nach Übergang zum Parameter $t = \operatorname{tg}(\varphi/2)$ das Produkt $(1 + t^2)v$ ein kubisches Polynom wird. Bei Unterdrückung einer entbehrlichen additiven Konstante d' in der letzten Zeile von (10.1) gelangt man so zu

Satz 7: Die reellen kubischen, nichttranslatorischen Zwangsläufe Σ/Σ' im Raum sind darstellbar in der Form

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \varphi - y \sin \varphi - a \cos \varphi + b \sin \varphi + c \cdot \operatorname{tg}(\varphi/2), \\ y' &= x \sin \varphi + y \cos \varphi, \\ z' &= z + a' \cos \varphi + b' \sin \varphi + c' \operatorname{tg}(\varphi/2), \quad (c, c') \neq (0, 0). \end{aligned}$$

In homogenen Koordinaten und in rationaler Form lautet die Darstellung:

$$\begin{aligned} x'_0 &= (1 + t^2)x_0, \\ \text{auf } x'_1 &= [a(t^2 - 1) + 2bt + ct(1 + t^2)]x_0 + (1 - t^2)x_1 - 2tx_2, \\ x'_2 &= 2tx_1 + (1 - t^2)x_2, \\ \text{aber } x'_3 &= [a'(1 - t^2) + 2bt' + ct'(1 + t^2)]x_0 + (1 + t^2)x_3. \end{aligned} \quad (10.2)$$

Hieraus ist zu entnehmen, daß der im § 8 erwähnte Darboux'sche Ansatz doch sämtliche kubischen Zwangsläufe im Raum erfaßt, zumindest die reellen. Die Normalform (10.2) stellt sich bei Verwendung der Euler-schen Parameter $c_0 = 1, c_1 = c_2 = 0, c_3 = t$ ein; man vergleiche auch das Beispiel bei Bottema-Roth [1, S. 317].

§11. Im ausgeschlossenen Grenzfall $c = c' = 0$ ist der Zwanglauf Σ/Σ' nur mehr *quadratisch*, wie aus (10.2) ersichtlich ist. Aus der entsprechenden Darstellung (10.1) ist zu entnehmen, daß er unter der Voraussetzung $(a, b) \neq (0, 0)$ durch Überlagerung einer gleichförmig ablaufenden ebenen Ellipsenbewegung σ/σ' (§ 7) mit einer dazu normalen harmonischen Schwingung gleicher Frequenz entsteht. Es handelt sich demnach um den bekannten *Darbouxschen Umschwung* mit durchwegs elliptischen Punktbahnen [2, S. 353 ff.; 1, S. 304 ff.]. Dieser ist auch

dadurch gekennzeichnet, daß er die einzige räumliche Bewegung mit lauter ebenen Bahnen darstellt⁵.

Durch nachträgliches Wiederhinzufügen der Tangens-Glieder in (10.1) gelangt man in Erweiterung von Satz 3 zum

Satz 8: Die allgemeinsten reellen kubischen Zwangsläufe im Raum entstehen durch Überlagerung eines Darbousschen Umschwungs mit einer geradlinigen Schiebung, die proportional zum Tangens des halben Drehwinkels fortschreitet.

Die zurückgestellte Annahme $a = b = 0$ wird im Abschnitt III eine ausschlaggebende Rolle spielen.

Satz 12. Die Bahnkurven $k' \subset \Sigma'$ des kubischen Zwangslaufs Σ/Σ' haben in der Schiebrichtung $x':y':z' = c:0:c'$ einen gemeinsamen Fernpunkt U' , der für $\varphi = \pi$ in (10.1) bzw. $t = \infty$ in (10.2) erreicht wird. Im allgemeinen sind die Bahnen *kubische Ellipsen*, weil sie zufolge Satz 8 auf Zylindern mit dem Scheitel U' verlaufen, welche die jeweils von dem erzeugenden Punkt $C \in \Sigma$ herrührende Darboux-Ellipse enthalten.

Die Trägerebene ε' der Darboux-Bahn eines Punktes $C(x, y, z)$ hat, wie man leicht nachprüft, die Gleichung

$$\begin{aligned} (b'x - a'y)x' - (b'x + a'y - a'b - a'b)y' + \\ + (x^2 + y^2 - ax - by)(z' - z) = 0. \end{aligned} \quad (12.1)$$

Geht diese Ebene ε' durch den Fernpunkt $U'(x':y':z' = c:0:c')$, was genau für die Punkte C des lotrechten Drehzyinders $\Delta \subset \Sigma$ mit der Gleichung

$$c'(x^2 + y^2 - ax - by) = c(a'x - b'y) \quad (12.2)$$

zutrifft (insbesondere also für die Punkte der z -Achse), so sind die Bahnen k' dieser Punkte *ebene Kubiken*. Damit hat man, im Einklang mit einer Bemerkung von G. Darboux [2, S. 362], den

Satz 9: Beim allgemeinsten kubischen Zwangslauf im Raum laufen die Punkte eines Drehzyinders — und nur diese — auf ebenen Kurven 3. Ordnung.

