

Sphärische Kurven mit einem beweglichen geschlossenen Sehnepolygon

Von

w. M. Walter Wunderlich, Wien

(Mit 2 Abbildungen)

(Vorgelegt in der Sitzung der math.-nat. Klasse am 18. Jänner 1985)

Herrn Prof. Dr. Edmund Hlawka zum 70. Geburtstag gewidmet

Abstract: Spherical Curves With a Mobile Closed Chord Polygon. The problem consists in finding spherical curves with a closed equilateral chord polygon, whose vertices can move along the curve; the sides of the polygon are supposed to conserve their length, whereas the angles may vary. Under the additional condition that all sides appear under a constant angle ω from a fixed axis z , the problem leads to a functional equation (2.4). Periodic solutions depend on an arbitrary function $\tau(u) = -\tau(u + \omega)$ and include algebraic specimens. The simplest example is a spherical curve of order 24 with a mobile chord rhombus.

1. Die von H. J. Fischer [1] aufgeworfene Frage nach ebenen Kurven mit einem beweglichen geschlossenen Sehnepolygon, dessen Seiten eine gemeinsame und unveränderliche Länge besitzen, wurde in [3] ausführlich behandelt und grundsätzlich beantwortet. Da sich die Winkel des Polygons ändern dürfen, mag man sich dasselbe als gelenkige, längs der gesuchten Kurve wandernde Gliederkette vorstellen. Unter der zusätzlichen Forderung, daß sämtliche Polygonseiten aus einem festen Zentrum O unter einem konstanten Gesichtswinkel ω erscheinen sollen, haben solche Kurven sogar eine praktische Bedeutung, nämlich für die Konstruktion von Einscheiben-Nockentrieben mit doppeltem Rollen-Schwinghebel [4]. Überdies gelangt man dabei zu algebraischen Lösungskurven.

Die Erweiterung des Problems auf *Raumkurven* wurde in [3] vorgenommen. Die dort in Ebene und Raum vorgeschlagene Methode, die auf willkürlicher Vorgabe eines großen Teils der Lösungskurve beruht, deren fehlender Rest dann relativ leicht zu ergänzen ist, wäre auch auf der Kugel ohne weiteres anwendbar; sie liefert jedoch nur „gestückelte“ Lösungen. Eine analytisch einheitliche Lösungskurve trat in Gestalt einer sphärischen Kreisevolvente (allerdings mit starr beweglichem Sehnepolygon) bereits früher in [2] auf; sie ließe sich verschiedentlich verallgemeinern. Zur Gewinnung einheitlicher Lösungen erwies sich in [3] die Nebenbedingung als nützlich, daß sämtliche Seiten des räumlichen Sehnepolygons aus einer festen Achse z unter einem *konstanten Winkel* ω erscheinen sollen. Die Lösung der betreffenden Funktionalgleichung gelang in mehreren bemerkenswerten Fällen, mußte jedoch für *sphärische Kurven* zunächst zurückgestellt werden. Diese Lücke soll nun ausgefüllt werden.

2. Werden auf der als Trägerfläche zugrunde gelegten *Einheitskugel* Ω geographische Koordinaten u (Länge) und v (Breite) eingeführt, so wird eine auf Ω verlaufende Kurve k in kartesischen Koordinaten beschrieben durch

$$x = \cos v \cos u, \quad y = \cos v \sin u, \quad z = \sin v \quad \text{mit} \quad v = v(u). \quad (2.1)$$

Sind $A_1(u, v)$ und $A_2(u', v')$ die Endpunkte einer Sehne von k , so besteht zwischen der Länge $\overline{A_1 A_2} = c$ und dem sphärischen Abstand $A_1 A_2 = \gamma$ die Beziehung

$$c = 2 \sin(\gamma/2). \quad (2.2)$$

Ferner gilt wegen der erwähnten Zusatzbedingung $\sphericalangle A_1 z A_2 = \omega = \text{const}$ die Relation

$$u' - u = \omega = \pi/m < \pi, \quad \text{amomentenlos} \quad (2.3)$$

wobei $m > 1$ als rationale Zahl vorauszusetzen ist, damit sich das mit der Seitenlänge c konstruierte *gleichseitige Sehnepolygon* $A_1 A_2 A_3 \dots$ schließt. Auf Grund des sphärischen Kosinussatzes hat man

$$\sin v \sin v' + \cos \omega \cos v \cos v' = \cos \gamma \quad (2.4)$$

$$\text{mit} \quad v = v(u), \quad v' = v(u + \omega),$$

womit das Problem auf eine *Funktionalgleichung* für $v(u)$ zurückgeführt ist.

