

Über autopolare ebene Kurven

Von

w. M. Walter Wunderlich (Wien)

(Vorgelegt in der Sitzung der math.-nat. Klasse am 14. Dezember 1984)

(Mit 14 Abbildungen)

1. Einleitung

§1.1. Durchläuft ein beweglicher Punkt P in der Ebene eine glatte Kurve k , so umhüllt seine Polare p bezüglich eines festen Kegelschnitts j die Polarkurve \bar{k} von k . Diese wird von p jeweils im Pol Q der zu P gehörigen Tangente q von k berührt. Wegen ihrer wechselseitigen Beziehung werden die Kurven k und \bar{k} auch als „polar-reziprok“ bezeichnet.

Ist k eine algebraische Kurve n -ter Ordnung und m -ter Klasse, dann ist auch \bar{k} algebraisch, hat aber die Ordnung m und die Klasse n . Jedem singulären Punkt der einen Kurve entspricht eine singuläre Tangente dualen Charakters der anderen. So entspricht etwa einem Doppelpunkt eine Doppeltangente, einer Spitze eine Wendetangente usw.

§1.2. Eine Kurve k heißt *autopolar*, wenn sie mit ihrer Polarkurve \bar{k} (bezüglich eines gewissen Kegelschnitts j) zusammenfällt. Solche Kurven wurden wiederholt betrachtet, wenn auch nicht ausführlich genug. Für eine algebraische autopolare Kurve $k = \bar{k}$ muß die Ordnung mit der Klasse übereinstimmen; diese Kennzahl $m = n$ mag dann kurz als der *Grad* bezeichnet werden. Auf Grund einer bekannten Formel von J. Plücker besteht nun bei einer autopolaren Kurve n -ten Grades zwischen der Anzahl d ihrer Doppelpunkte (sowie Doppeltangenten) und der Anzahl r ihrer Spitzen (sowie Wendetangenten) die Beziehung

$$2d + 3r = n(n - 2). \quad (1.1)$$

Mit Rücksicht auf das (nichtnegative) Geschlecht gelten überdies die Schranken

$$d \leq \frac{1}{2}(n-2)(n-3), \quad r \geq n-2. \quad (1.2)$$

Die vorliegende Untersuchung betrifft zunächst die autopolaren Kurven 2. Grades (Kap. 2). Diese zur Erzeugung beliebiger autopolarer Kurven verwendbaren Kegelschnitte werden als nichteuklidische Kreise gedeutet, was die Auffassung autopolarer Kurven als Kurven konstanter Breite gestattet (Kap. 3). Ein Anliegen gilt ferner der Bestimmung aller autopolaren Kurven 3. und 4. Grades (Kap. 5–7). Unter diesen finden sich auch W-Kurven, die bekanntlich allesamt (sogar unendlichfach) autopolar sind (Kap. 4). Das Hauptgewicht liegt stets auf der Betrachtung reeller Gebilde, doch wird oft auch die Benützung imaginärer Elemente nötig sein. Im Hinblick auf den projektiven Charakter des Gegenstandes darf der Grundkegelschnitt gelegentlich als Kreis oder Parabel angenommen werden, was dann besondere metrische Verhältnisse bedingt.

2. Autopolare Kegelschnitte

§ 2.1. Seien (P, q) und (Q, p) zwei beliebige, jedoch verschiedene, bezüglich eines gegebenen, regulären Kegelschnitts j polare Linienelemente. Sie spannen, wenn weder P noch Q dem Kegelschnitt angehören, ein Poldreieck mit den Ecken P, Q und $N = p \cap q$ auf. Die aus P und Q an j legbaren (nicht unbedingt reellen) Tangentenpaare bilden ein Vierseit, dessen Diagonalen m_1, m_2 und $n = PQ$ ein zweites Poldreieck $M_1 M_2 N$ von j bestimmen (Abb. 1). Die Schnittpunkte von m_i ($i = 1, 2$) mit j seien mit U_i und V_i bezeichnet; es sind die Berührungspunkte des aus M_i an j legbaren Tangentenpaars. Die Punkte P, Q, M_1, M_2 bilden auf n ein harmonisches Quadrupel, ebenso wie die Geraden p, q, m_1, m_2 durch N .

Eine harmonische Zentralkollineation („projektive Spiegelung“), deren Zentrum und Achse bezüglich eines Kegelschnitts sind, bildet denselben auf sich selbst ab. Die projektive Spiegelung σ_1 mit dem Zentrum M_1 und der Achse m_1 führt daher den Grundkegelschnitt j in sich über, ebenso aber auch jeden Kegelschnitt, der j in U_1 und V_1 berührt. Dies gilt insbesondere für jenen (eindeutig bestimmten) Kegelschnitt h_1 , der durch den Punkt P geht; er enthält daher auch den Punkt Q . Weil nun h_1 auch jene Spiegelung σ trägt, die durch das Zentrum N und die Achse n festgelegt ist, so stimmen die Tangenten in den

(gegenüber σ invarianten) Punkten P und Q mit den Geraden $NP = q$ bzw. $NQ = p$ überein (Abb. 1).

Wendet man nun auf den Kegelschnitt h_1 die Polarität bezüglich j an, so geht er (als Kurve 2. Grades) in einen Kegelschnitt \bar{h}_1 über, wobei die beiden Berührungselemente mit j (in U_1 und V_1) erhalten bleiben, während die Elemente (P, q) und (Q, p) miteinander vertauscht werden. Da also h_1 und \bar{h}_1 vier Linienelemente gemeinsam haben, sind sie

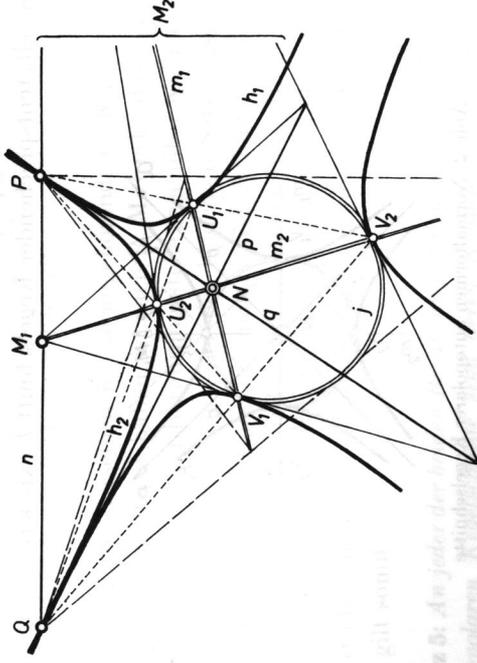


Abb. 1. Autopolare Kegelschnitte

identisch; dies bedeutet, daß h_1 bezüglich j autopolar ist. — Mit den gleichen Überlegungen findet man einen zweiten Kegelschnitt h_2 , der j in U_2 und V_2 berührt, auch die Linienelemente (P, q) und (Q, p) enthält und ebenfalls autopolar ist (Abb. 1). Es gilt mithin der bekannte, schon bei P. Appell [1] zu findende

Satz 1: Durch zwei bezüglich eines Kegelschnitts j polare Linienelemente gehen zwei Kegelschnitte h_1 und h_2 , die j doppelt berühren und bezüglich j autopolar sind.

Eine Erweiterung auf autopolare Quadriken im Raum vermerkt bereits vorher G. Darboux [2].

§ 2.2. Daß man auf die in § 2.1 dargelegte Weise zu sämtlichen bezüglich eines vorgelegten Kegelschnitts j autopolaren Kegelschnitten h gelangt, beruht auf dem Umstand, daß solche Kegelschnittspaare

keine Schnitt-, sondern nur Berührungstellen aufweisen können. In der Tat: In jedem gemeinsamen Punkt T von h und j ist die Polare t von T die Tangente von j , und da sie auch h berühren soll, kann dies nur in T stattfinden. Bezüglich j autopolare Kegelschnitte sind demnach bloß unter den doppelt berührenden zu suchen (hyperoskulierende kommen nicht in Betracht). In dem durch zwei auf j angenommenen Berührungstellen bestimmten Berührungsbüschel werden die Kegelschnitte vermöge der Polarität an j projektiv vertauscht, so daß außer j nur noch ein einziger selbstentsprechender Kegelschnitt h existiert.

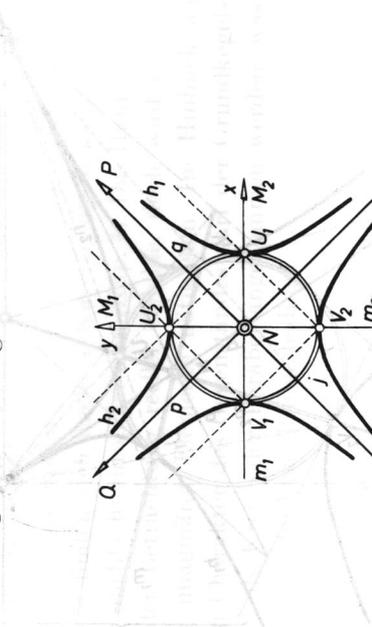


Abb. 2. Normalformen autopolarer Kegelschnitte

Eine bemerkenswerte Normalform entsteht aus Abb. 1, wenn man den Grundkegelschnitt j durch eine geeignete Kollineation in einen euklidischen Kreis mit dem Mittelpunkt N verwandelt: Die autopolaren Kegelschnitte h_1 und h_2 werden dabei zu zwei gleichseitigen Hyperbeln, die durch Viertelschwenkung um das gemeinsame Zentrum N miteinander verknüpft sind und, wie man sofort sieht (Abb. 2), auch gegenseitig autopolar sind. Man könnte noch einen nullteiligen Kreis hinzufügen und gelangt so zu

Satz 2: Die beiden Kreise $x^2 + y^2 = \pm c^2$ und die beiden gleichseitigen Hyperbeln $x^2 - y^2 = \pm c^2$ bilden ein Quadrupel von Kegelschnitten, die einander paarweise doppelt berühren. Je drei von ihnen sind autopolar bezüglich des vierten.

