

Darstellende Geometrie nichteuclidischer Schraubflächen.

Von Walter Wunderlich in Wien.

(Mit 5 Textfiguren.)

1. Die normierte elliptische Schraubung.

Unter einer elliptischen Schraubung versteht man bekanntlich eine eingliedrige kontinuierliche Kollineationsgruppe des projektiven dreidimensionalen Raumes, die eine nulletteilige Fläche 2. Grades in sich überführt. Diese wird als Maßfläche einer elliptischen Metrik angesehen und im folgenden als Kugel vom Radius $\sqrt{-1}$ vorangesezett.

Eine beliebige Kollineation unserer Gruppe vertauscht die Erzeugenden der Maßkugel innerhalb ihrer Scharen in projektiver Weise, so daß sie — und damit jede Schraubkollineation — in den beiden Scharen je zwei Erzeugende festhält. Die Diagonalen z, \bar{z} dieses invarianten Erzeugendenvierseits heißen die Achsen der Schraubung und sind reziproke Polare der Maßfläche. Wir machen nun mit K. Strubecker¹⁾ z zu einem Durchmesser der Maßkugel, den wir uns lotrecht denken, so daß \bar{z} zur Ferngeraden der waagrechten Stellung wird.

Das im folgenden benützte homogene kartesische Koordinatensystem hat die Kugelmitte 0 als Ursprung und z als x_3 -Achse. Ecken des invarianten Viersseits und Fixpunkte der Schraubung sind dann die absoluten Kreispunkte $I_1(0, 1, i, 0)$, $I_2(0, 1, -i, 0)$ auf z und die auf z liegenden Pole $J_1(1, 0, 0, i)$ und $J_2(1, 0, 0, -i)$ der Maßkugel $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$. Fixebenen sind die Minimalebenen $x_1 = \pm ix_2$ durch z und die waagrechten Berührebenen $t_1(ix_0 = x_3)$, $t_2(-ix_0 = x_3)$ der Kugel.

Eine Schraubkollineation dreht alle Punkte des Raumes um denselben elliptischen Winkel φ um z und gleichzeitig um einen Winkel ψ um \bar{z} . Nun ist aber zufolge unserer Normierung die elliptische Drehung um z identisch mit der euklidischen, schreibt sich daher

¹⁾ K. Strubecker, „Über die Schraubungen des elliptischen Raumes“, Sitzungsber. der Akad. Wien, 139 (1930). — Vgl. auch seine grundlegende Arbeit „Über nichteuclidische Schraubungen“, Monatsh. f. Math. u. Phys., 38 (1931).

$$\begin{aligned} y_0 &= x_0 \\ y_1 &= x_1 \cos \varphi - x_2 \sin \varphi \\ y_2 &= x_1 \sin \varphi + x_2 \cos \varphi \\ y_3 &= x_3 \end{aligned} \quad (1)$$

Dementsprechend lautet die Drehung um \bar{z} :

$$\begin{aligned} y_0 &= x_0 \cos \psi - x_3 \sin \psi \\ y_1 &= x_1 \\ y_2 &= x_2 \\ y_3 &= x_0 \sin \psi + x_3 \cos \psi. \end{aligned} \quad (2)$$

Im Verlauf der Schraubung bleibt offenbar das Verhältnis $\varphi : \psi$ konstant; dieser Festwert $\varphi : \psi = p$ heißt der „Parameter“ der Schraubung, deren Gleichung somit lautet:

$$\begin{aligned} y_0 &= x_0 \cos \frac{\varphi}{p} - x_3 \sin \frac{\varphi}{p} \\ y_1 &= x_1 \cos \frac{\varphi}{p} - x_2 \sin \frac{\varphi}{p} \\ y_2 &= x_1 \sin \frac{\varphi}{p} + x_2 \cos \frac{\varphi}{p} \\ y_3 &= x_0 \sin \frac{\varphi}{p} + x_3 \cos \frac{\varphi}{p}. \end{aligned} \quad (3)$$

Tatsächlich geht hiebei die Maßkugel $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ in sich über, neben dieser aber auch jede der ∞^1 , das invariante Vierseit enthaltenden Flächen

$$x_0^2 + x_3^2 + \lambda(x_1^2 + x_2^2) = 0, \quad (4)$$

die bei negativem λ einteilig sind und dann kurz als „Schraubhyperboleide“ bezeichnet werden. Es sind einschlägige Drehhyperboleide mit der Achse z und den gemeinsamen imaginären Scheiteln J_1, J_2 .