⁵ Die Umkehrbewegung Σ/Σ' ist der sogenannte *Mannheimische Umschwung*, bei welchem sämtliche schrägen Ebenen aus Σ' durch feste Punkte von Σ geführt werden und daher Drehkegel (mit lotrechten Achsen) umhüllen [1, S. 310 ff.].

Entsprechend wäre bei der *Umkehrbewegung* Σ/Σ' zu vermerken, daß die den Fernpunkt U' enthaltenden, also zur Schiebrichtung $x':y':z' = c:0:c'$ parallelen Ebenen ε' ständig durch einen festen, zugeordneten Punkt $C \in \Delta$ gleiten und daher *Drehkegel* mit lotrechten Achsen umhüllen; eine Ausnahme bilden lediglich die lotrechten Ebenen $y' = \text{const.}$ die Drehzyylinder (um die z -Achse) erzeugen.

Satz 13. Die im § 9 zum Schluß erwähnten, aufeinander schrotenden *Achsenzyliner* Π und Π' der kubischen Raumbewegung Σ/Σ' haben als Basen die in § 5 besprochenen Polkurven p (5.2) bzw. p' (5.3) des ebenen Zwangslaufs σ/σ' . Im *Hauptfall*, d. h. für $(a, b) \neq (0, 0)$ und $c \neq 0$, ist daher der Gangzyylinder Π von 6. Ordnung, der Rastzyylinder Π' hingegen von 4. Ordnung (und nicht von 7. Ordnung, wie in [1, S. 317] angegeben wird).

Der (symmetrische) *Sonderfall* $a = b = 0$ mit parabolischen Achsenzylin dern wird *Gegenstand von Abschnitt 34*.

Unter der Annahme $a' = b' = 0$ reduziert sich der Darbouxsche Umschwung auf die ebene Ellipsenbewegung (§ 7), sofern $(a, b) \neq (0, 0)$.

Im *Grenzfall* $c = 0$ ($c' \neq 0$) treten wegen der lotrecht erfolgenden Schiebung als Axoide Π, Π' im allgemeinen die beiden Drehzyylinder über den Kardan-Kreisen p (7.1) und p' (7.2) auf, sofern sie nicht für $a = b = 0$ auf eine Achse zusammenschrumpfen (§ 20). Ansonsten bilden sich die räumlichen Bahnkubiken im Grundriß auf die elliptischen Bahnen der ebenen Ellipsenbewegung (§ 7) ab. Die ebenen Bahnkubiken werden von den Punkten des Gangzyinders $\Pi = \Delta$ (12.2) durchlaufen.

III. Kubische symmetrische Schrotungen

Satz 14. Unter den räumlichen Zwangsläufen Σ/Σ' nehmen die durch *kongruente Axoide* Π, Π' ausgezeichneten Bewegungen eine besondere Stellung ein. Im Falle gleichsinniger Kongruenz sind dies die sogenannten *symmetrischen Schrotungen*, die von J. Krames eingeführt und in einer ganzen Reihe von Arbeiten [4] untersucht worden sind. Man gelangt zu diesen Bewegungen, indem man das Rastsystem Σ' an einer stetigen Folge von Geraden $e \subset \Sigma$ spiegelt. Die so gewonnene stetige Folge von gleichsinnig kongruenten Spiegelbildern Σ definiert dann einen wohlbestimmten Zwanglauf Σ/Σ' („line-symmetric motion“ bei Bottema-Roth [1, S. 317 ff.]). Die von den Spiegelachsen e erfüllte Regelfläche Γ heißt die „*Grundfläche*“ der symmetrischen Schrotung; sie

sei als nichtzylindrisch vorausgesetzt, um ebene (symmetrische) Rollungen auszuschalten.

Das zu zwei benachbarten Erzeugenden e, e_1 von Γ gehörige Lagenpaar Σ, Σ_1 ist durch eine Schraubung um das Gemeinlot von e und e_1 verknüpft. Hieraus folgt mittels des Grenzübergangs $e_1 \rightarrow e$, daß die Momentanachse der Bewegung jeweils mit der zu e gehörenden Zentraltangente der Grundfläche Γ zusammenfällt, sofern Γ windschief ist. Das Rastaxoid Π' ist daher das von den Zentraltangenten gebildete „Striktionsband“ von Γ , und das Gangaxoid Π ist (als Spiegelbild bezüglich e) gleichsinnig kongruent dazu.

Die Bahn k' eines Punktes $C \in \Sigma$ besteht aus den Spiegelbildern eines festen Punktes $C^* \in \Sigma'$ bezüglich aller Erzeugenden e von $\Gamma; k'$ ist mithin zentrisch ähnlich (im Maßstab $2:1$) zur Fußpunktcurve der Grundfläche Γ in bezug auf C^* .