Im einzelnen gilt der auf den harmonischen Quadrupeln M_1, M_2, P, Q etc. beruhende

Satz 3: Ist ein Kegelschnitt h autopolar bezüglich eines Kegelschnitts j , dann ist auch j autopolar bezüglich h . Die beiden Kegelschnitte sind durch zwei projektive Spiegelungen miteinander vertauschbar, wobei das Zentrum in einem der beiden Berührungspunkte liegt, während die Achse im anderen berührt.

Eine unmittelbare Folge ist der in Abb. 1 und 2 illustrierte

Satz 4: Bei jedem Tripel wechselseitig autopolarer Kegelschnitte verteilen sich die sechs Berührungspunkte zu je dreien auf vier Gerade und bilden die Ecken eines vollständigen Vierecks.

Für irgendzwei derselben Ebene angehörende C^2 -Kurven, die ein Linienelement gemeinsam haben, ist nach R. Mehmke das Verhältnis der Krümmungen an dieser Berührungsstelle gegenüber Kollineationen invariant. Durch Anwendung einer der beiden in Satz 3 genannten Spiegelungen, die zwei reelle, autopolare Kegelschnitte miteinander vertauschen, ergibt sich so, daß die Mehmkeschen Berührungsinvarianten μ an jeder der beiden (festbleibenden) Berührungsstellen mit ihrem Kehrwert übereinstimmen muß und daher offenbar den Wert $\mu = -1$ hat. Es gilt somit

Satz 5: An jeder der beiden Berührungsstellen zweier reellen, gegenseitig autopolarer Kegelschnitte sind deren Krümmungen entgegengesetzt gleich.

3. Erzeugung autopolarer Kurven

§3.1. Jede bezüglich eines Kegelschnitts j autopolare Kurve $k = \bar{k}$ enthält mit jedem Linienelement (P, q) auch das polare (Q, p) . Durch ein solches Paar von „korrespondierenden“ Linienelementen gehen zufolge Satz 1 zwei autopolare (nicht unbedingt reelle) Kegelschnitte h_1 und h_2 . Bei Variation des Linienelements (P, q) längs k erscheint diese Kurve als Einhüllende zweier Kegelschnittsscharen. Umgekehrt: Greift man aus dem zweiparametrischen System aller zu j autopolarer Kegelschnitte h eine einparametrische Schar heraus, so ist deren neben j auftretende Resthülle k eine autopolare Kurve, sofern sie nicht in zwei selbständige, polareziproke Bestandteile zerfällt; eine solche Möglichkeit wird jedoch weder bei P. Appell [1] noch bei G. Darboux [2] erwogen.

§3.2. Fassen wir den Grundkegelschnitt j nach dem Vorgang von A. Cayley und F. Klein als den Maßkegelschnitt einer projektiven Metrik

auf, so wird in der Ebene eine *nichteuklidische Geometrie* etabliert. Diese ist *hyperbolisch* bei reell-einteiligem j , hingegen *elliptisch* bei nullteiligem j . Hier soll vor allem der erste Fall näher verfolgt werden, wobei jedoch auch Elemente und Gebilde außerhalb des „absoluten“ Kegelschnitts j in Betracht zu ziehen sind.

Der hyperbolische *Abstand* zweier Punkte A, B wird definiert durch

$$\overline{AB} = \frac{1}{2} \ln \delta \quad \text{mit} \quad \delta = (ABI_1 I_2), \quad (3.1)$$

wobei I_1, I_2 die auf der Verbindungsgeraden AB befindlichen absoluten Punkte bezeichnen. Der hyperbolische *Winkel* zweier Geraden a, b ist dual erklärt durch

$$\star ab = \frac{1}{2} \ln \delta \quad \text{mit} \quad \delta = (ab i_1 i_2), \quad (3.2)$$

wobei i_1, i_2 die durch den Schnittpunkt $a \cap b$ gehenden Tangenten von j bedeuten.

Für zwei bezüglich j konjugierte Geraden ergibt sich, bedingt durch das harmonische Doppelverhältnis $\delta = -1$, der Winkelwert $\pi/2 \pmod{\pi}$; sie sind daher als „orthogonal“ anzusprechen. Analog findet man für zwei bezüglich j konjugierte Punkte den Abstand $i\pi/2 \pmod{i\pi}$. Eine projektive Spiegelung σ , die j in sich überführt, ist eine involutorische, hyperbolisch kongruente Abbildung und daher als „hyperbolische Spiegelung“ aufzufassen.

§ 3.3. Aus der Feststellung, daß zwei bezüglich j polare Linienelemente (P, q) und (Q, p) zur Geraden PQ orthogonal sind und den längs ihrer gemeinsamen Normalen gemessenen festen Abstand $\overline{PQ} = i\pi/2$ haben, ergibt sich die Auffassung einer autopolaren Kurve k als „*Kurve konstanter Breite* $i\pi/2$ “. Im besonderen ist auch der autopolare Kegelschnitt h_1 in Abb. 1 ein solches „Gleichdick“; da seine sämtlichen Doppelnormalen (wie PQ) die gemeinsame Länge $i\pi/2$ haben und durch den festen Punkt M_1 gehen, ist h_1 als hyperbolischer *Kreis* mit dem *Mittelpunkt* M_1 zu deuten. Die Doppelnormalen sind durchwegs orthogonal zur Geraden m_1 und werden durch diese — wegen der Spiegelsymmetrie bezüglich m_1 — halbiert; h_1 ist also auch als *Äquidistante* zur „*Mittellinie*“ m_1 im Abstand $i\pi/4$ anzusehen. Mit Rücksicht auf den rechten Winkel zwischen den Geraden p und q ist noch hervorzuheben, daß sämtliche Tangenten des Kreises h_1 die Mittellinie m_1 unter dem konstanten Winkel $\pi/4$ treffen. Zusammenfassend gilt demnach

Satz 6: Jede bezüglich eines reell-einteiligen Kegelschnitts j autopolare Kurve ist im Sinne der auf j gegründeten hyperbolischen Metrik eine Kurve konstanter Breite $i\pi/2$ und Einhüllende zweier einparametrischer Scharen von Kreisen mit dem Radius $i\pi/4$ ¹.

§ 3.4. Eine einparametrische Schar von autopolaren Kreisen h_1 kann etwa durch die Ortslinie l_1 ihrer Mittelpunkte M_1 festgelegt werden; l_1 mag der „*erste Deferekt*“ heißen. Die neben dem absoluten Kegelschnitt j auftretende Resthülle k der Kreisschar erscheint so als *Äquidistante* von l_1 im Abstand $i\pi/4$.

Hieraus folgt eine einfache *Konstruktion* der durch l_1 bestimmten autopolaren Kurve k : Man hat bloß auf der in M_1 auf l_1 errichteten hyperbolischen Normale n die Strecken $\pm i\pi/4$ abzutragen. Hierzu suche man zunächst für die mit m_2 bezeichnete Tangente von l_1 in M_1 den absoluten Pol M_2 auf und lege anschließend aus M_1 und M_2 die Tangentenpaare an j (Abb. 1). Die Diagonalen p und q des so gewonnenen Tangentenvierecks schneiden dann auf der Normalen $n = M_1 M_2$ die Punkte Q und P von k aus, wo sie diese Kurve überdies berühren. Die Konstruktion ist natürlich nur dann reell durchführbar, wenn M_1 und M_2 im Außengebiet von j liegen.

Der in der Konstruktion verwendete Punkt M_2 ist nach Satz 1 der Mittelpunkt des zweiten, die Linienelemente (P, q) und (Q, p) enthaltenden autopolaren Kreises h_2 . Die Ortslinie l_2 aller Zentren M_2 stellt daher den „*zweiten Deferekten*“ von k dar. Die beiden gleichberechtigten Kurven l_1 und l_2 sind polar-reziprok bezüglich j oder schließen sich zu einer autopolaren Kurve zusammen. — Umgekehrt: Sucht man zu einer bekannten autopolaren Kurve $k = \bar{k}$ das Deferentenpaar l_1, l_2 , so erhält man dieses in den Äquidistanten im Abstand $\pm i\pi/4$ zu der als Deferekt benützten Kurve k .

Als einfachstes Beispiel für die Ermittlung einer autopolaren Kurve k durch Annahme eines Deferenten l_1 würde sich die Wahl von l_1 als *Gerade* anbieten. Das Resultat ist jedoch trivial, denn man erhält als Äquidistante k von l_1 im Abstand $i\pi/4$ zufolge § 3.2 nichts anderes als den (autopolaren) *Kreis* h_2 mit der Mittellinie $l_1 = m_2$, eingehüllt von doppelt berührenden, auf l_1 zentrierten Kreisen h_1 mit dem Radius $i\pi/4$ (Abb. 1). Der zweite Deferekt l_2 erscheint auf den absoluten Pol M_2 von $m_2 = l_1$, den Mittelpunkte von $h_2 = k$, eingeschrumpft.

¹ Im Falle eines nullteiligen Grundkegelschnitts j ist die auf ihn gestützte Metrik elliptisch; in Satz 6 wäre dann der Faktor i zu streichen.