Zu den besonderen Parameterwerten $p = \infty$ bzw. $p = 0$ gehören die Drehungen um z bzw. \bar{z} , aus denen wir die Schraubung zusammen gesetzt haben. Für $p = 1$ erhält man nach (3) eine Kollinearitätsgruppe mit geradlinigen Bahnkurven, die als „Rechtsschiebung“ (parallel zu z) bezeichnet wird. Ihre Bahngaraden sind Erzeugende der Schraubhyperboleide, und zwar jene, die im bezug auf z rechtsgewunden sind; sie treffen die Gegenseiten $I_1 J_1, I_2 J_2$ des invarianten Vierseits und bilden, weil letztere Minimalstrahlen sind, ein elliptisches Dreieck, das „Rechtsnetz“ \mathfrak{E}_r . Ebenso gehört zu $p = -1$ eine „Linksschiebung“ mit einem „Linksnetz“ \mathfrak{E}_l von Bahngaraden, das aus den anderen Erzeugenden der Schraubbhyperboleide besteht und aus \mathfrak{E}_r durch Spiegelung an der Mittelebene II ($x_3 = 0$) hervorgeht.

2. Clifford'sche Parallelprojektion (Netzrißverfahren).

Für die zeichnerische Erfassung der gewöhnlichen euklidischen Schraubung ist der Normalriß in der Richtung der Schraubachse grundlegend. Eine adäquate konstruktive Behandlung der elliptischen Schraubung wird als Projektionsstrahlen die Cliffordschen Parallelen der Schraubachse z benützen müssen²⁾, wofür aber

²⁾ Hieraus ergibt sich unmittelbar die vom K. Strubecker angeführte kinematische Erzeugung der normierten elliptischen Schraublinie: „Rotieren auf einem Drehhyperboloid zwei Erzeugende verschiedener Scharen mit konstanten Geschwindigkeiten c_1, c_2 , dann beschreibt ihr Schnittpunkt eine elliptische Schraublinie vom Parameter $p = (c_1 + c_2) : (c_1 - c_2)$ “.

³⁾ Zwei Strahlen heißen parallel im Sinne Cliffords (parataktisch), wenn sie ein und dasselbe einer Schar entnommene Erzeugendenpaar der Maßfläche treffen. Je nach der benützten Schar unterscheidet man zwischen „links-“ und „rechtsparallelen“ Geraden. Zu jeder allgemeinen Geraden gehört ein Netz von Linksparallelen und ein Netz von Rechtsparallelen.

Sei e_r ein Netzstrahl aus \mathfrak{E}_r ; er bleibt im Verlauf der Rechtsdrehung, die sich nach der Erklärung des Parameters p aus einer Drehung um z und einer gleich raschen um \bar{z} zusammensetzt, in Ruhe, d. h. die zweite Drehung hebt die erste gerade auf. Daraus können wir schließen, daß, wenn e_r bei der ersten Drehung mit der Geschwindigkeit c um z rotiert, die zweite Drehung (um \bar{z}) eine Drehung mit der Geschwindigkeit $-c$ um z bewirkt. Ist jetzt aber, wie im Falle der allgemeinen elliptischen Schraubung, die zweite Drehung $\frac{1}{p}$ -mal so rasch wie die erste, dann wandert e_r mit der Geschwindigkeit $c(1 - \frac{1}{p})$ um z ! Ebenso erkennen wir, daß ein Netzstrahl e_l aus \mathfrak{E}_l sich hierbei mit der Geschwindigkeit $c(1 + \frac{1}{p})$ auf seinem Schraubbhyperboloid um z dreht.