§ 15. Um nun aus der Menge der durchwegs als Zylinderschrotungen erkannten kubischen Raumbewegungen Σ/Σ' (10.1) die symmetrischen Schrotungen auszuwählen, ist nach allem lediglich der Sonderfall mit kongruenten Achsenzylinndern Π, Π' zu betrachten. Dieser ist aus der symmetrischen Parabelrollung σ/σ' (§ 6) abzuleiten und bedingt die Annahme $a = b = 0$, wobei auch der Grenzfall $c = 0$ einer bloßen Drehung σ/σ' zu berücksichtigen ist. Die *kubischen symmetrischen Schrotungen* sind demnach allesamt darstellbar in der Form

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \varphi - y \sin \varphi + c' \cdot \operatorname{tg}(\varphi/2), \\ y' &= x \sin \varphi + y \cos \varphi, \\ z' &= z + a' \cos \varphi + b' \sin \varphi + c' \cdot \operatorname{tg}(\varphi/2), \quad (c, c') \neq (0, 0). \end{aligned} \quad (15.1)$$

Als Darboux'sche Komponente $c = c' = 0$ tritt hier für $(a', b') \neq (0, 0)$ der *Mannheim-Darboux'sche Umschwingung* auf, der sich aus einer gleichförmigen Drehung um die feste z -Achse und einer harmonischen Schwingung gleicher Frequenz längs dieser Achse zusammensetzt. Bei ihm laufen alle nicht der Achse angehörenden Punkte auf von koaxialen Drehzylinndern getragenen Ellipsen, und überdies hüllen alle schrägen Ebenen Drehkegel mit lotrechten Achsen ein [1, S. 321]. In Ergänzung zu Satz 8 gilt also

Satz 10: Die kubischen symmetrischen Schrotungen sind darstellbar in der Form (15.1) und entstehen unter der Annahme $(a', b') \neq (0, 0)$ durch Überlagerung eines Mannheim-Darboux'schen Umschwungs mit einer geradlinigen Schiebung, die proportional zum Tangens des halben Dreh-

winkels fortschreitet. Für $a' = b' = 0$ tritt an die Stelle des axialen Umschwungs eine reine Drehung.

§ 16. Die Axioide der symmetrischen Schrotung Σ/Σ' (15.1) sind im Hauptfall $c \neq 0$ die über den Polkurven p (5.2) und p' (5.3) der symmetrischen Parabelrollung (§ 6) errichtbaren *parabolischen Zylinder* $\Pi \subset \Sigma$:

$$x = c \cdot \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}, \quad y = \frac{c}{2} \left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2} \right) \quad \text{oder} \quad x^2 + 2cy = c^2, \quad (16.1)$$

$$\begin{aligned} \text{bzw. } \Pi' &\subset \Sigma': \\ x' &= c \cdot \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}, \quad y' = \frac{c}{2} \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2} \right) \quad \text{oder} \quad x'^2 - 2cy' = -c^2. \end{aligned} \quad (16.2)$$

Die in § 14 genannten Spiegelachsen e sind waagrechte Tangenten des lotrechten Rastzylinnders Π' . Die von ihnen gebildete *Grundfläche* Γ ist mithin eine Π' berührende umschriebene *konoide Regelfläche*. Die Berührungscurve s ist die Kehl- oder Striktionslinie von Γ , und der Zylinder Π' stellt gleichzeitig das Striktionsband und die Zentraltorse von Γ dar.

Die Spiegelung an der zum Positionsparameter φ gehörigen Achse $e \subset \Gamma$ kann zusammenge setzt werden aus der Spiegelung am der e enthaltenden Tangentialebene τ des Zylinders Π' (16.2), beschrieben durch

$$x' \sin \frac{\varphi}{2} - y' \cos \frac{\varphi}{2} + \frac{c \cdot \cos \varphi}{2 \cos(\varphi/2)} = 0, \quad (16.3)$$

und der Spiegelung an der durch e gehenden Schichtenebene $\omega: z' = h$. Anwendung auf die durch (15.1) gegebene Lage $C'(x', y', z') \in \Sigma'$ eines Punktes $C(x, y, z) \in \Sigma$ führt nach kurzer Rechnung auf einen Punkt C^* mit den Koordinaten

$$\begin{aligned} x^* &= x' \cos \varphi + y' \sin \varphi - c \cdot \cos \varphi \cdot \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}, \\ y^* &= x' \sin \varphi - y' \cos \varphi + c \cdot \cos \varphi, \\ z^* &= -z' + 2h, \end{aligned} \quad (16.4)$$

die sich laut § 14 erwartungsgemäß als lagenunabhängig erweisen, wenn

man die Kote h durch

$$2h = a' \cos \varphi + b' \sin \varphi + c' \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \quad (16.5)$$

festsetzt. Es bestehen dann die Relationen

$$x^* = x, \quad y^* = c - y, \quad z^* = -z. \quad (16.6)$$

Die Spiegelachse e ist damit als Schnitt der Ebenen τ (16.3) und ω ($z' = h$) festgelegt, durch das Gleichungspaar

$$\begin{aligned} x' \sin \varphi - y' (1 + \cos \varphi) + c \cdot \cos \varphi &= 0, \\ 2z' &= a' \cos \varphi + b' \sin \varphi + c' \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}. \end{aligned} \quad (16.7)$$