3. Nimmt man weiterhin für die Lösung von (2.4) die zulässige — und anderen Überlegungen zufolge anscheinend sogar notwendige —

$$\text{Periodizität} \quad v(u + 2\omega) = v(u) \quad (3.1)$$

an, und führt man die (veränderliche) *periodische Differenz*

$$v' - v = \tau(u) = -\tau(u + \omega) = \tau(u + 2\omega) \quad (3.2)$$

ein, so gelangt man mit $v' = v + \tau$ zur Gleichung

$$\begin{aligned} \sin v (\sin v \cos \tau + \cos v \sin \tau) + \\ + \cos \omega \cos v (\cos v \cos \tau - \sin v \sin \tau) = \cos \gamma. \end{aligned} \quad (3.3)$$

(1.5) Nach willkürlicher Vorgabe einer passenden Hilfsfunktion $\tau(u)$, die der Bedingung (3.2) genügt — z. B. $\tau = \varepsilon \cdot \cos jmu$ mit ungeradem j —, läßt sich aus (3.3) die *Lösungsfunktion* $v(u)$ berechnen, womit die gesuchte Kurve k (2.1) bestimmt ist.

Die zu Parameterwerten $u, u + \omega, u + 2\omega, \dots$ gehörigen Punkte von k bilden die Ecken eines gleichseitigen Sehnepolygons $A_1 A_2 A_3 \dots$, das längs k wandert, wenn u variiert. Schreibt man $m = \mu/\nu > 1$ als Bruch teilerfremder natürlicher Zahlen an, so weist das Polygon 2μ Seiten auf und schließt sich nach ν Umläufen um die z -Achse.

4. Günstiger als die Wahl der Hilfsfunktion $\tau(u)$ ist die Annahme der beiden in (3.3) benötigten Winkelfunktionen

$$\cos \tau = \xi(u) = \xi(u + \omega), \quad \sin \tau = \eta(u) = -\eta(u + \omega), \quad (4.1)$$

die ebenfalls periodisch sind und natürlich der Relation

$$\xi^2 + \eta^2 = 1 \quad (4.2)$$

genügen müssen. Mit ihnen nimmt die Schlüsselgleichung (3.3) die Gestalt

$$(\xi \cos \omega - \cos \gamma) \cot^2 v + (1 - \cos \omega) \eta \cot v + (\xi - \cos \gamma) = 0 \quad (4.3)$$

an. Hieraus entnimmt man

$$\cot v = \frac{(1 - \cos \omega) \eta \pm W}{2(\cos \gamma - \xi \cos \omega)} \quad (4.4)$$

mit

$$W^2 = (1 - \cos \omega)^2 - 4(\xi \cos \omega - \cos \gamma)(\xi - \cos \gamma). \quad (4.5)$$

Mit der nunmehr bekannten Abhängigkeit $v(u)$ ist die Lösungskurve k (2.1) festgelegt.

5. Zur Aufsuchung von geeigneten, die Bedingungen (4.2) und (4.3) erfüllenden Paaren von Hilfsfunktionen $\xi(u), \eta(u)$ kann die folgende *räumliche Deutung* dienen. Man betrachte in dem durch die kartesischen Koordinaten ξ, η, ζ beschriebenen Raum den durch (4.2) erklärten *Drehzylinder* Γ und ziehe auf ihm eine geschlossene, die ξ -Achse umschlingende und zu ihr symmetrische *Hilfskurve* h . Sie sei derart nach u parametrisiert, daß die Vermehrung von u um ω die Spiegelung an der ξ -Achse bewirkt. Die Koordinatenfunktionen $\xi(u)$ und $\eta(u)$ leisten dann das Gewünschte.

Wählen wir für h etwa die Schnittlinie des Drehzylinders Γ (4.2) mit dem vom Scheitel $(-1, 0, 0)$ ausstrahlenden Drehkegel Δ :

$$\eta^2 + \zeta^2 = \varepsilon^2 (\xi + 1)^2. \tag{5.1}$$

Parametrisieren wir diese *rationale Quartik* h durch die Festsetzung $\zeta/\eta = \operatorname{tg} mu$ mit $m = \pi/\omega > 1$, so finden wir nach kurzer Rechnung

$$\xi = \frac{1 - \varepsilon^2 \cos^2 mu}{1 + \varepsilon^2 \cos^2 mu}, \quad \eta = \frac{2 \varepsilon \cos mu}{1 + \varepsilon^2 \cos^2 mu}. \tag{5.2}$$

Die damit über (4.4) zu gewinnenden Lösungskurven k (2.1) sind *algebraisch*.