Satz I. Im Verlauf der normierten elliptischen Schraubung vom Parameter p drehen sich die Strahlen des Links- bzw. Rechtsnetzes mit konstanten Winkelgeschwindigkeiten c_1 bzw. c_2 um die Achse z , wobei $c_1 : c_2 = (p+1) : (p-1)^2$.
Irgend eine windschiefe Kollineation mit dem Achsenpaar $z\bar{z}$ vertauscht die invarianten Flächen (4) untereinander und führt jede Drehung, somit auch jede Schraubung um $z\bar{z}$ in sich über. Man kann daher statt der Kugel irgend eine der Flächen (4) als Maßfläche wählen und der Parameter p der Schraubung ist unabhängig von dieser Auswahl. Wir setzen zunächst die Maßfläche als irreduzibel voraus, werden aber später auch das Ebenenpaar t_1, t_2 zulassen und dann von einer „quasielliptischen Schraubung“ sprechen.

zwei Möglichkeiten im Betracht kommen: Die Gesamtseite aller Strahlen, die die Fixerzeugenden $I_1 J_1$ und $I_2 J_2$ treffen oder ebenso gut jene Strahlen, die $I_1 J_2$ und $I_2 J_1$ treffen. Im ersten Falle haben wir also unser Rechtsnetz \mathfrak{E}_r , das aus den „Rechtsparallelen“ von z (und \bar{z}) besteht, im zweiten Fall das aus den „Linksparallelen“ gebildete Linksnetz \mathfrak{E}_l . Da beide gleichberechtigt sind, verwenden wir beide nebeneinander und benutzen $\Pi(x_3=0)$ als gemeinsame Bildebene*).

Ein Raumpunkt P wird also dadurch abgebildet, daß man durch ihn je einen Strahl aus \mathfrak{E}_l und aus \mathfrak{E}_r legt und mit Π zum Schnitt bringt. Beide Projektionsstrahlen liegen auf demselben Schraubhyperboloid; die beiden erhaltenen Bildpunkte, so erhaltene Bildpunkte, liegen somit auf dem Kehlkreis, den wir kurz als „Ordner“ ansprechen. Die Bildpaare der Raumpunkte sind somit an konzentrische Ordnerkreise mit der Mitte 0 gebunden (Fig. 1, 5). Diese Abbildung ist — abgesehen von den konjugiert komplexen Ebenen t_1, t_2 und den Achsen z, \bar{z} — eindeutig und stellt ein auch sonst beachtenswertes kombiniertes Netrizierverfahren dar⁵⁾.

⁴⁾ Das Rechtsnetz allein verwendet bereits K. Strubecker in seiner Abhandlung „Über kubische Verwandtschaften bei nichteuklidischen Schraubbungen“. Sitzgsb. d. Ak. Wien, **140** (1931) S. 570. — F. Hohenberg benutzt beide Netze. „Parallelprojektionen in nichteuklidischen Räumen“. Monatsh. f. Math. u. Phys., **42** (1935), S. 430 ff.

⁵⁾ Die auf J. Steiner zurückgehende Verwendung eines Strahlnetzes als Projektionsmittel wurde zum ersten Mal konstruktiv verwertet von L. Tuschei, „Über eine Schraubliniengometrie und ihre konstruktive Verwendung“, Sitzgsh. d. Akad. Wien, **120** (1911), analytisch dargestellt von E. Müller, „Über Punkttransformationen, die die Ebenen des Raumes in kongruente gerade Konoide mit parallelen Achsen überführen“, ebenda, **126** (1917), und elementar abgeleitet von E. Kruppa, „Über die Mises'sche Abbildung räumlicher Kräfte systeme“, Zeitschr. f. angew. Mathematik u. Mechanik, **4** (1924).

Aus P' und P'' erhält man sofort den Grundriß P des Raumpunktes, indem man die Grundrisse der Projektionsstrahlen, das sind die Tangenten des Ordners in P', P'' zum Schnitt bringt. — Für einen Fernpunkt sind die beiden Projektionsstrahlen parallel und schneiden daher den Kehlkreis des sie tragenden Schraubhyperboloids in Gegenpunkten: *Die beiden Risse eines Fernpunktes liegen symmetrisch zu 0* (z. B. G_u in Fig. 1).

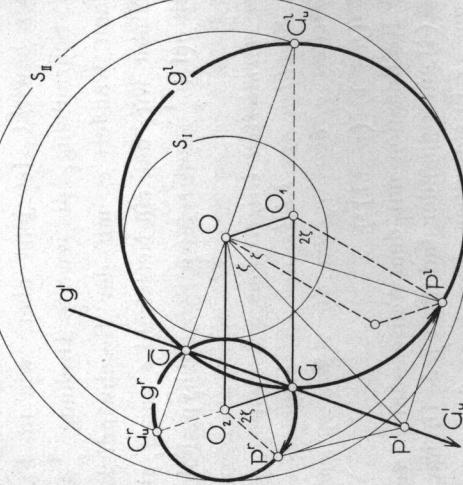


Fig. 1.