§3.5. Zur analytischen Behandlung sei der Grundkegelschnitt j in erlaubter Weise als euklidischer Kreis mit der kartesischen Gleichung

$$x^2 + y^2 = c^2 \quad (3.3)$$

vorausgesetzt. Der Deferent l_1 sei in Parameterform gegeben durch

$$X_1 = X_1(u), \quad Y_1 = Y_1(u). \quad (3.4)$$

Für den zu $M_1(X_1, Y_1)$ gehörigen Punkt $M_2(X_2, Y_2)$ findet man durch Vergleich der die Tangente m_2 von l_1 in M_1 betreffenden Darstellungen

$$\dot{Y}_1 x - \dot{X}_1 y = X_1 \dot{Y}_1 - Y_1 \dot{X}_1, \quad X_2 x + Y_2 y = c^2, \quad (3.5)$$

wobei der Punkt die Ableitung nach u bedeutet, die Koordinaten

$$X_2 = c^2 \dot{Y}_1 / (X_1 \dot{Y}_1 - Y_1 \dot{X}_1), \quad Y_2 = -c^2 \dot{X}_1 / (X_1 \dot{Y}_1 - Y_1 \dot{X}_1). \quad (3.6)$$

Die konjugierte Lage der Punkte M_1 und M_2 bezüglich j (3.3) wird bestätigt durch die Relation

$$X_1 X_2 + Y_1 Y_2 = c^2. \quad (3.7)$$

Die harmonische Lage der gesuchten Punkte $P(x_1, y_1)$ und $Q(x_2, y_2)$ bezüglich M_1 und M_2 erlaubt den Ansatz

$$x_{1,2} = \frac{X_1 \pm \lambda X_2}{1 \pm \lambda}, \quad y_{1,2} = \frac{Y_1 \pm \lambda Y_2}{1 \pm \lambda}. \quad (3.8)$$

Die bezüglich j konjugierte Lage von P und Q führt über $x_1 x_2 + y_1 y_2 = c^2$ auf die Bedingung

$$X_1^2 + Y_1^2 - c^2 = \lambda^2 (X_2^2 + Y_2^2 - c^2). \quad (3.9)$$

Mit einem beliebigen der beiden daraus bestimmaren (gegengleichen) Werte von λ ergibt sich nunmehr durch Eintragung in (3.8) eine Parameterdarstellung des aus dem Deferenten l_1 (3.4) abgeleiteten polar-reziproken Kurvenpaares k, \bar{k} ; es kann sich in einer autopolaren Kurve $k = \bar{k}$ vereinigen (Abb. 3), kann aber auch aus zwei selbständigen, bezüglich j polar-reziproken Individuen k und $\bar{k} \neq k$ bestehen (Abb. 4).

§3.6. Zwecks Illustration der voranstehenden Entwicklungen wählen wir als ersten Deferenten l_1 die durch ihre Polargleichung

$$R = c / \cos m u \quad \text{mit} \quad m > 1 \quad (3.10)$$

beschriebene Ährenkurve [6/II, 108]. Als zweiter Deferent l_2 fungiert sodann die durch ihre Stützfunktion

$$r = c^2 / R = c \cdot \cos m u \quad (3.11)$$

festgelegte Hypozykloide. Die kartesischen Parameterdarstellungen der Deferenten lauten nun

$$X_1 = c \cdot \cos u / \cos m u, \quad Y_1 = c \cdot \sin u / \cos m u \quad (3.12)$$

bzw. — im Einklang mit (3.6) —

$$X_2 = \frac{c}{2} [(m+1) \cos(m-1)u - (m-1) \cos(m+1)u], \quad (3.13)$$

$$Y_2 = -\frac{c}{2} [(m+1) \sin(m-1)u + (m-1) \sin(m+1)u].$$

Die auf die Stützkoordinaten r, u umgeschriebene Formel (3.9) erhält die Gestalt

$$c^2 (c^2 - r^2) = \lambda^2 r^2 (r^2 + r^2 - c^2) \quad (3.14)$$

und liefert im vorliegenden Fall

$$\lambda = \sqrt{\frac{m^2 - 1}{\cos m u}}. \quad (3.15)$$

Mit Benützung dieses Wertes und der Ausdrücke (3.12) und (3.13) läßt sich nun gemäß (3.8) sofort eine Parameterdarstellung des durch das Deferentenpaar l_1, l_2 bestimmten polar-reziproken Kurvenpaares k, \bar{k} explizit hinschreiben.

Algebraische Kurven ergeben sich bei rationalem Modul $m = \alpha/\beta$ (α, β natürliche und teilerfremde Zahlen, $\alpha > \beta$): l_1 hat die Ordnung α , wenn α und β ungerade sind, sonst 2α ; l_2 hat die Ordnung $\alpha + \beta$ bzw. $2(\alpha + \beta)$. Die Äquidistanten k und \bar{k} besitzen stets den Grad $2(\alpha + \beta)$. Bei der Annahme $m = 3$ etwa ergibt sich eine autopolare Oktik $k = \bar{k}$ (Abb. 3). Im Falle $m = 2$ hingegen treten zwei getrennte polar-kongruente Sektiken $k \neq \bar{k}$ auf, die durch Viertelschwenkung um das Zentrum O ineinander übergehen (Abb. 4).

§3.7. Abschließend sei noch vermerkt, daß man die Gleichung des autopolaren hyperbolischen Kreises h_1 mit dem Mittelpunkt $M_1(X_1, Y_1)$ gewinnt, wenn man dessen Koordinaten in §3.5 festhält und die Veränderlichen X_2, Y_2 und λ aus (3.7), (3.8) und (3.9) eliminiert. Dies geschieht am besten durch Bildung der Ausdrücke

$$X_1 x_1 + Y_1 y_1 - c^2 = \frac{X_1^2 + Y_1^2 - c^2}{1 + \lambda} \quad (3.16)$$

und

$$x_1^2 + y_1^2 - c^2 = 2 \frac{X_1^2 + Y_1^2 - c^2}{(1 + \lambda)^2}. \quad (3.17)$$

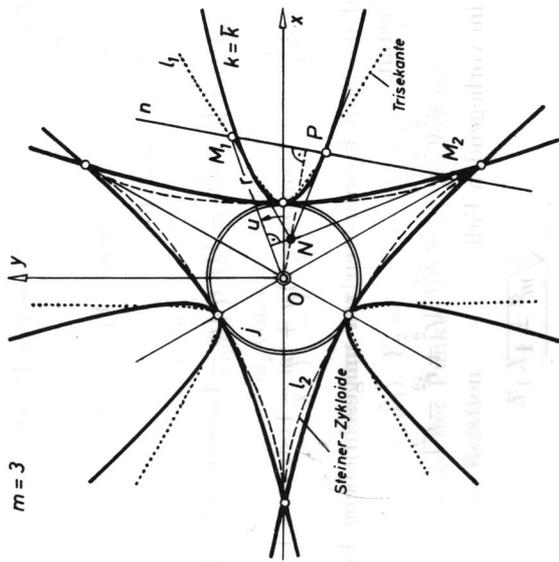


Abb. 3. Von einer Steiner-Zykloide abgeleitete autopolare Kurve 8. Grades

Die noch ausständige Elimination von λ liefert dann — unter Verzicht auf den entbehrlichen Index bei x und y — die gewünschte Gleichung

$$(X_1^2 + Y_1^2 - c^2)(x^2 + y^2 - c^2) = 2(X_1x + Y_1y - c^2)^2. \quad (3.18)$$

Alle hier und in §3.5 entwickelten Formeln behalten auch im nicht normierten Fall ihre Gültigkeit, wenn man x und y als inhomogene projektive Koordinaten deutet.

4. Autopolare W-Kurven

§4.1. Die von S. Lie und F. Klein eingeführten „*W-Kurven*“ [6/II, 178 ff.: 7, 204 ff.] sind die (krummen) Bahnen einparametrischer Kollineationsgruppen Γ . In der Ebene sind vor allem die Fälle zu unterscheiden, ob die drei (gemeinsamen) Fixpunkte A, B, C der Kollineationen $\gamma \in \Gamma$ durchwegs verschieden sind oder nicht. Sämtliche Bahnen einer solchen Gruppe Γ sind untereinander kollinear.

Liegt im ersten Falle ein *reelles Fundamentaldreieck* ABC vor, so kann man durch eine geeignete Kollineation die Fixgerade AB ins Unendliche werfen und die beiden anderen in die Achsen eines kartesischen Koordinatensystems transformieren. Die Gruppe Γ besteht dann aus *Affinitäten* γ , beschrieben durch

$$x = x_0 t, \quad y = y_0 t^m, \quad (4.1)$$

wobei man sich bei passender Bezeichnung der Fixpunkte auf die Annahmen $m > 1$ beschränken darf. Die durch (4.1) mit $x_0, y_0 = \text{const}$ und $x_0 y_0 \neq 0$ erfaßten Bahnkurven werden für $m \neq 2$ als *verallgemeinerte Parabeln* bezeichnet und sind bei irrationalem Modul m transzendent [6/I, 303 ff.]. Sie enden dann an den singulären Stellen $C(t = 0)$ und $B(t = \infty)$, wo sie die Fixgeraden CA ($y = 0$) bzw. BA (Ferngerade) zu gemeinsamen Tangenten haben.

§4.2. Falls eine solche verallgemeinerte Parabel k

$$x = at, \quad y = b t^m \quad \text{mit} \quad a > 0, b > 0, m > 1 \quad (4.2)$$

bezüglich eines Kegelschnitts j autopolar ist, so müssen einander die genannten singulären Elemente entsprechen. Das bedeutet, daß das Fixdreieck ABC ein Poldreieck von j ist, so daß j angesetzt werden kann durch

$$\mu x^2 + \nu y^2 = 1. \quad (4.3)$$

Die Polarkurve \bar{k} von k , eingehüllt von den Polaren

$$\mu at \cdot \bar{x} + \nu b t^m \cdot \bar{y} = 1 \quad (4.4)$$

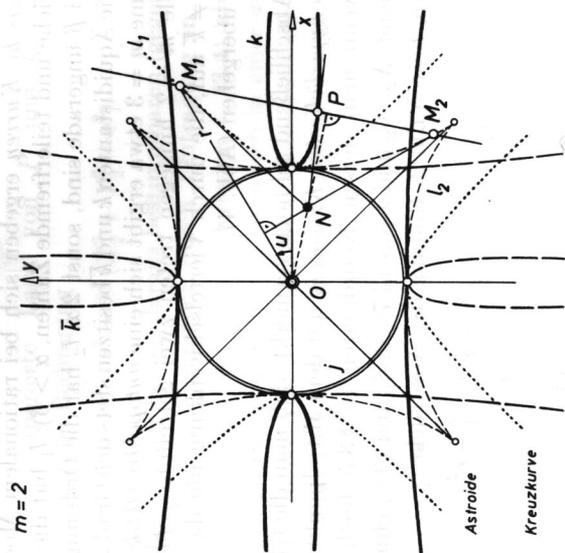


Abb. 4. Von einer Astroide abgeleitetes Paar von polar-kongruenten Kurven 6. Grades

der Punkte $P \in k$, hat daher die — mit Hilfe der Ableitung von (4.4) erhältliche — Darstellung

$$\bar{x} = \frac{m t^{-1}}{(m-1)\mu a} = \bar{a} \cdot \bar{t}, \quad \bar{y} = \frac{t^{-m}}{(1-m)v b} = \bar{b} \cdot \bar{t}^m. \quad (4.5)$$

Hieraus ist zu erkennen, daß \bar{k} ebenfalls Bahnkurve derselben Gruppe Γ und daher *affin* zu k ist.