Ihr Berührungs punkt mit dem Zylinder Π' (16.2), also der Kehl- oder Zentralpunkt von e , hat die Koordinaten

$$\begin{aligned} X' &= c \cdot \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}, \quad Y' = \frac{c}{2} \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2} \right), \\ Z' &= \frac{1}{2} \left(a' \cos \varphi + b' \sin \varphi + c' \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right). \end{aligned} \quad (16.8)$$

§17. Um den Grad der durch die Schar der Ebenenpaare (16.7) erfaßten (algebraischen) Grundfläche Γ zu ermitteln, schreibe man die Gleichungen nach Vornahme des Parameterwechsels $t = \operatorname{tg}(\varphi/2)$ auf homogene Koordinaten um:

$$\begin{aligned} c(1-t^2)x'_0 + 2tx'_1 - 2x'_2 &= 0, \\ Hx'_0 - 2(1+t^2)x'_3 &= 0 \end{aligned} \quad (17.1)$$

mit $H = a'(1-t^2) + 2bt + c't(1+t^2)$.

Hieraus findet man für die Plücker-Koordinaten der Erzeugenden e von Γ die Werte

$$\begin{aligned} p_1 &= 2(1+t^2), & p_4 &= -tH, \\ p_2 &= 2t(1+t^2), & p_5 &= H, \\ p_3 &= 0, & p_6 &= c(t^4 - 1). \end{aligned} \quad (17.2)$$

Weil H für gewöhnlich ein kubisches Polynom in t ist, hat also die Grundfläche Γ im allgemeinen den *Grad 4*.

Zufolge einer Bemerkung in §14 sind alle Fußpunktcurven der Grundfläche Γ Kubiken. Unter ihnen befinden sich ∞^2 ebene Kurven 3. Ordnung, herrührend von den Punkten C^* des durch (12.2) und (16.6) bestimmten Drehzyllinders Δ^* :

$$c'[x^*]^2 + [y^* - e]^2] = c[a'x^* + b'(y^* - c)]. \quad (17.3)$$

ließe sich eine rati.

Dieser flacht sich allerdings für $c' = 0$ zu einer Ebene ab (§19) und schrumpft für $c = 0$ auf die z' -Achse zusammen (§20).

Weiters stellt man fest, daß die Striktionslinie s (16.8) auf Grund ihrer rationalen Darstellung

$$X'_0 = 1 + t^2, \quad X'_1 = ct(1 + t^2), \quad X'_2 = \frac{c}{2}(1 + t^2), \quad X'_3 = \frac{H}{2} \quad (17.4)$$

(§8.1)

im allgemeinen die *Ordnung 4* hat. — Zusammenfassend gilt also

Satz 11: Die Grundfläche Γ (17.2) der kubischen symmetrischen Schrötung (15.1) ist im allgemeinen — d.h. unter den Voraussetzungen $(a', b') \neq (0, 0)$ und $c \neq 0$ — eine rationale konoidale Regelfläche 4. Grades, welche dem parabolischen Rastzyliner Π' (16.2) längs der rationalen Kehlquartik s (17.4) berührend umschrieben ist.

§18. In jeder Schichtenebene ω : $z' = x'_3/x'_0 = h = \text{const}$ verlaufen neben der uneigentlichen Leiteraden $x'_0 = x'_3 = 0$ für gewöhnlich drei Erzeugende e der konoidalen Grundfläche Γ , wie die zweite Gleichung (17.1) lehrt. Ihre drei Schnittpunkte gehören der Doppelkurve d von Γ an, die somit im allgemeinen eine Raumkurve 3. Ordnung sein wird; Γ gehört dann zur IV. Sturmschen Art der Regelflächen 4. Grades [6, S. 256].

Die Parameterwerte t, \bar{t} zweier in derselben Schichtenebene ω enthaltenen Erzeugenden e, \bar{e} von Γ genügen mithin der Bedingung

$$(1 + t^2)\bar{H} - (1 + \bar{t}^2)H = 0 \quad (18.1)$$

oder, nach Division durch $t - \bar{t} \neq 0$:

$$2a'(t + \bar{t}) + 2b'(t\bar{t} - 1) - c'(1 + t^2)(1 + \bar{t}^2) = 0. \quad (18.2)$$