der „Linksnetz“ P' und der „Rechtsriß“ P'' liegen somit auf dem Kehlkreis, den wir kurz als „Ordner“ ansprechen. Die Bildpaare der Raumpunkte sind somit an konzentrische Ordnerkreise mit der Mitte 0 gebunden (Fig. 1, 5). Diese Abbildung ist — abgesehen von den konjugiert komplexen Ebenen t_1, t_2 und den Achsen z, \bar{z} — eindeutig und stellt ein auch sonst beachtenswertes kombiniertes Netrizierverfahren dar⁵⁾.

Um das Bild einer Geraden g zu bekommen, haben wir die Gesamtheit aller sie treffenden Strahlen aus $\mathfrak{E}_r(\mathfrak{E}_l)$ mit Π zu schneiden. Diese Gesamtheit ist im allgemeinen eine Regelschar 2. Grades, die die Brennlinien des abbildenden Netzes enthält, so daß der Schnitt mit Π durch die absoluten Punkte I_1, I_2 geht, also ein Kreis $g'(g'')$ ist. Auf die Abhängigkeit, die zwischen den Bildkreisen g' und g'' besteht, kommen wir später zurück.

Fassen wir vorerst das Doppelverhältnis ins Auge, das die Schnittpunkte G_1, G_2 der Geraden g mit den Doppellebenen t_1, t_2 , der Spurpunkt G und ein beliebiger Punkt P von g bilden; es ist gleich dem Doppelverhältnis der vier Horizontalen t_1, t_2, Π und $\varepsilon = [P\bar{z}]$, somit nur von der Kote $\zeta = x_3 : x_0$ des Punktes P abhängig. Die Netrisse der vier Punkte bilden nun auf dem Bildkreis von g dasselbe Doppelverhältnis, wobei wir zu beachten haben, daß der Linksriss von $G_1(G_2)$ — wie der jedes allgemeinen Punktes von $t_1(t_2)$ — nach $I_1(I_2)$ fällt, während für den Rechtsriß die absoluten Punkte P vertauschen sind, und daß G als Punkt von Π mit seinen beiden Rissen zusammenfällt. Wir haben also:

$$(5) \quad (\Pi \varepsilon_{t_1} t_2) = (GPG, G_2) = (GP' I_1 I_2) = (GP'' I_2 I_1).$$

Der mit $\frac{i}{2}$ multiplizierte natürliche Logarithmus dieser Doppelverhältnisse stellt einerseits definitionsgemäß den elliptischen Winkel zwischen Π und ε dar, anderseits zufolge der bekannten Laguerreschen Formel den zum Kreisbogen GP bzw. $P''G$ gehörigen Peripheriewinkel; diesen Wert ζ nennt E. Müller⁶⁾ die „Winkelkote“ von P (Fig. 1). Um den Zusammenhang zwischen ζ und β festzustellen, projizieren wir die vier Schnittpunkte $0, \bar{P}, J_1, J_2$ von ε mit $\Pi, \varepsilon, t_1, t_2$ aus einem Hilfspunkt L , der in Π liegt und von 0 den Abstand eins hat. Da $[LJ_1]$ und $[LJ_2]$ Minimalstrahlen sind, tritt gemäß der Laguerreschen Formel ζ als Winkel $OL\bar{P}$ auf und es ist wegen $0L=1, 0\bar{P}=\beta$

$$(6) \quad \operatorname{tg} \zeta = \beta = x_3 : x_0.$$

⁶⁾ A. a. O., S. 919.

Was das Vorzeichen anlangt, so erkennt man unschwer, daß, wenn sich P auf g von unten nach oben bewegt, P' den Kreis g' im positiven Sinn durchläuft, $P'' g''$ im entgegengesetzten.