Für *autopolare Kurven* $k = \bar{k}$ ergibt sich nun über die Identifikationen $\bar{a} = a$ und $\bar{b} = b$ in (4.5) nach Elimination von \bar{t} die Bedingung

$$(1-m)v b^2 = \left(\frac{m-1}{m} \mu a^2 \right)^m. \quad (4.6)$$

Setzt man hierin den rechten Klammerausdruck gleich v , so hat man

$$\mu = \frac{m v}{(m-1)a^2}, \quad v = \frac{-v^m}{(m-1)b^2}. \quad (4.7)$$

womit sich, je nach Wahl von v , gemäß (4.4) eine ganze *Schar von Hyperbeln*

$$\frac{m v x^2}{a^2} - \frac{v^m y^2}{b^2} = m - 1 \quad (4.8)$$

ergibt, bezüglich welcher die Kurve k (4.2) autopolar ist. Korrespondierende Punkte $P(t)$ und $Q(\bar{t})$ sind dabei durch die *involutorische Relation*

$$t\bar{t} = 1/v = \text{const} \quad (4.9)$$

verknüpft. Für $t = \bar{t} = 1/\sqrt{v}$ fallen die Punkte P und Q zusammen, so daß k an der betreffenden Stelle von der Hyperbel j berührt wird. Die einparametrische Hyperbelschar $\{j\}$ ist naturgemäß gegenüber der Gruppe Γ invariant. — Zusammenfassend gilt also (unter Einschuß der algebraischen Fälle)

Satz 7: *Jede verallgemeinerte Parabel k (4.2) ist bezüglich einer beliebigen der koaxialen Hyperbeln j (4.8) autopolar. Korrespondierende Punkte von k sind dabei durch die Involution (4.9) verknüpft, in deren reellem Doppelpunkt k von j berührt wird. Die einparametrische stetige Schar der Hyperbeln j ist gegenüber der die Kurve k erzeugenden Affinitätsgruppe Γ (4.1) invariant.*

Daß die verallgemeinerten Parabeln autopolar sind, hat schon A. Genocchi (1854) bemerkt [5]. Später wies dann M. Fouret [3] darauf hin, daß die W-Kurven die einzigen Kurven sind, die bezüglich

unendlich vieler Kegelschnitte autopolar sind; diese Tatsache beruht auf dem Umstand, daß eine Kurve, die zwei Polaritäten ω_1, ω_2 gestattet, auch die Produktkollineation $\gamma = \omega_1 \omega_2$ verträgt.

§ 4.3. Algebraische Exemplare der verallgemeinerten Parabeln, auch „höhere Parabeln“ genannt, stellen sich dann und nur dann ein, wenn der Modul m eine *rationale Zahl* α/β ist. Der Parameterwechsel $t = u^\beta$ in (4.2) liefert für eine solche Kurve k die rationale Darstellung

$$x = a \cdot u^\beta, \quad y = b \cdot u^\alpha \quad \text{mit } \alpha, \beta \text{ ganz und teilerfremd, } \alpha > \beta \geq 1. \quad (4.10)$$

Hieraus ist zu ersehen, daß k den *Grad* α besitzt und mit den Tangenten in den Fixpunkten $C(u=0)$ und $B(u=\infty)$ α vereinigte Punkte gemein hat; C ist $(\alpha - \beta)$ -facher Punkt, B hingegen β -facher. Mit Ausnahme des uninteressanten Falls der gewöhnlichen Parabel ($\alpha = 2, \beta = 1$) sind also diese beiden Stellen singulär. Die Situation ist mithin im wesentlichen die gleiche wie in § 4.2.

Die Bedingung dafür, daß die höhere Parabel k (4.10) bezüglich des Kegelschnitts j (4.3) autopolar ist, lautet jetzt

$$\left(\frac{\beta - \alpha}{\beta} v b^2 \right)^\beta = \left(\frac{\alpha - \beta}{\alpha} \mu a^2 \right)^\alpha. \quad (4.11)$$

Sie ist stets erfüllbar durch

$$\mu = \frac{\alpha v^\beta}{(\alpha - \beta) a^2}, \quad v = \frac{\beta w^\alpha}{(\beta - \alpha) b^2} \quad (4.12)$$

und liefert so das System der Kegelschnitte j :

$$\frac{\alpha v^\beta x^2}{a^2} - \frac{\beta w^\alpha y^2}{b^2} = \alpha - \beta. \quad (4.13)$$

Korrespondierende Punkte $P(u)$ und $Q(\bar{u})$ von k sind jeweils verknüpft durch die Relation

$$u \bar{u} = 1/w = \text{const}. \quad (4.14)$$

In den Doppelpunkten $u = \bar{u} = \pm 1/\sqrt{w}$ wird k von j berührt.

Im Gegensatz zum transzendenten Fall in § 4.2, wo der Scharparameter v wegen des irrationalen Exponenten m auf positive Werte zu beschränken war, darf jetzt der Scharparameter w auch negative Werte annehmen. Das Kegelschnittssystem $\{j\}$ besteht daher bei ungeradem α und β nunmehr aus zwei Scharen von Hyperbeln ($w > 0$ und $w < 0$), bei geradem α aus einer Schar von Hyperbeln ($w > 0$) und einer Schar von multiteiligen Ellipsen ($w < 0$), und bei geradem β (vgl. Abb. 5) aus einer

Man ersieht daraus, daß \bar{k} eine zu k gleichsinnig-kongruente Spirale ist. Als Bedingung für die *Autopolarität* $k = \bar{k}$ ergibt sich schließlich über $\bar{b} = b$ in (4.20) mit Beachtung von (4.20) die Form³

$$c^2 = b^2 e^{\alpha(n\pi - \alpha)} \sin \alpha, \tag{4.22}$$

welche mit c die Hyperbel j (4.18) festlegt. Die Koppelung korrespondierender Punkte $P(u)$ und $Q(\bar{u})$ von k wird durch die Relation (4.21) geregelt. An der selbststentsprechenden Stelle

$$u = \bar{u} = \frac{1}{2} (n\pi - \alpha) \tag{4.23}$$

findet wieder Berührung zwischen j und k statt (Abb. 6). — Wir haben damit

Satz 9: *Jede logarithmische Spirale ist autopolar bezüglich aller konzentrischen gleichseitigen Hyperbeln, die sie berühren*³.

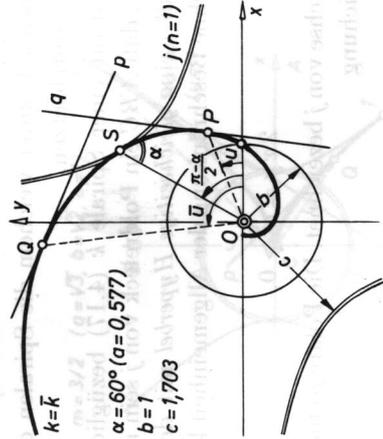


Abb. 6. Autopolarität der logarithmischen Spirale

§4.6. Ausständig ist nunmehr noch der Fall, daß zwei Ecken des Fundamentaldreiecks ABC zusammenrücken⁴. Wirft man durch eine

³ Bei Polarisation einer logarithmischen Spirale an einem konzentrischen Kreis geht sie in ein Spiegelbild über.

⁴ Die ebenfalls bestehende Möglichkeit des Zusammenrückens aller drei Fixpunkte kann hier außer Betracht bleiben, denn sie führt bloß auf Kegelschnitte als W -Kurven, deren Autopolarität schon in Kap. 2 erörtert worden ist.

geeignete Kollineation die Fixpunkte $A = C$ und B in orthogonalen Richtungen ins Unendliche, so kann die dann aus *Affinitäten* γ bestehende Gruppe Γ beschrieben werden durch

$$x = x_0 + t, \quad y = y_0 e^{nt}. \tag{4.24}$$

Die mit $x_0, y_0 = \text{const}, y_0 \neq 0$ erfaßten Bahnkurven sind dann untereinander kongruente *Exponentialkurven*, die durchwegs ähnlich sind zu der durch

$$x = u, \quad y = e^u \tag{4.25}$$

erklärten Normalform.