Die Koordinaten x'_i ($i = 0, 1, 2, 3$) des Schnittpunktes D von e und \bar{e} befriedigen nun die Gleichungen (17.1) ebenso wie die mit \bar{t} statt t

angeschriebenen. Aus dem ersten so gewonnenen Gleichungspaar findet man dann nach Kürzung durch $t - \bar{t}$ die Proportion

$$x'_0 : x'_1 : x'_2 = 2 : c(t + \bar{t}) : c(1 + t\bar{t}). \quad (18.3)$$

Nach Eintragung der jetzt unter der Voraussetzung $c \neq 0$ verfügbaren symmetrischen Funktionen

$$t + \bar{t} = \frac{2x'_1}{c x'_0} = \frac{2x'}{c}, \quad t\bar{t} = \frac{2x'_2}{c x'_0} - 1 = \frac{2y'}{c} - 1 \quad (18.4)$$

in die ebenfalls symmetrische Bedingung (18.2) erhält man nach kurzer Rechnung mit

$$c' [x'^2 + (y' - c)^2] = c [a' x' + b' (y' - c)] \quad (18.5)$$

bereits den *Grundriß der Doppelkurve d von Γ* . Unter den zusätzlichen Voraussetzungen $(a', b') \neq (0, 0)$ und $c' \neq 0$ ist dies ein *Kreis*, der den Brennpunkt $F'(0, c)$ der Parabel p' (16.2) enthält (§ 6, Abb. 2).

Anders ausgedrückt, hat man mit (18.5) die Gleichung eines die Doppelkurve $d \subset \Gamma$ tragenden *Drehzyllinders Δ'* , der die Fokalachse des parabolischen Rastzyinders Π' enthält; er ist im übrigen mit dem Drehzyylinder Δ^* (17.3) identisch⁶. Der Gesamtschnitt $\Gamma \cap \Delta$ zerfällt in die doppeltzählende Kubik d und die beiden zu $t = \pm i$ gehörenden isotropen Fernerzeugenden $x'_0 = x'_1 \pm i x'_2 = 0$.

Zwecks Erfassung der noch fehlenden Kote z' bilde man die Differenz aus der zweiten Gleichung (17.1) und ihrem in \bar{t} angeschriebenen Äquivalent. Nach Division durch $t - \bar{t}$ ergibt sich so die symmetrische Relation

$$2(t + \bar{t})x'_3 = [2b' - a'(t + \bar{t}) + c'(1 + t^2 + \bar{t}^2)]x'_0, \quad (18.6)$$

die unter Verwendung der Ausdrücke (18.4) auf die Gleichung

$$2x'(c'x' - cz') = c[a'x' + c'(y' - c) - b'c] \quad (18.7)$$

führt. Diese stellt ein *hyperbolisches Paraboloid Ψ* dar, das aus dem Drehzyylinder Δ' (18.5) die Doppelkubik d ausschneidet, daneben aber

⁶ Zur Aufhellung des geometrischen Hintergrunds dieser auffälligen Tatsache mag die folgende Überlegung beitragen: Die Fußpunkt kubik von Γ für einen Punkt D der Doppelkurve d wird in D einen Doppelpunkt aufweisen und daher *eben* sein; D muß somit dem Drehzyylinder Δ^* (17.3) angehören.

noch die Gerade $l: x' = 0, y' = c + b'c/c'$. Mit Hilfe der das Ebenenbüschel l parametrisierenden Veränderlichen

$$u = \frac{c'y' - (b' + c')c}{c'x'} \quad (18.8)$$

ließe sich eine rationale Parameterdarstellung der Doppelkubik d :

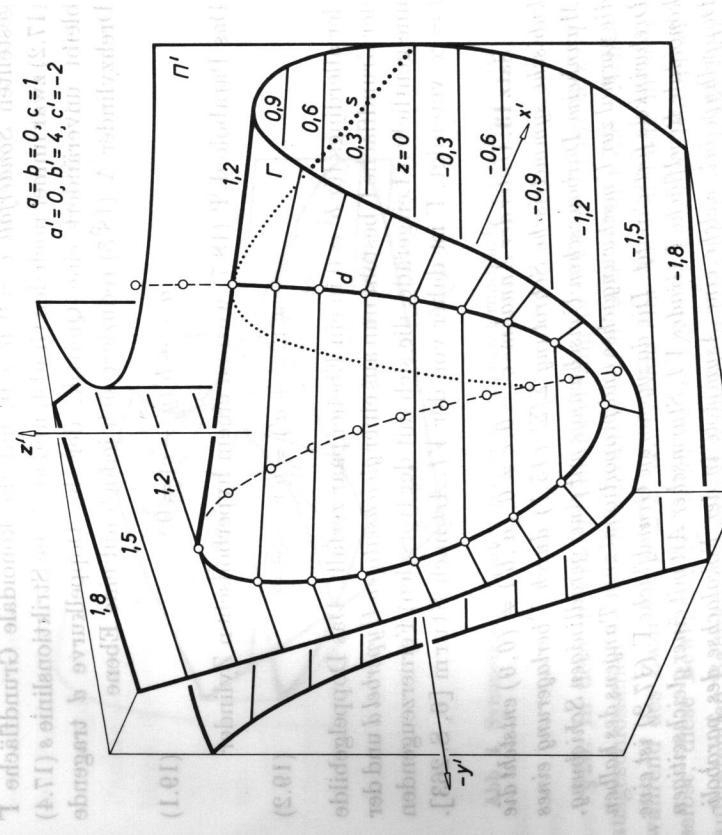


Abb. 3. Symmetrische Sonderform der konoidalen Grundfläche 4. Grades IV. Art

angeben, die auch deren isolierte Teile erfaßt. Ohne auf weitere Einzelheiten einzugehen, sei vermerkt der

Satz 12: Die Grundfläche Γ (17.2) der kubischen symmetrischen Schröffung Σ/Σ' (15.1) ist im allgemeinsten Fall — d, h für $(a', b') \neq (0, 0)$ und $c' \neq 0$ — eine konoidale Regelfläche 4. Grades der IV. Sturmschen Art. Ihre Doppelkurve ist eine auf einem Drehzyylinder Δ (18.5) verlaufende kubische Ellipse, welche die Fokalachse des parabolischen Rastzyinders Π' (16.2) zur reellen Asymptote hat. Die Fußpunktcurven von Γ sind für alle Punkte von Δ' ebene Kubiken.