Dieselbe Winkelkote ζ tritt auch auf dem Ordnerkreis von P auf (Fig. 1), da dieser etwa als Linksriss des rechten Projektionsstrahls gedeutet werden kann, P' als dessen Spurpunkt. Es gilt somit

$$(7) \quad \hat{P'OP} = 2\zeta$$

und wir können unmittelbar aus der Figur die Müllerschen Formeln⁶⁾ für die Netznisse $P'(\xi_1, \eta_1)$, $P''(\xi_2, \eta_2)$ des Raumpunktes $P(\xi, \eta, \beta)$ ablesen

$$(8) \quad \begin{aligned} \xi_1 &= \cos \zeta (\xi \cos \zeta - \eta \sin \zeta) & \xi_2 &= \cos \zeta (\xi \cos \zeta + \eta \sin \zeta) \\ \eta_1 &= \cos \zeta (\xi \sin \zeta + \eta \cos \zeta) & \eta_2 &= \cos \zeta (\xi \sin \zeta - \eta \cos \zeta). \end{aligned}$$

Kehren wir nun zu den Bildkreisen g', g'' einer Geraden g zurück, die wir uns durch ihren Spurpunkt G und ihren Fernpunkt G_u festgelegt denken. Für G_u ist $\beta = \infty$ und daher $2\zeta = \pi$, d. h. G' und $G_u''(G_u')$ sind Gegenpunkte von $g'(g'')$. Sind somit G_u' und G_u'' bekannt (sie sind nach einer Bemerkung auf Seite 252 und wie wir jetzt mit (7) bestätigen, symmetrisch zu O), dann ergeben sich g' und g'' als Kreise über den Durchmessern $G_u G_u'$, $G_u G_u''$ (Fig. 1). Ihre Mittelpunkte $0_1, 0_2$ bilden daher mit 0 und G ein Parallelogramm und wir ersehen daraus: „*Halbmesser und Ursprungsabstände der Mitten der beiden Bildkreise einer Geraden sind wechselseitig gleich.*“

Ein Kreispaar mit dieser Eigenschaft soll „Kreiszwillung“ heißen. Man bestätigt leicht, daß jeder (orientierte) Kreiszwillung als Bildpaar einer Geraden gedeutet werden kann, da der eine Schnittpunkt (G) stets mit $0, 0_1, 0_2$ ein Parallelogramm bildet und seine Gegenpunkte (G_u', G_u'') symmetrisch zu 0 liegen, womit Spur- und Fernpunkt der Geraden festgelegt sind.

G' , nach Seite 252 Schnittpunkt der Ordnetangentialen in G_u', G_u'' , liegt in der zu $[G_u' G_u'']$ senkrechten Richtung im Unendlichen. g' ist daher das Lot aus G auf $[G_u' G_u'']$, und dessen Fußpunkt \bar{G} ist der zweite Schnittpunkt der Bildkreise (Winkel im Halbkreis); es ist der gemeinsame Spurpunkt der beiden Netzstrahlen, die in der durch g gehenden erstprojizierenden Ebene liegen. g' ergibt sich mithin einfach als Chordale der beiden Bildkreise! Da wir gesehen haben, daß die Schnittpunkte G, \bar{G} der Kreise eines Zwillings nicht gleichberechtigt sind, mag G der „echte“, \bar{G} der „unechte“ genannt werden.

Eine Ebene ε bilden wir durch die Spurpunkte $\varepsilon', \varepsilon''$ der beiden Punkte ihr liegenden Netzstrahlen aus \mathfrak{E}' und \mathfrak{E}'' ab. Diese beiden Punkte

stellen gewissermaßen die scheinbaren Umrisse der Ebene dar und sind ebenfalls an einen Ordnerkreis gebunden, da sie gleichzeitig das Bildpaar jenes Punktes darstellen, in dem ε von einem Schraubhyperboloid berührt wird.

Diese Abbildung versagt bei einer für uns wichtigen Klasse von Ebenen, nämlich dem Horizon talebenen. Das Punktfeld einer solchen Ebene ε wird durch unser Netzrißverfahren auf zwei untereinander kongruente, zu ε ähnliche Felder $\varepsilon_l, \varepsilon_r$ abgebildet, und zwar entstehen diese Felder nach (8) aus dem Grundrißfeld ε' durch eine Drehstreckung um 0 : Dieses wird im Verhältnis $\cos \zeta : 1$ verkleinert und um die Winkelkote $+\zeta$ bzw. $-\zeta$ gedreht.

Waagrechte Gerade bilden sich somit nicht auf Kreiszwillinge,

sondern auf Paare von Geraden mit gleichem Ursprungsbstand ab.