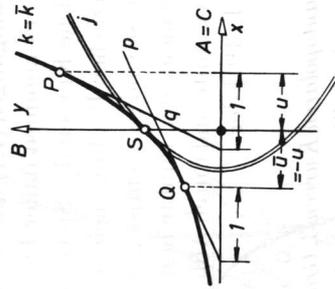


Abb. 7. Autopolarität der Exponentialkurve

Falls diese Kurve k autopolar bezüglich eines Kegelschnitts j ist, so müssen einander die Enden $A(u = -\infty)$ und $B(u = +\infty)$ polar entsprechen; das bedeutet, daß j nur eine zur Asymptote $y = 0$ symmetrische *Parabel* sein kann. Man prüft leicht nach, daß eine solche Parabel j durch

$$y^2 = 2x + 1 \tag{4.26}$$

gegeben ist, denn die von den Polaren p

$$e^u \bar{y} = \bar{x} + u + 1 \tag{4.27}$$

eingehüllte *Polarcurve* \bar{k} von k ist auf Grund ihrer Darstellung

$$\bar{x} = -u = \bar{u}, \quad \bar{y} = e^{-u} = e^{\bar{u}} \tag{4.28}$$

identisch mit k . Korrespondierende Punkte $P(u)$ und $Q(\bar{u})$ sind verknüpft durch die Involution

$$u + \bar{u} = 0, \tag{4.29}$$

deren zu $u = \bar{u} = 0$ gehöriger Doppelpunkt $S(1,1)$ wieder eine Berührungsstelle von j mit k darstellt (Abb. 7). Weitere Parabeln mit gleichen Eigenschaften gehen aus j (4.26) durch Ausübung der automorphen Affinitäten γ von k hervor. — Es gilt mithin

Satz 10: *Jede Exponentialkurve ist autopolar bezüglich aller sie berührenden Parabeln, welche die Kurvenasymptote zur Achse haben.*

5. Autopolare Kubiken

§5.1. Bei der Frage nach *autopolaren Kurven 3. Grades* entnimmt man zunächst aus den Bedingungen (1.1) und (1.2) mit $n = 3$, daß $d = 0$ und $r = 1$ zu nehmen ist; es kommen daher bloß *gespitzte Kubiken* in Betracht. Haben zwei solche Kurven das Spitzenelement, das Wendelement sowie einen zusätzlichen Punkt gemein, was für $6 + 3 + 1 = 10$ gemeinsame Punkte zählt, so sind sie identisch, denn zwei verschiedene Kubiken können bloß 9 gemeinsame Punkte besitzen. Hieraus folgt im Hinblick auf das in §4.3 erwähnte und durch Abb. 5 illustrierte Beispiel der *Neilschen Parabel* [6/I, 310] der

Satz 11: *Die einzigen autopolaren Kurven 3. Grades sind die gespitzten Kubiken. Sie sind untereinander kollinear und insbesondere auch kollinear zur Neilschen Parabel $y^2 = x^3$, zur kubischen Parabel $y = x^3$ und zur kubischen Hyperbel $xy^2 = 1$. Als W-Kurve ist jede gespitzte Kubik autopolar bezüglich einer einparametrischen Schar von doppelt berührenden Kegelschnitten.*

§5.2. Als metrisch auszeichneter Repräsentant kann auch die *bezüglich eines Kreises autopolare zirkulare Kubik* angesehen werden. Um eine solche zu finden, mag man etwa von einer Neilschen Parabel k' und einem der Kegelschnitte j' ausgehen, bezüglich dessen sie autopolar ist; wirft man dann zwei gemeinsame, konjugiert-imaginäre Punkte I', J' von j' und k' durch eine Kollineation κ in die absoluten Kreispunkte, so geht k' in eine Kurve k der gewünschten Art über.

Beginnen wir also fürs erste mit der in Abb. 5 dargestellten, bezüglich des Einheitskreises j_1 autopolaren Neilschen Parabel k' :

$$x' = au^2, \quad y' = bu^3 \quad \text{mit} \quad a = \sqrt{3}, \quad b = \sqrt{2}. \quad (5.1)$$

Sie berührt den Kreis j_1 (j in Abb. 5) in den beiden durch $u = \pm i$ bestimmten Punkten $J_1(-a, -ib), J_1(-a, ib)$. Eine brauchbare Kol-

lineation κ_1 (mit der Verschwindungsgeraden $x = -a$) ist

$$x = \frac{bx'}{x' + a}, \quad y = \frac{ay'}{x' + a}. \quad (5.2)$$

Sie verwandelt die semikubische Parabel k' (5.1) in die durch

$$x = \frac{bu^2}{u^2 + 1}, \quad y = \frac{bu^3}{u^2 + 1} \quad (5.3)$$

dargestellte zirkulare Kubik k , während der Kreis j_1 ($x'^2 + y'^2 = 1$)

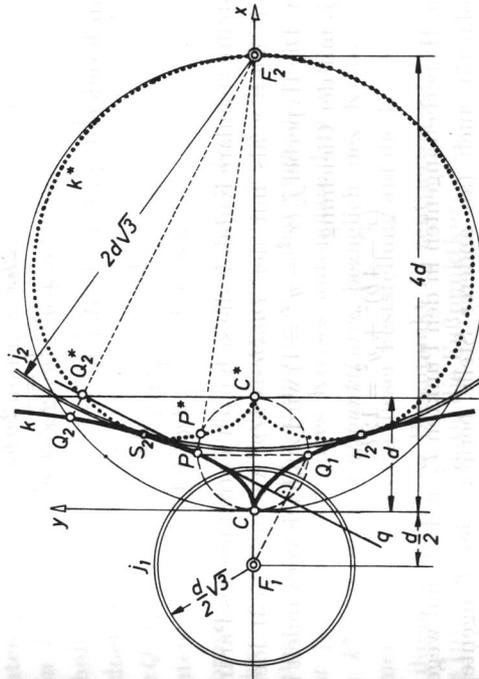


Abb. 8. Autopolaritäten der Kissoide des Diokles

wieder in einen Kreis j_1 transformiert wird, nämlich

$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{3}{4}b^2. \quad (5.4)$$

Der mit $u = \operatorname{tg} \varphi$ zu bewerkstelligende Übergang zu Polarkoordinaten liefert für k die Polargleichung

$$r = b \frac{\sin^2 \varphi}{\cos \varphi} = b \left(\frac{1}{\cos \varphi} - \cos \varphi \right), \quad (5.5)$$

aus der zu ersehen ist, daß k die wohlbekannte *Kissoide des Diokles* ist [6/I, 368].

Die gemeinsamen Tangenten an den beiden Berührungsstellen I_1, J_1 von j_1 und k' gehen vermöge der Kollineation κ_1 (5.2) in die

gemeinsamen (isotropen) Asymptoten von j_1 und k über. Das bedeutet, daß der Mittelpunkt $F_1(-b/2, 0)$ des Kreises j_1 (5.4) den *außerordentlichen Brennpunkt* der Kissoide k darstellt (Abb. 8).

§ 5.3. Verwenden wir anstelle des in § 5.2 benutzten, die Neilsche Parabel k' (5.1) doppelt berührenden Einheitskreises j_1 die doppelt berührende Einheitshyperbel j_2 (j_1 in Abb. 5), so hat diese mit k' zwei zu $u^2 = -1/2$ gehörige, konjugiert-imaginäre Schnittpunkte $I_2'(-a/2, -i/2), J_2'(-a/2, i/2)$. Eine brauchbare Kollineation κ_2 , die sie in die absoluten Kreispunkte überführt, ist gegeben durch

$$x = \frac{2bx'}{2x' + a}, \quad y = \frac{2abx'}{2x' + a}. \quad (5.6)$$

Sie transformiert k' (5.1) in die durch

$$x = \frac{2bu^2}{2u^2 + 1}, \quad y = \frac{4u^3}{2u^2 + 1}. \quad (5.7)$$

dargestellte zirkuläre Kubik k , die sich nach Vornahme des Parameterwechsels $bu = v$ als mit der *Dioklesischen Kissoide* (5.3) identisch erweist. Die Hyperbel $j_2'(x'^2 - y'^2 = 1)$ wird zugleich verwandelt in den Kreis j_2 mit der Gleichung

$$(x - 4b)^2 + y^2 = 12b^2. \quad (5.8)$$

Die Hyperbeltangenten in den Punkten I_2' und J_2' sind wegen der Autopolarität auch (an anderer Stelle berührende) Tangenten der Neilschen Parabel k' . Sie werden durch die Kollineation κ_2 in isotrope Tangenten der Kissoide k übergeführt; demzufolge ist der Mittelpunkt $F_2(4b, 0)$ des Kreises j_2 (5.8) der *ordentliche Brennpunkt* von k (Abb. 8). Die (reellen) Berührungspunkte S_2 und T_2 von j_2 mit k rühren von den Berührungspunkten S_2' und T_2' von j_2' mit k' her (S und T in Abb. 5) und sind wie diese gemäß (4.14) durch $u = \pm 1$ bestimmt; sie haben daher die Koordinaten $x = 2b/3, y = \mp 4/3$. — Wir vermerken den wohl schon bekannteren

Satz 12: Die Kissoide des Diokles ist autopolar bezüglich jener beiden sie doppelt berührenden Kreise, die im außerordentlichen oder ordentlichen Brennpunkt zentriert sind.

§ 5.4. Die Parameterwerte u, \bar{u} korrespondierender Punkte P, Q der Kissoide k (5.3) bzw. (5.7) sind — wie schon bei der zugrunde gelegten Neilschen Parabel k' (5.1) — zufolge (4.14) im ersten Fall ($w = -1$)

gekoppelt durch $u\bar{u} = -1$, im zweiten Fall ($w = 1$) durch $u\bar{u} = 1$. Mit Rücksicht auf die im ersten Fall durch die Substitution $u = \operatorname{tg} \varphi$ gewonnene Polargleichung (5.5) der Kissoide k bedeutet die maßgebende Koppelbedingung $u\bar{u} = -1$, daß bei der Autopolarität bezüglich des Kreises j_1 (5.4) korrespondierende Punkte P, Q von k aus der Spitze C unter rechtem Winkel erscheinen.

W. Gaedecke [4] hat einst eine auf die Kissoide k gestützte *Punkt-Geraden-Transformation* $\tau: G \rightarrow g$ betrachtet, welche durch die folgende (zunächst nicht mit Lineal und Zirkel vollziehbare) Vorschrift erklärt war: Man lege aus dem zu transformierenden Punkt G die drei Tangenten q_i ($i = 1, 2, 3$) an k und unterwerfe die zu den Berührungspunkten P_i zielenden Spitzenstrahlen einer Viertelschwenkung; ihre Restschnittpunkte Q_i mit k liegen auf einer Geraden g , die dem Punkt G zugeordnet wird. Nach der vorhin gemachten Bemerkung sind die Punkte Q_i offensichtlich die korrespondierenden der P_i , also die Pole der Tangenten q_i bezüglich j_1 , was ihre kollineare Lage erklärt. Die Transformation τ ist also nichts anderes als die *Polarität am Kreise* j_1 . Die zahlreichen Transformationsbeispiele, die der Autor ohne diese Einsicht anschließt, werden damit unmittelbar evident.