6. Als *Beispiel* sei die einfachste Annahme $m = 2$ ($\omega = \pi/2$) näher ausgeführt. Sie liefert *sphärische Kurven mit einem beweglichen Sehnrhombus* $A_1 A_2 A_3 A_4$. Solche Kurven k ergeben sich gemäß (4.4) und (4.5) über

$$\cot v = \frac{\eta \pm W}{2 \cos \gamma} \quad \text{mit} \quad W^2 = 1 - (\xi - 2 \cos \gamma)^2. \tag{6.1}$$

Der Wahl (5.2) entsprechend ist dabei

$$\xi = \frac{1 - \varepsilon^2 \cos^2 2u}{1 + \varepsilon^2 \cos^2 2u}, \quad \eta = \frac{2 \varepsilon \cos 2u}{1 + \varepsilon^2 \cos^2 2u}. \tag{6.2}$$

Die nicht unbedingt nötige, aber aus Realitätsrückichten zu empfehlende Forderung $W^2 \geq 0$ ist für alle u erfüllt, wenn

$$\cos \gamma \leq \frac{1}{1 + \varepsilon^2} \quad \text{oder} \quad \varepsilon^2 \leq \frac{1}{\cos \gamma} - 1. \tag{6.3}$$

Um die *Ordnung* der (algebraischen) Lösungskurve k (2.1) zu bestimmen, betrachten wir ihren *Aufriß* k'' :

$$x = \cos u \cos v, \quad z = \sin v. \tag{6.4}$$

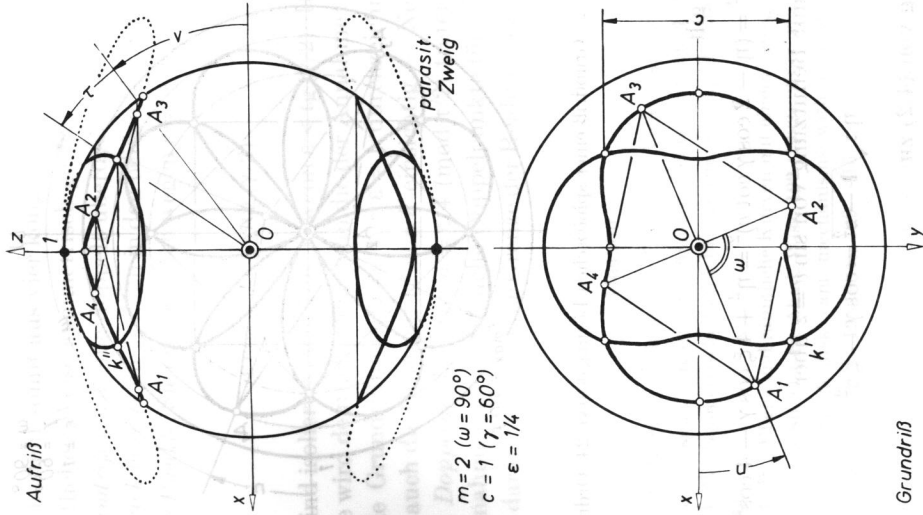


Abb. 1. Sphärische Kurve 24. Ordnung mit beweglichem Sehnrhombus

Mit dem Ziel einer parameterfreien Darstellung von k'' beginnen wir mit

$$\cos^2 u = \frac{x^2}{1 - z^2}, \quad \cos 2u = \frac{2x^2 + z^2 - 1}{1 - z^2} \tag{6.5}$$

und erhalten so aus (6.2):

$$\xi = \frac{(1 - z^2)^2 - \varepsilon^2 (2x^2 + z^2 - 1)^2}{(1 - z^2)^2 + \varepsilon^2 (2x^2 + z^2 - 1)^2}, \quad \eta = \frac{2 \varepsilon (1 - z^2) (2x^2 + z^2 - 1)}{(1 - z^2)^2 + \varepsilon^2 (2x^2 + z^2 - 1)^2}. \tag{6.6}$$