3. Normalschnitte elliptischer Regelschraubflächen.

Unterwirft man eine Raumgerade g der (normierten) elliptischen Schraubung vom Parameter p , so beschreibt sie eine (normierte) elliptische Regelschraubfläche. Hierbei rotieren nach Satz I die Strahlen aus \mathfrak{E}_l bzw. \mathfrak{E}_r mit festen Geschwindigkeiten c_1 bzw. c_2 um die Schraubachse z , wobei $c_1 : c_2 = (p+1) : (p-1)$. Mit eben denselben Winkelgeschwindigkeiten drehen sich daher die Bildkreise g', g'' und damit auch die Seiten $00_1, 00_2$ des Parallelogramms $00_1 G O_2$ um 0 (Fig. 1). Der vierte Eckpunkt G , das ist der Spurpunkt von g , durchläuft dann bekanntlich⁷⁾ eine Trochode.

Kreisen die Schenkel $00_1, 00_2$ des erzeugenden Gelenkparallelogramms mit dem festen Geschwindigkeitsverhältnis $c_1 : c_2$ um 0 , dann wollen wir kurz von einer „Trochode $c_1 : c_2$ “ sprechen⁸⁾.

Die Regelschraubfläche wird also von der Mittellebene Π i. a. nach einer Trochode geschnitten, und zwar für $|p| > 1$ nach einer Epitrochode ($\frac{c_1}{c_2} > 0$), für $|p| < 1$ nach einer Hypotrochode ($\frac{c_1}{c_2} < 0$). Im besonderen Fall der Schraubtorsse, also der Tangentenfläche einer Schraublinie, ergibt sich eine Schnittkurve mit Spitzen,

⁷⁾ Siehe etwa H. Wieleitner, „Spezielle Ebene Kurven“ (Sammlung Schubert, 56) S. 230 ff.

⁸⁾ c_1 und c_2 sind gleichberechtigt und dürfen somit vertauscht werden. Jede Trochode kann auf zwei Arten als Bahnkurve beim Abrollen eines Kreises auf einem andern entstehen; die Halbmesser des festen und des rollenden Kreises verhalten sich einmal wie $(c_1 - c_2) : c_1$, das andere Mal wie $(c_2 - c_1) : c_2$. Bei negativem Verhältniswert werden die Kreismitten durch den Berührungs punkt getrennt, bei positivem nicht.

also eine Zykloide. Schneidet g die Schraubachse z , so geht die Spurtrochoiden durch 0 , ist also eine Rhodonee; trifft g hingegen \bar{z} , dann zerfällt die Spurkurve in eine Anzahl gleichmäßig um 0 verteilter Geraden.

Diese Aussagen lassen sich sofort ausdehnen auf beliebige Horizontalschnitte der Regelschraubfläche. Zwei durch Schraubung einander hervorgehende waagrechte Felder sind ja wegen des Festbleibens der absoluten Punkte I_1, I_2 stets ähnlich, woraus unmittelbar folgt, daß sämtliche Horizontalschnitte einer beliebigen Schraubfläche untereinander ähnliche Kurven sind.

Satz II. Eine normierte elliptische allgemeine Regelschraubfläche vom Parameter p wird von den zur Schraubachse z normalen Ebenen (das sind die Ebenen durch \bar{z}) nach untereinander ähnlichen Trochoiden $(p+1):(p-1)$ geschnitten. Für eine Schraubtorse ergeben sich Zykloiden, für eine z , aber nicht \bar{z} enthaltende Regelschraubfläche Rhodoneen.

Um nun eine Aussage über die Schnitte mit den Ebenen durch z zu erhalten, führen wir eine windschiefe harmonische Kollineation \mathfrak{B} aus, deren Achsen ein Paar von Gegenerzeugenden eines Schraubhyperboloids bilden, das wir für den Augenblick (s. S. 261) als Maßfläche ansehen. Sie treffen zwei Gegenseiten des invarianten Vierseits und liegen zum Schraubachsenpaar z, \bar{z} harmonisch, was man aus einem Normalriß auf Π sofort erkennt. \mathfrak{B} ist eine automorphe Kollineation der Maßfläche, die die Schraubachsen vertauscht. Sie führt eine Drehung um $z(\bar{z})$ in eine Drehung um $\bar{z}(z)$ über unter Erhaltung der Winkelgeschwindigkeit, verwandelt daher eine Schraubung mit dem Achsenpaar z, \bar{z} und dem Parameter p in die konjugierte Schraubung⁹⁾, das ist die Schraubung mit dem Parameter $\frac{1}{p}$.