Für jede bezüglich eines Kreises autopolare Kurve k fällt ihre Inverse k^* mit ihrer *Fußpunktkurve* bezüglich des Kreisenzentrums zusammen. Bei Anwendung dieser Feststellung auf die Kissoide k und den in ihrem ordentlichen Brennpunkt F_2 zentrierten Kreis j_2 erhält man als Inverse — gleichzeitig die Fußpunktkurve bezüglich F_2 — eine Quartik k^* mit absoluten Spitzen, die überdies eine reelle Spitze aufweist, also eine *Kardioide* ist (Abb. 8).

6. Autopolare Quartiken mit einfachen Singularitäten

§ 6.1. Bei der Frage nach *autopolaren Kurven 4. Grades* entnimmt man zunächst aus den Bedingungen (1.1) und (1.2) mit $n = 4$, daß $d = 1$ und $r = 2$ zu nehmen ist; es kommen demnach nur *zweispitzige Quartiken mit einem zusätzlichen Doppelpunkt* in Betracht, solange keine höheren Singularitäten zugelassen werden. Neben Realitätsunterscheidungen werden anschließend noch die Grenzfälle mit zusammengerückten Singularitäten zu berücksichtigen sein (Kap. 7). Sämtliche auftretenden Kurven sind *rational*.

Wir beginnen mit dem Fall zweier *konjugiert-imaginären Spitzen*. Wirft man dieselben durch eine geeignete Kollineation in die absoluten Kreispunkte, so entsteht bekanntlich eine *Pascalschnecke* [6/I, 147 ff.],

die als Normalform dienen soll. Auf Grund ihrer Erzeugung als Kreiskonchoide hat dieselbe die einfache Polargleichung

$$r = a + b \cos \varphi \quad \text{mit } a > 0, b > 0, \quad (6.1)$$

wobei durch $a \neq b$ die (mit einer zusätzlichen Spitze behaftete) Kardioide auszuschließen ist. Die kartesische Darstellung in Parameterform lautet

$$x = a \cos \varphi + \frac{b}{2}(1 + \cos 2\varphi), \quad y = a \sin \varphi + \frac{b}{2} \sin 2\varphi, \quad (6.2)$$

parameterfrei hingegen

$$(x^2 + y^2 - b x)^2 = a^2 (x^2 + y^2). \quad (6.3)$$

Falls eine solche Pascalschnecke k autopolar bezüglich eines Kegelschnitts j ist, so müssen die absoluten Spitzen I, \bar{I} den Wendetangenten i, \bar{i} entsprechen, ferner die Wendepunkte W, \bar{W} den Spitzentangenten w, \bar{w} : $x \pm iy = b/2$. Naturgemäß ist $W \neq \bar{W}$ vorauszusetzen, also die Pascalschnecke mit Flachpunkt ($a = 2b$) auszuschließen. Mit k wird auch j die Spiegelung an der x -Achse gestatten.

Mit der Zuordnung der Linienelemente (I, w) und (W, i) ist bereits ein Poldreieck eines in Betracht kommenden Kegelschnitts j_1 bekannt, der dann durch die notwendige Zuweisung der x -Achse als Polare des Fernpunkts der y -Achse eindeutig festgelegt ist. Die Polarkurve der Pascalschnecke k bezüglich j_1 ist offensichtlich eine gleichartige Quartik \bar{k}_1 , die mit k die beiden Spitzenelemente und die beiden Wendeelemente gemein hat. Dies zählt für $2 \cdot 6 + 2 \cdot 3 = 18 > 16$ gemeinsame Punkte, was $\bar{k}_1 = k$ bedingt. — Mit der alternativen Zuordnung der Elemente (\bar{I}, \bar{w}) und (W, i) gelangt man zu einem zweiten brauchbaren Kegelschnitt j_2 . Damit hat man, zunächst noch ohne Spezifizierung, den

Satz 13: Jede Pascalschnecke mit getrennten Wendepunkten ist doppelt autopolar.

§ 6.2. Bei Beschränkung auf reelle Polaritäten wird noch zu fordern sein, daß die Wendetangenten i, \bar{i} der Pascalschnecke k (6.2) konjugiert-imaginär sind. Mit Benützung der Ableitungen

$$\dot{x} = -a \sin \varphi - b \sin 2\varphi, \quad \dot{y} = a \cos \varphi + b \cos 2\varphi \quad (6.4)$$

findet man zunächst für beliebige Tangenten von k die Gleichung

$$(a \cos \varphi + b \cos 2\varphi)x + (a \sin \varphi + b \sin 2\varphi)y = (a + b \cos \varphi)^2. \quad (6.5)$$

Für eine Wendetangente muß diese Gleichung zu ihrer Ableitung

äquivalent sein, was auf die Bedingung

$$a^2 + 3ab \cos \varphi + 2b^2 = 0 \quad (6.6)$$

führt. Die dadurch bestimmten Werte

$$\cos \varphi = -\frac{a^2 + 2b^2}{3ab}, \quad \sin \varphi = \frac{\pm i}{3ab} \sqrt{(a^2 - b^2)(a^2 - 4b^2)} \quad (6.7)$$

lehren, daß die eingangs erhobene Realitätsforderung in den beiden nachstehenden Fällen erfüllt ist:

(i) $b > a > 0$. Die Pascalschnecke k (6.1) ist verschlungen und hat im Ursprung einen reellen Knoten.

(ii) $a > 2b > 0$. Die Pascalschnecke ist streng oval und hat im Ursprung einen isolierten Doppelpunkt.

Wir vermerken noch die durch Eintragen der Werte aus (6.7) in (6.2) erhältlichen Koordinaten der Wendepunkte W, \bar{W} :

$$x_{1,2} = \frac{2(b^2 - a^2)}{9a^2b} (a^2 + 2b^2), \quad (6.8)$$

$$y_{1,2} = \frac{\pm 2i(a^2 - b^2)}{9a^2b} \sqrt{(a^2 - b^2)(a^2 - 4b^2)}.$$

Der die absoluten Spitzen tragenden Ferngeraden entspricht als Pol der (x -Achse angehörende) Schnittpunkt der beiden Wendetangenten. Er stellt den gemeinsamen Mittelpunkt C der beiden Kegelschnitte j_1 und j_2 dar; für seine Abszisse $x = c$ findet man über (6.5) mit Hilfe von (6.7) den Wert

$$c = \frac{(a + b \cos \varphi)^2}{a \cos \varphi + b \cos 2\varphi} = 4b \frac{b^2 - a^2}{a^2 + 8b^2}. \quad (6.9)$$

Die Kegelschnitte j_1, j_2 können mithin angesetzt werden durch

$$\frac{(x - c)^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} = 1. \quad (6.10)$$

Aus der für j_1 bestehenden Beziehung, daß die Polare des Wendepunktes $W(x_1, y_1)$ die Spitzentangente w ($x + iy = b/2$) ist, findet man durch Koeffizientenvergleich über

$$\frac{x_1 - c}{2m^2} = \frac{y_1}{2in^2} = \frac{c(x_1 - c) + m_1^2}{bm_1^2} \quad (6.11)$$

für die Halbachsenquadrate die Ausdrücke

$$m_1^2 = \frac{1}{2}(b-2c)(x_1-c) = (b^2-a^2) \left(\frac{a^2-4b^2}{a^2+8b^2} \right), \tag{6.12}$$

$$n_1^2 = \frac{1}{2i}(b-2c)y_1 = \frac{a^2-b^2}{a^2+8b^2} \sqrt{(a^2-b^2)(a^2-4b^2)}.$$

Analog ergeben sich für j_2 die Werte $m_2^2 = m_1^2$, $n_2^2 = -n_1^2$, j_1 und j_2 sind also wechselseitig autopolar. Im Falle der verschlungenen Pascal-

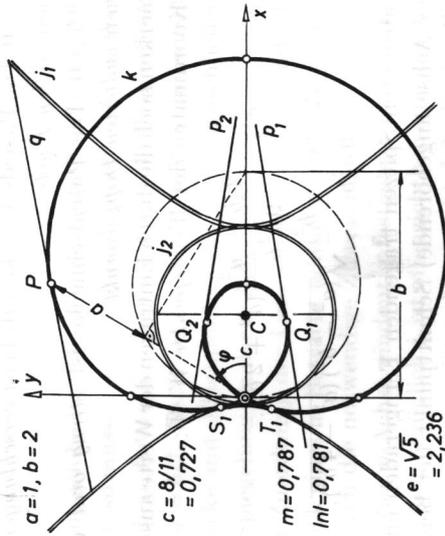


Abb. 9. Autopolaritäten einer verschlungenen Pascalschnecke

schnecke ($b > a$) ist j_1 eine Hyperbel, die ihre reellen Scheitel auf der x -Achse hat, j_2 hingegen eine Ellipse mit denselben Scheiteln (Abb. 9). Für die ovale Pascalschnecke ($a > 2b$) ist j_1 eine Hyperbel mit den imaginären Scheiteln auf der x -Achse und j_2 eine nullteilige Ellipse.