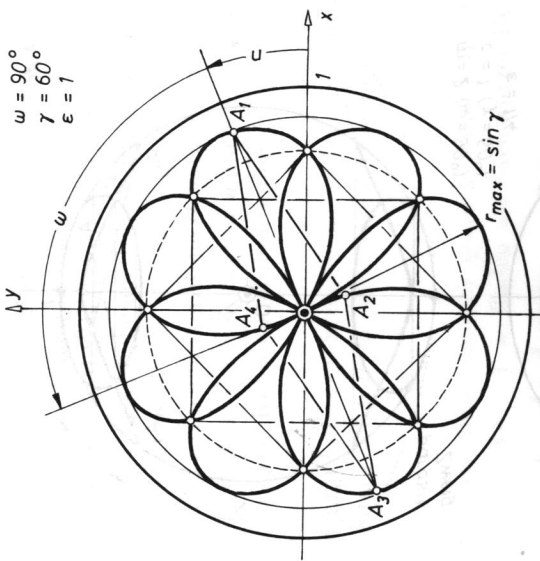


Abb. 2. Grundriß einer sphärischen Lösungskurve 24. Ordnung

Zufolge (6.1) gilt

$$W^2 = (\eta - 2 \cos \gamma \cot v)^2 = \eta^2 + 4 \xi \cos \gamma - 4 \cos^2 \gamma, \quad (6.7)$$

woraus man mit Benützung von $\sin v = z$ über

$$\eta z \sqrt{1 - z^2} = \cos \gamma - \xi z^2 \quad (6.8)$$

bei Beachtung von (4.2) zu

$$z^4 - (2 \xi \cos \gamma + \eta^2) z^2 + \cos^2 \gamma = 0 \quad (6.9)$$

gelangt. Nach Eintragung der Ausdrücke (6.6) entsteht schließlich ein Polynom 12. Grades in x und z , dessen Nullstellenmenge k'' mithin eine algebraische Kurve 12. Ordnung ist. Wegen der aus Symmetriegründen doppelten Überdeckung des Auftrisses k' von $k \subset \Omega$ ist demnach k selbst eine *sphärische Kurve 24. Ordnung* (Abb. 1).

Bei der Ermittlung des *Kreuznisses* k''' von k tritt in den voranstehenden Entwicklungen im wesentlichen bloß y an die Stelle von x , so daß k''' zu k'' kongruent ist. Weil in den in Rede stehenden Polynomen die Veränderlichen nur in geraden Potenzen auftreten, sind k''' und k'' symmetrisch zu den entsprechenden Koordinatenachsen. Die sphäri-

sche Kurve k besteht somit aus vier kongruenten Teilen, die in der aus Abb. 1 ersichtlichen Weise symmetrisch gebaut und angeordnet sind. Auch der *Grundriß* k' ist eine doppelt überdeckte Kurve 12. Ordnung.

Die Kurve k besitzt im übrigen in den beiden Kugelpolen $(0, 0, \pm 1)$ zwei *achtfache Punkte*. Sie ergeben sich wegen $v = \pm \pi/2$, wenn $\xi = \cos \gamma$, was für

$$\epsilon \cos 2u = \pm \operatorname{tg}(\gamma/2) \quad (6.10)$$

eintritt. Sie sind isoliert wie in Abb. 1, wenn $\epsilon < \operatorname{tg}(\gamma/2)$. Der Charakter dieser Punkte wird deutlich, wenn man die der Annahme $c = 1$ ($\gamma = \pi/3$) entsprechende Grundrißfigur etwa für $\epsilon = 1$ durchzeichnet (Abb. 2). Hierbei wird auch die Ordnung 12 von k' einsichtig. — Neben den stets vorhandenen *Doppelpunkten* für $u = \pi/4 \pmod{\pi/2}$ treten bei der verwandelten Annahme noch zusätzliche Doppelpunkte für $u = 0 \pmod{\pi/2}$ auf; dies liegt daran, daß $\epsilon = 1$ die Grenze der Realitätsschranke (6.3) für W bedeutet.

Literatur

[1] Fischer, H. J.: Kurven, in denen ein Drei- oder Vieleck so herumbewegt werden kann, daß seine Ecken die Kurve durchlaufen. Deutsche Math. **1** (1936), 485—498.
 [2] Wunderlich, W.: Geometrische Betrachtungen um eine Apfelschale. Elem. Math. **15** (1960), 60—66.
 [3] Wunderlich, W.: Ebene und räumliche Kurven mit einem beweglichen geschlossenen Sehnepolygon. Sb. Österr. Akad. Wiss. **192** (1983), 207—225.
 [4] Wunderlich, W.: Single-disk cam mechanisms with oscillating double roller follower. Mech. Mach. Theory **19** (1984), 409—415.

Anschrift des Verfassers: Emer. Prof. Dr. W. Wunderlich, Alser Straße 69/15, A-1080 Wien, Österreich.