Eine anschauliche Ansicht einer solchen Grundfläche Γ zeigt Abb. 3. Die bei dem dargestellten Exemplar bestehende Symmetrie bezüglich der y' -Achse ist durch die Annahme $a' = 0$ bedingt und sonst nicht vorhanden.

§ 19. In dem unter der Voraussetzung $(a', b') \neq (0, 0)$ vorhin zurückgestellten Sonderfall $c' = 0$ ($c \neq 0$) hat die konoide Grundfläche Γ (117.2) zwar immer noch den Grad 4, und auch die Striktionslinie s (17.4) bleibt unverändert eine Quartik; der die Doppelkurve d tragende Drehzylinder Δ' (18.5) reduziert sich jedoch auf eine Ebene

$$a, x + q, \beta, -c) = 0.$$

Das Paraboloid Ψ (18.7) wird zu einem hyperbolischen Zylinder

192

der allerdings für $b' = 0$ in ein Ebenenpaar zerfällt. Das Doppelgebilde der Grundfläche Γ besteht nun aus einer *gleichseitigen Hyperbel* und der unmeigentlichen Leitgerade, die sich mit der (torsalen) Fernerzeugenden $\gamma = \infty$ vereinigt; Γ ist daher von der VI. Art nach Sturm [6, S. 263].

Satz 13: Unter der Annahme $c' = 0, c \neq 0, (a', b') \neq (0, 0)$ entsteht die kubische symmetrische Schrodung Σ/Σ' (15.1) durch Überlagerung eines Mannheim-Darboux'schen Umschwungs mit einer geradlinigen Schiebung, die normal zur Umschwingachse und proportional zum Tangens des halben Drehwinkels fortschreitet. Die dazugehörige Grundfläche Γ (17.2) ist eine konoidale Regelfläche 4. Grades V.I. Sturmscher Art mit einer gleichseitigen Doppelhyperbel, welche eine Asymptote in der Fokalachse des parabolischen Basistriellers Π' (16.2) hat.

Die Bahnkurven dieser Bewegung verlaufen auf horizontalen (zur x' -Achse parallelen) elliptischen Zylindern, mit Ausnahme der ebenen Bahn: diese röhren von den Punkten der aus dem Drehzyylinder Λ

(12.2) hervorgehenden Ebene $a \cdot x = b$ her. Mit kubischen symmetrischen Zylinderschrotungen, bei welchen die Punkte einer gangfesten Ebene auf ebenen Bahnen wandern, haben sich unlängst E. V. de Vasconcelos und J. Tölke [9] befäßt. Mit ihrer differentialgeometrischen Methode gelangen die Autoren jedoch (anscheinend infolge Vernachlässigung einer Integrationskonstante) bloß zu dem hier mit $a' = 0$ einzuordnenden Spezialfall. Überdies wird als

Grundfläche fälschlich ein Konoid 6. Grades angegeben, das eigentlich eine konioide Regelfläche 5. Grades ist. Diese wurde nachträglich von J. Krames [5] untersucht, der zeigte, daß die auf sie gegründete symmetrische Schrötung Bahnkurven 4. Ordnung erzeugt.

Die durch Symmetrieeigenschaften definierte Form $b' = 0$ der Grundfläche zeigt Abb. 4.

die Punkte der z-Achse ein Schnittpunkt ist. Da die Funktionen stetig sind, ist $\sigma' = c = 1$ und $b' = c' = 0$.