Zur Kontrolle bestätigt man leicht, daß der Doppelpunkt $(0,0)$ polar zur Doppeltangente $x = -a^2/4b$ liegt. — Als Ergänzung zu Satz 13 sei festgehalten der

Satz 14: *Reelle Autopolarität der Pascalschnecke (6.2) besteht nur beim verschlungenen Typ ($b > a$) und beim streng ovalen Typ ($a > 2b$). Die betreffenden Grundkegelschnitte j_1 und j_2 sind koaxial und wechselseitig autopolar; ihre Gleichungen (6.10) sind bestimmt durch die Mittelpunktsabszisse c (6.9) und die Halbachsenquadrate $m^2 = m_1^2$, $n^2 = \pm n_1^2$ (6.12).*

§ 6.3. Zur analytischen Erfassung der Zuordnung entsprechender Linienelemente (P, q) und (Q, p) der Pascalschnecke k (5.2) bedenke man, daß zu einem beliebig gewählten Wert $u = \cos \varphi$ zwei bezüglich der x -Achse spiegelbildliche Punkte von k gehören. Die zu den betreffenden Linienelementen bezüglich eines der beiden Grundkegelschnitte j_1 oder j_2 polaren Elemente liegen ebenfalls symmetrisch zur x -Achse und sind daher durch einen eindeutig bestimmten Wert $\bar{u} = \cos \bar{\varphi}$ gekennzeichnet. Zwischen den solcherart gekoppelten Werten u und \bar{u} wird mithin eine eineindeutige und involutorische Relation der Form

$$u\bar{u} + A(u + \bar{u}) + B = 0 \tag{6.13}$$

bestehen. Um die Konstanten A und B dieser Involution zu ermitteln, genügt es, zwei verschiedene Paare polarer Elemente von k zu betrachten. Mit Benützung der Scheitelelemente ($u = 1, \bar{u} = -1$) erhält man zunächst $B = 1$. Zum Doppelpunkte $r = 0$, zufolge (6.1) gekennzeichnet durch $u = -a/b$, gehört die Doppeltangente mit $\bar{u} = -a/2b$, was aus (6.4) mit $\dot{x} = 0$ zu entnehmen ist. Hieraus folgt dann $A = (a^2 + 2b^2)/3ab$. Die Koppelung (6.13) lautet mithin

$$3ab(u\bar{u} + 1) + (a^2 + 2b^2)(u + \bar{u}) = 0, \tag{6.14}$$

und zwar unabhängig davon, ob die Polarität an j_1 oder an j_2 zugrunde gelegt wird.

Eine Trennung der beiden Polaritäten wird erst erreicht, wenn man zu einer rationalen Darstellung der Pascalschnecke mittels des Parameterwechsels $t = \operatorname{tg}(\varphi/2)$ übergeht. Über $u = (1 - t^2)/(1 + t^2)$ gelangt man so von (6.14) zu den beiden Koppelungen

$$t\bar{t} = \pm e \quad \text{mit} \quad e^2 = \frac{a+b}{a-b} \cdot \frac{a+2b}{a-2b} > 0. \tag{6.15}$$

Setzt man $e > 0$ fest, so gilt das obere Vorzeichen für die Polarität an j_1 , das untere für j_2 .

Die selbststentsprechenden Werte $t = \bar{t} = \pm \sqrt{e}$ liefern dann über $\cos \varphi = (1 - e)/(1 + e)$ zwei reelle Berührungspunkte der Pascalschnecke k mit der Hyperbel j_1 , während $t = \bar{t} = \pm i\sqrt{e}$ zu konjugiert-imaginären Berührungspunkten von k mit der (ein- oder nullteiligen) Ellipse j_2 führt (Abb. 9).

§ 6.4. Für die in § 6.1 vorläufig zurückgestellten Quartiken mit zwei reellen Spitzen und einem zusätzlichen Doppelpunkt mögen als (durch Kollineationen stets erreichbare) Normalformen jene Kurven dienen,

Grundkegelschnitte j_1, j_2 sich mittels (6.19) aus (6.10) mit

$$(x + 8)^2 \mp 5\sqrt{5}y^2 = 75 \tag{6.21}$$

ergeben, erhellt manche Eigenschaften. So etwa liegen (mit den Bezeichnungen in Abb. 11) die Wendepunkte Q_1, Q_2 von k auf der Scheiteltangente, weil sich die Spitztangente im Scheitel Z schneiden. Vermerkt sei ferner, daß sich der (isolierte) Doppelpunkt von k im Fernpunkt der x -Achse befindet, so daß die (isolierte) Doppeltangente $x = -8$ die Nebenachse der Kegelschnitte j_1 und j_2 angibt.

7. Autopolare Quartiken mit höheren Singularitäten

§ 7.1. Wir wenden uns vorerst jenem Grenzfall autopolarer Quartiken zu, in welchem die beiden Wendetangenten zu einer *Flachtangente* (mit vierpunktiger Berührung) zusammenrücken, und gleichzeitig die beiden Rückkehrpunkte zu einem „*Spitzpunkt*“; dies ist ein dreifacher Punkt mit vereinigttem Tangententripel, wie ihn etwa die Kurve $x^4 = y^3$ im Ursprung aufweist. Man zeigt unschwer — durch Überlegungen von der Art der später in § 7.3 angestellten —, daß als kollinear stets erreichbare Normalform die *biquadratische Parabel* $y = x^4$ dienen kann; sie hat den Flachpunkt im Ursprung und den Spitzpunkt im Fernpunkt der y -Achse.

Auf Grund von Kap. 4 sind die Quartiken dieser Art offenbar *W-Kurven* und infolgedessen *autopolar bezüglich einer einparametrischen Schar von Kegelschnitten* mit einem gemeinsamen Poldreieck (Satz 8). In den einschlägigen Formeln von § 4.3 ist $\alpha = 4$ und $\beta = 1$ zu nehmen.

§ 7.2. Um ein Beispiel für einen *zirkularen* Repräsentanten zu erhalten, gehen wir aus von der Normalform

$$x' = u, \quad y' = u^4 \tag{7.1}$$

und werfen irgendzwei konjugiert-imaginäre Punkte I', J' dieser biquadratischen Parabel k' durch eine Kollineation κ in die absoluten Punkte I, J . Wir wählen etwa die zu $u = e^{\pm i\pi/4}$ gehörigen Punkte I', J' mit den Koordinaten $x' = (1 \pm i)/\sqrt{2}, y' = -1$ und verwenden die Kollineation

$$x = \frac{x' + y'\sqrt{2}}{y' + 1}, \quad y = \frac{x' + y'\sqrt{2}}{y' + 1} \tag{7.2}$$

Sie liefert die monozirkulare Quartik k mit der Darstellung

$$x = \frac{u}{1 + u^4}, \quad y = \frac{u + \sqrt{2}u^4}{1 + u^4} \tag{7.3}$$

Diese Kurve k ist schief-symmetrisch bezüglich der y -Achse, auf der sich der Flachpunkt C ($u = 0$) im Ursprung und der Spitzpunkt B ($u = \infty$) an der Stelle $y = \sqrt{2}$ befinden (Abb. 12).

Aus der Schar der Kegelschnitte j' , bezüglich derer die Ausgangskurve k' (7.1) autopolar ist, und die gemäß (4.13) durch

$$4wx^2 - w^4y^2 = 3 \tag{7.4}$$

gegeben sind, ergeben sich mittels der Umkehrformeln von (7.2) die für

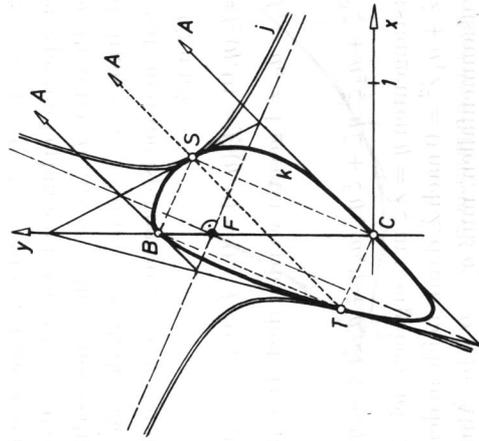


Abb. 12. Zirkulare W-Kurve 4. Grades

die Autopolaritäten von k (7.3) maßgebenden Kegelschnitte j mit

$$8wx^2 - w^4(x - y)^2 = 3(x - y + \sqrt{2})^2. \tag{7.5}$$

In Abb. 12 wurde die zu $w = 1$ gehörende gleichseitige Hyperbel j eingetragen. Sie hat ihren Mittelpunkt im Brennpunkt F ($0, 3\sqrt{2}/4$) von k und berührt k in den durch $u = \pm 1$ bestimmten Punkten S, T ; ihre Asymptoten sind gegen die x -Achse unter den Winkeln $3\pi/8$ und $-\pi/8$ geneigt⁶.

⁶ Man stellt unschwer fest, daß die Asymptoten parallel zu den Seiten des k eingeschriebenen Rechtecks $CSBT$ verlaufen und daher mit den Diagonalen des an diesen Stellen berührenden Tangententrapezes zusammenfallen.

§7.3. Der andere Grenzfall der in §6.1 genannten Quartiken entsteht, wenn eine Spitze mit dem Doppelpunkt zu einer *Schnabelspitze* verschmilzt. Unter Verwendung homogener projektiver Koordinaten ξ, η, ζ , die sich auf jenes Fundamentaldreieck stützen, das von dem Schnabelelement und dem verbliebenen Rückkehrelement aufgespannt wird, sei die Gleichung der Quartik k angesetzt mit

$$f_0 \xi^4 + f_1 \xi^3 + f_2 \xi^2 + f_3 \xi + f_4 = 0, \tag{7.6}$$

wobei die $f_j = f_j(\eta, \zeta)$ Formen j -ten Grades in η und ζ bezeichnen. Die Schnabelspitze sei in $B(0:1:0)$ mit der Tangente $\zeta = 0$ angenommen, die gewöhnliche Spitze in $C(0:0:1)$ mit der Tangente $\eta = 0$ (Abb. 14).