\mathfrak{B} transformiert irgend eine Schraubfläche Φ in eine Schraubfläche Φ^* der konjugierten Schraubung, derart, daß den ebenen Schnitten durch z der einen die ebenen Schnitte durch \bar{z} der anderen entsprechen. Da es sich bei \mathfrak{B} um eine Kollineation handelt, ist auch Φ^* eine Regelschraubfläche, wenn Φ es war, und wir erkennen, ohne auf Sonderfälle einzugehen:

Satz III. Die Schnittlinien einer elliptischen Regelschraubfläche vom Parameter p mit den Ebenen durch die Schraubachse z gehen aus Trochoiden $(1+p):(1-p)$ durch Kollineationen hervor, die die ab-

soluten Kreispunkte in die Festpunkte J_1, J_2 von z überführen und den Mittelpunkt nach \bar{z} bringen.

Die Polarität \mathfrak{P} bezüglich eines der Schraubhyperboloiden Σ transformiert jede Schraublinie in eine Schraubtorse derselben eingeschlossenen Schraubung. Eine beliebige Schraubfläche Φ wird in eine andere Schraubfläche Φ^* verwandelt, derart, daß den ebenen Schnitten durch $z(\bar{z})$ von Φ die Berührungskegel aus den Punkten von $\bar{z}(\bar{z})$ an Φ^* entsprechen. Die polare Fläche einer allgemeinen Regelschraubfläche ist sicher wieder eine solche, doch kann, wie sich aus der folgenden Überlegung ergibt, Σ so gewählt werden, daß Φ und Φ^* euklidisch kongruent werden.

Jede allgemeine Gerade g und damit auch die von ihr erzeugte Regelschraubfläche Φ wird von zwei Schraubhyperboloiden Σ_I, Σ_{II} berührt, deren Kehlkreise s_I, s_{II} sich in unserer Abbildung (Fig. 1) sofort ergeben: Es sind die beiden Grenzlagen der Ordner, also jene die g' (und damit auch g'') gerade berühren. Betrachten wir nun die Kongruenz aller gemeinsamen Tangenten von Σ_I und Σ_{II} . Sie geht durch Schraubung in sich über und jeder Kongruenzstrahl kann so lange verschraubt werden, bis sein Berührungs punkt mit Σ_I nach Π_I , also nach s_I gelangt. Durch diesen Übergang in die Anfangslage, bei dem der Strahl niemals in eine z oder \bar{z} schneidende Lage gelangen kann, erkennen wir, daß es zwei Arten von Kongruenzstrahlen gibt: Solche, die in bezug auf z linksgewunden und solche, die rechtsgewunden sind¹⁰⁾.

Strahlen gleicher Art können in der Anfangslage durch Drehung um z ineinander übergeführt werden, mithin auch die von Strahlen gleicher Art durch eine und dieselbe Schraubung erzeugten Regelschraubflächen. Wir wählen nun für Σ jenes Schraubhyperboloid, dessen Kehlkreisradius dem geometrischen Mittel der Halbmesser von s_I und s_{II} gleich ist. Die Polarität \mathfrak{P} an Σ vertauscht Σ_I und Σ_{II} und transformiert demnach unsere Kongruenz in sich, da jeder Σ_I und Σ_{II} berührende Strahl g wieder in einen solchen und sogar, wie man am besten in der Anfangslage erkennt, in einem Strahl derselben Art übergeht. Φ und Φ^* gehen daher durch Drehung um die Schraubachse z auseinander hervor und sind kongruent.

Für den 1. scheinbaren Umriß folgt somit nach dem Gesagten aus Satz II der

Satz IV. Der 1. scheinbare Umriß einer normierten elliptischen allgemeinen Regelschraubfläche vom Parameter p geht aus ihrer Spur trochoiden

⁹⁾ K. Strubecker, „Über die Schraubungen des elliptischen Raumes“, S. 430.

¹⁰⁾ Unsere Kongruenz zerfällt in zwei „Hirsche“ Kongruenzen“.