$$d' = c = 1$$

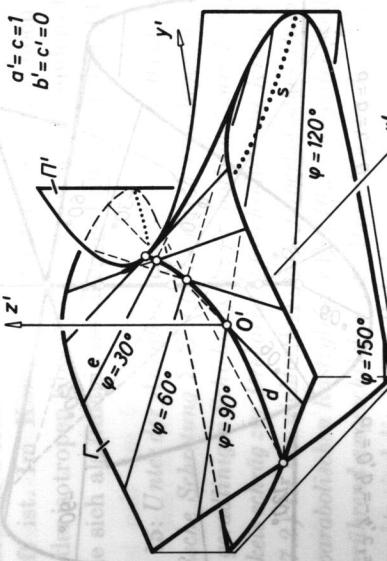


Abb. 4. Symmetrische Sonderform der konoidalen Grundfläche 4. Grades VI. Art

§ 20. In dem unter der Voraussetzung $(a', b') \neq (0, 0)$ in Satz 11 ausgeschlossenen zweiten Sonderfall $c = 0$ ($c' \neq 0$) erfährt die z -Achse während des Zwangslaufs Σ/Σ' (15.1) bloß eine Verschiebung in sich selbst; diese Bewegung ist daher ein *axialer Umschurung*. Die dabei auftretenden Bahnkurven sind demnach auf koaxialen Drehzyllindern verlaufende, untereinander affine kubische Ellipsen. Die Grundfläche (17.2) ist nach wie vor vom 4. Grad, besitzt aber jetzt die z' -Achse als dreifache Leitgerade und gehört daher zur X. Art nach Sturm [6, S. 265].

Satz 14: Unter der Annahme $c = 0, c' \neq 0, (a', b') \neq (0, 0)$ entsteht die kubische symmetrische Schrötung Σ/Σ' (15.1) durch Überlagerung eines Mannheim-Darbouzaischen Umschwunges mit einer Schiebung, die proportional zum Tangens des halben Drehwinkels längs der Umschwungachse erfolgt. Die zu gehörige Grundfläche Γ (17.2) ist ein aufrechtes Konoid.

Der die Punkte mit ebenen Bahnen tragende Drehzyylinder Δ (12.2) schrumpft im Reellen auf die z -Achse ein, die sich längs der mit ihr zusammenfallenden z' -Achse verschiebt. Bei Erweiterung ins Komplexe treten noch die imaginären Punkte der beiden invarianten Minimalebenen $x \pm iy = 0$ hinzu; man vergleiche hierzu auch [9].

Abb. 5 zeigt die zu $a' = 0$ gehörige, durch drei Symmetriearchsen ausgezeichnete Sonderform des Konooids Γ .

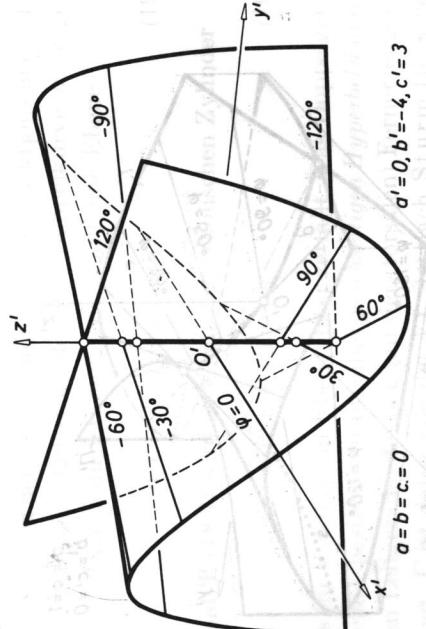


Abb. 5. Symmetrische Sonderform der konoidalen Grundfläche 4. Grades X. Art

§21. Ausständig ist jetzt nur noch die laut Satz 10 durchaus statthafté Annahme $a' = b' = 0$, bei welcher stets $c' \neq 0$ vorauszusetzen ist, um ebene Bewegungen auszuschalten. Hier sind zwei Fälle zu unterscheiden, nämlich $c \neq 0$ und $c = 0$ (§ 22).

Für $c \neq 0$ reduziert sich die Grundfläche Γ (17.2) wegen

$$p_1 : p_2 : p_3 : p_4 : p_5 : p_6 = 1 : 1 : 1 : 1 : 1 : 1 \quad (21.1)$$

$$= 2 : 2 : t : 0 : -c't^2 : c't : ct^2 - 1$$

auf die horizontale Regelschar des *hyperbolischen Paraboloids*

$$4z'(c'x' - cz') = c'^2(2y' - c). \quad (21.2)$$

Die Striktionslinie s (17.4) wird zu einer Parabel

$$X' = ct, \quad Y' = \frac{c}{2}(1 + t^2), \quad Z' = \frac{c'}{2}t \quad (21.3)$$

in der Ebene $c'X' = 2cZ'$.

Mit Hilfe der Darstellung (10.2) überzeugt man sich leicht, daß die Bahnkurven des vorliegenden *Zwanglaufs* nicht nur den mit $t = \infty$ erreichten, schon in § 12 erwähnten reellen Fernpunkt U' in der Schiebrichtung $x' : y' : z' = c : 0 : c'$ gemeinsam haben, sondern allesamt auch die zu $t = \pm i$ gehörigen absoluten Kreispunkte der Grundebene $z' = 0$ enthalten. Die Bahnen sind mithin durchwegs „*schiefe kubische Kreise*“, die auf *schiefen Kreiszylindern* mit dem Fernscheitel U' verlaufen. Eine Ausnahme bilden im Reellen lediglich die Bahngesetze der Punkte der z -Achse, auf welche der Drehzyylinder Δ (12.2) eingeschrumpft ist. Im Komplexen treten wiederum noch die von den Punkten der isotropen Ebenen $x \pm iy = 0$ herührenden ebenen Bahnen hinzu, die sich als (imaginäre) Kegelschnitte erweisen [4/IV].