Die die beiden Spitzen verbindende Gerade $\xi = 0$ darf k nur in den doppelt zählenden Punkten B und C treffen; dies bedingt $f_4 = a_4 \eta^2 \zeta^2$. Damit die Schnabeltangente $\zeta = 0$ mit k bloß den vierfach zählenden Punkt B gemein hat, und die Spitzentangente $\eta = 0$ nur den dreifach zählenden Punkt C , muß

$$f_1(\eta, 0) = f_2(\eta, 0) = f_3(\eta, 0) = 0, \quad f_2(0, \zeta) = f_3(0, \zeta) = 0 \tag{7.7}$$

gelten, während $f_0 = a_0 = 1$ gesetzt werden darf. Damit erhält (7.6) die Bauart

$$\xi^4 + a_1 \xi^3 \zeta + a_2 \xi^2 \eta \zeta + \xi \eta \zeta (a_3 \eta + a_3' \zeta) + a_4 \eta^2 \zeta^2 = 0. \tag{7.8}$$

Die Doppelpunktstangenten $\eta = \lambda \xi$ in C ergeben sich durch Auflösung der Gleichung $a_3' \lambda + a_4 \lambda^2 = 0$ nach λ ; damit beide in der Spitzentangente $\eta = 0$ ($\lambda = 0$) zusammenfallen, muß $a_3' = 0$ sein. Ähnlich findet man die Doppelpunktstangenten $\zeta = \mu \xi$ in B durch Auflösung der Gleichung $a_3 \mu + a_4 \mu^2 = 0$ nach μ , so daß $a_3 = 0$ zu verlangen ist. Damit ist aber noch nicht der Charakter von B als Schnabelspitze gewährleistet, denn eine Quartik

$$\xi^4 + a_1 \xi^3 \zeta + a_2 \xi^2 \eta \zeta + a_4 \eta^2 \zeta^2 = 0 \tag{7.9}$$

könnte in B auch bloß eine Selbstberührung aufweisen. Um diese Möglichkeit auszuschließen, ist es notwendig, daß bei der Bestimmung der Restschnittpunkte mit einer durch B gehenden Hilfsgeraden $\zeta = \mu \xi$ — was auf die Auflösung der quadratischen Gleichung

$$(1 + a_1 \mu) \xi^2 + a_2 \mu \zeta \eta + a_4 \mu^2 \eta^2 = 0 \tag{7.10}$$

nach η/ξ hinausläuft — ein Realitätswechsel eintritt, wenn μ durch Null geht; das erfordert nun $4a_4 = a_2^2$. Damit erhält dann (7.9) schließlich die endgültige Gestalt

$$\left(\xi^2 + \frac{1}{2} a_2 \eta \zeta \right)^2 + a_1 \xi^3 \zeta = 0. \tag{7.11}$$

Setzt man ferner $\zeta = 1$ und deutet man ξ und η als inhomogene kartesische Koordinaten, so erkennt man, daß sämtliche Quartiken mit einer Schnabelspitze und einer gewöhnlichen Spitze kollinear sind zu den Kurven

$$\eta = \alpha \xi^2 \pm \beta \xi^{3/2} \quad \text{mit} \quad \alpha \beta \neq 0. \tag{7.12}$$

Diese wiederum sind untereinander affin, denn sie lassen sich durch die Substitution

$$\xi = \beta^2 x/\alpha^2, \quad \eta = \beta^4 y/\alpha^3 \tag{7.13}$$

auf die Normalform

$$y = x^2 \pm x^{3/2} \tag{7.14}$$

bringen (Abb. 13).

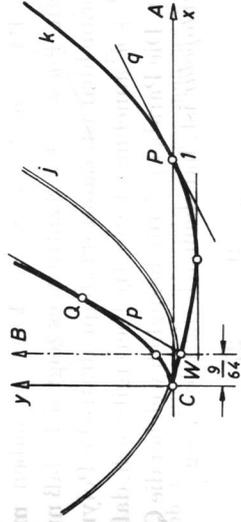


Abb. 13. Normalform der Quartik mit Schnabelspitze und gewöhnlicher Spitze

§7.4. Der anschließenden Überprüfung der Autopolarität der Quartik k (7.14) legen wir deren rationale Darstellung

$$x = u^2, \quad y = u^4 + u^3 \tag{7.15}$$

zugrunde⁷. Da das Schnabelelement offenbar nur sich selbst entsprechen kann, muß es dem Grundkegelschnitt j angehören. Für j kommt mithin nur eine *Parabel*

$$y = ax^2 + bx + c \tag{7.16}$$

⁷ Diese Darstellung lehrt, daß k als Schrägriß der gespitzen Raumquartik \tilde{k} : $X = u^2, Y = u^3, Z = u^4$ erhalten werden kann. Diese ist eine W -Kurve und entsteht als Durchdringung des parabolischen Zylinders $X^2 = Z$ mit dem quadratischen Kegel $XZ = Y^2$. Die Schnabelspitze von k ist durch den Umstand bedingt, daß die Projektion aus einem Punkt der Henkeltangente von \tilde{k} erfolgt.

in Betracht. Die Polare p eines Punktes $P \in k$ hat die Gleichung

$$(2au^2 + b)\bar{x} - \bar{y} = u^4 + u^3 - bu^2 - 2c, \tag{7.17}$$

und für die von ihr eingehüllte Polarkurve \bar{k} von k findet man mit Hilfe der Ableitung von (7.17) die Darstellung

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{u^2}{a} + \frac{3u}{4a} - \frac{b}{2a}, \\ \bar{y} &= u^4 + \frac{1}{2}u^3 + \frac{b}{4}u^2 + \frac{3b}{4}u + \left(2c - \frac{b^2}{2a}\right). \end{aligned} \tag{7.18}$$

Soll diese Quartik \bar{k} mit k zusammenfallen, so müssen zunächst die für große u bestehenden asymptotischen Relationen $y \sim x^2$ und $\bar{y} \sim a^2 \bar{x}^2$ übereinstimmen, was $a^2 = 1$ verlangt, jedoch nur für $a = +1$ zu keinen Widersprüchen führt. Der Vergleich von x mit \bar{x} lehrt ferner, daß das quadratische Polynom in (7.18) die Form \bar{u}^2 haben muß, was für $b = -9/32$ mit $\pm \bar{u} = u + 3/8$ zutrifft; es zeigt sich, daß nur das untere Vorzeichen brauchbar ist, damit das biquadratische Polynom in (7.18) die Bauart $\bar{u}^4 + \bar{u}^3$ annehmen kann. Hierbei ergibt sich, daß $c = 27/8192$ zu nehmen ist. Die Parabel j (7.16), bezüglich welcher die Quartik k nun tatsächlich *autopolar* ist, hat demnach die Gleichung

$$y = x^2 - \frac{9}{32}x + \frac{27}{8192}, \tag{7.19}$$

und korrespondierende Punkte von k (7.15) sind durch die involutorische Relation

$$u + \bar{u} = -3/8 \tag{7.20}$$

gekoppelt. Für den selbstentsprechenden Parameterwert $u = \bar{u} = -3/16$ erhält man einen Berührungspunkt S von j mit k (Abb. 13). Zusammenfassend gilt

Satz 16: *Alle Quartiken mit einer Schnabelspitze und einer gewöhnlichen Spitze sind kollinear zur Normalform (7.15). Jede von ihnen ist autopolar bezüglich eines Kegelschnitts, der sie in der Schnabelspitze oskuliert und an einer weiteren Stelle berührt; für die Normalform ist dies die Parabel (7.19).*

Ergänzend sei vermerkt, daß der *Wendepunkt* W als Pol der Spitzentangente $y = 0$ auf der Achse der Parabel j liegt, so daß sich deren

Scheitel in der Mitte zwischen W und der x -Achse befindet (Abb. 13). Der *Wendepunkt* entspricht in der Korrespondenz (7.20) der Spitze C ($u = 0$) und wird daher mit $\bar{u} = -3/8$ erhalten.

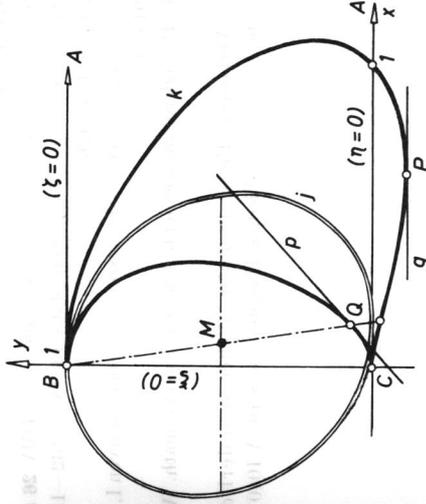


Abb. 14. Quartik mit Schnabelspitze und gewöhnlicher Spitze

§7.5. Um die in Abb. 13 unendlich ferne Schnabelspitze B sichtbar zu machen, mag sie durch die Kollineation

$$x' = \frac{x}{1+y}, \quad y' = \frac{y}{1+y} \tag{7.21}$$

ins Endliche geholt werden. Die so gewonnene Quartik k' hat gemäß (7.15) mit dem neuen Parameter $v = 1/u$ die Darstellung

$$x' = \frac{v^2}{1+v+v^4}, \quad y' = \frac{1+v}{1+v+v^4} \tag{7.22}$$

und ist im Endlichen geschlossen (vgl. Abb. 14, wo die Akzente fortgelassen wurden). Sie ist autopolar bezüglich der Parabel j (7.19) entsprechenden Ellipse j' mit der Gleichung

$$x'^2 + \frac{9}{32}x'y' + \frac{8219}{8192}y'^2 - \frac{9}{32}x' - \frac{4123}{4096}y' + \frac{27}{8192} = 0. \tag{7.23}$$

Ihr Mittelpunkt hat die Koordinaten $x'_0 = 576/8057$, $y'_0 = 3961/8057$.

Literatur

- [1] Appell, P.: Courbes autopolaires. *Nouv. Ann. Math.* **13** (1894), 206—210.
 [2] Darboux, G.: Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques. Paris, 1873 (249—255).
 [3] Fouret, M.: Sur les courbes planes ou surfaces qui sont leur propre polaire réciproque par rapport à une infinité de coniques ou surfaces du second degré. *Bull. Soc. philomath.* 1877, 42—45.
 [4] Gaedecke, W.: Beiträge zur Theorie der Kissoide. *Jber. DMV* **26** (1918), 50—55.
 [5] Housel, M.: Sur la Question 81. *Nouv. Ann. Math.* **13** (1854), 132—136. Fußnote von A. Genocchi auf S. 135—136.
 [6] Loria, G.: Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven I, II. Leipzig/Berlin, 2. Aufl. 1910/11.
 [7] Scheffers, G.: Besondere transzendente Kurven. *Enzykl. math. Wiss.* III D 4.

Anschrift des Verfassers: Emer. Prof. Dr. Walter Wunderlich, Institut für Geometrie, Technische Universität, Wiedner Hauptstraße 8-10, A-1040 Wien.