Satz 15: Unter der Annahme $a' = b' = 0, c' \neq 0$ entsteht die *kubische symmetrische Schrötung* Σ/Σ' (15.1) durch Überlagerung einer Drehung mit einer geradlinigen Schiebung, die proportional zum Tangens des halben Drehwinkels schräg zur Drehachse fortschreitet. Die Kramessche Grundfläche Γ (17.2) ist ein nichtorthogonales hyperbolisches Paraboloid (21.2), das dem parabolischen Rastzyylinder Π' (16.2) längs der Striktionsparabel s (21.3) berührend angeschrieben ist. Abgesehen von den Schiebstrahlen der Achsenpunkte sind die reellen Bahnkurven *schiefe kubische Kreise* auf zur Schiebrichtung parallelen *schiefen Kreiszylindern*.

Dieser spezielle kubische Zwanglauf wurde bereits von A. Grünwald [3] entdeckt und ausführlich beschrieben, wobei sogar ein Apparat zur mechanischen Erzeugung der „*kubischen Kreisbewegung*“ erdacht wurde. Als symmetrische Schrötung ist die Bewegung von J. Kramé im Teil IV seiner einschlägigen Untersuchungen [4] behandelt worden.

§22. In dem noch verbliebenen speziellsten Fall $a' = b' = c = 0$, $c' \neq 0$ ist der kubische Zwanglauf Σ/Σ' (15.1) ein *axialer Umschwingung*, der als Grenzfall des in § 20 betrachteten angesehen werden kann. Die von der Achse verschiedenen reellen Punktbahnen verlaufen wieder auf koaxialen Drehzyldern, sind aber jetzt *aufrechte kubische Kreise*. Bei der Verebnung eines solchen Drehzylders gehen die von ihm getragenen (untereinander kongruenten) Bahnkurven in affine Tangentialen über. Die Grundfläche Γ dieser symmetrischen Schrötung ist nun ein *orthogonales hyperbolisches Paraboloid*

$$2x'z' = c'y'. \quad (22.1)$$

Für diesen letzten — natürlich auch bei A. Grünwald [3] und J. Krames [4/IV] gebührend berücksichtigten — Grenzfall sei vermerkt der

Satz 16: Unter der Annahme $a' = b' = c = 0, c' \neq 0$ ist die symmetrische Schrötung Σ/Σ' (15.1) ein kubischer axialer Umschwarzung. Er entsteht durch Überlagerung einer Drehung mit einer Schiebung, die proportional zum Tangens des halben Drehwinkels längs der Drehachse fortschreitet. Die reellen krummen Punktbahnen sind aufrechte kubische Kreise. Als Kramesche Grundfläche fungiert eine Erzeugendenschar eines orthogonalen hyperbolischen Paraboloids Γ (22.1).

Abschließend sei noch hervorgehoben, daß mit den in diesem Abschnitt III aufgetretenen Grundflächen Γ sämtliche reellen Regelflächen mit durchweg kubischen Fußpunktcurven gefunden worden sind.

Literatur

- [1] Bottema, O., und B. Roth : Theoretical Kinematics, Amsterdam/New York/Oxford 1979.
- [2] Darboux, G.: Note III in G. Koenigs, Leçons de Cinématique, Paris 1897.
- [3] Grünwald, A.: Die kubische Kreisbewegung eines starren Körpers. Z. Math. Phys. **55** (1907), 264—296.
- [4] Krames, J.: Über symmetrische Schrotungen I—VI. I, II, III, VI: Monatsh. Math. Phys. **45** (1937), 394—406, 407—417; **46** (1937), 38—50, 172—195. IV, V: Sb. d. Akad. d. Wiss. Wien **146** (1937), 145—158, 159—173.
- [5] Krames, J.: Über eine konoideale Regelfläche fünften Grades und die darauf gegründete symmetrische Schrötung. Sb. d. Öster. Akad. d. Wiss. **190** (1981), 223—230.
- [6] Müller, E., und J. Krames: Konstruktive Behandlung der Regelflächen (Vorlesungen über Darstellende Geometrie, III). Leipzig/Wien 1931.
- [7] Schönflies, A.: Über Bewegung starrer Systeme im Fall cylindrischer Axenflächen. Math. Ann. **40** (1892), 317—331.
- [8] Strubecker, K.: Differentialgeometrie, I (Sammlung Göschen, Bd. 1113). Berlin 1955.
- [9] Vasconcelos, E. V. de, und J. Tölke: Eine Raumbewegung mit nur kubischen Bahnkurven. Sb. d. Öster. Akad. d. Wiss. **188** (1979), 407—415.
- [10] Wunderlich, W.: Über eine affine Verallgemeinerung der Grenzschaubührung. Sb. d. Akad. d. Wiss. Wien **144** (1935), 111—129.
- [11] Wunderlich, W.: Algebraische Böschungslinien dritter und vierter Ordnung. Sb. d. Österr. Akad. d. Wiss. **181** (1973), 353—378.