$(p+1):(p-1)$ durch die Polarität bezüglich eines konzentrischen Kreises mit nachfolgender Drehung hervor. Der 1. scheinbare Umriß einer Regelschraubfläche, die \tilde{z} , aber nicht z enthält, ist eine polare Rhodonee.
Der Grundriß einer Schraublinie ist eine polare Zykloide (auch inverse Rhodonee), Ahrenkurve genannt^{11).}

Entsprechend fließt aus Satz III die folgende Aussage, die auch durch Übergang zur konjugierten Schraubung mittels der oben verwendeten Kollineation \mathfrak{B} gewonnen werden könnte:

Satz V. Der 2. scheinbare Umriß einer normierten elliptischen Regelschraubfläche ist eine korrelative transformierte Trochode $(1+p):(1-p)$.

4. Sätze über Trochoiden und Zykloiden.

Erinnern wir uns, daß die Verbindung der Schnittpunkte G, \bar{G} der beiden Nettrisse einer Geraden g mit deren Grundriß g' zusammenfällt (Fig. 1) und daß \bar{G} der Fußpunkt des aus 0 auf g' gefällten Lotes ist. Unter Benützung der Sätze II und IV und der auf Seite 254 eingeführten Terminologie können wir dann das folgende Ergebnis aussprechen¹²⁾:

Satz VI. Rotieren die beiden Kreise eines Zwillinges mit proportionalen Geschwindigkeiten um den Ursprung, dann beschreibt ihr echter Schnittpunkt i. a. eine Trochode, ihre Chordale die Polare einer kongruenten Trochode bezüglich eines konzentrischen Kreises und demnach der unechte Schnittpunkt eine Inverse der letzteren.

Wir betrachten nun neben der Spurkurve h_o der Regelschraubfläche Φ die zu ihr ähnliche Schnittkurve h mit einer Horizontalalebene ε von der Winkelkote ζ . h_o wird beschrieben vom Spurpunkt G der Erzeugenden g, h von deren Schnittpunkt P mit ε (Fig. 1). Der Linksriss P' liegt auf dem Bildkreis g' um den Zentriwinkel 2ζ von G entfernt (s. S. 253), beschreibt daher eine zu h_o kongruente Trochode h' . Wie aus der Figur ersichtlich ist, wird h' aber nicht in derselben Weise durchlaufen wie h_o , sondern P' eilt G mit der Phasendifferenz 2ζ nach, d. h. der Winkel des zu P' gehörigen (gestrichelten) Parallelogramms bei 0 ist ständig um 2ζ kleiner als der des zu G gehörigen. Nach der Bemerkung über den Nettriß eines waagrechten Feldes ε (s. S. 255) entsteht h durch ähnliche Vergrößerung im Verhältnis $1:\cos\zeta$ aus h' und wird genau so durchlaufen.

¹¹⁾ K. Strubecker, „Über die Schraubungen des elliptischen Raumes“, S. 425, 429.
¹²⁾ Teilweise bei F. Morley, „On Adjustable Cycloidal and Trochoidal Curves“, Amer. Journal of Math., 16 (1894), S. 191.

Andereits entsteht h aus h_o durch Verschraubung um den elliptischen Winkel $\psi = \zeta$ um \tilde{z} (s. (5) auf S. 255), ist mithin nach der Erklärung des Parameters p (S. 250) um $\varphi = p\zeta$ gegen h_o verdrückt. Verschrauben wir beide Schnitte weiter, so bleibt der Verdrehungswinkel und die Phasendifferenz dieselbe, während das Ähnlichkeitsverhältnis alle Werte annehmen kann.

Wenden wir nun auf die Horizontalschnitte der Regelschraubfläche irgend eine Parallelprojektion mit Π als Bildebene an, so folgt aus dem Gesagten:

Satz VII. Durchlaufen zwei Punkte A, B zwei ähnliche Trochoiden $(p+1):(p-1)$ derart, daß B dem Punkt A mit der Phasendifferenz 2ζ nacheilt und die von B beschriebene Trochode gegenüber der ersten um $p\zeta$ vorverdrückt ist, dann beschreiben alle die Strecken AB in festem Verhältnis teilenden Punkte wieder ähnliche Trochoiden^{13).}

Im Falle konzentrischer Trochoiden umhüllt die Gerade AB nach Satz IV die Polare einer derselben.

Eine Reihe von bekannten Sätzen über Trochoiden und Zykloiden erhalten wir mittels des folgenden Grundsatzes: Wir verschrauben ein Bündel, dessen Träger T vorläufig nicht in Π liege. Jede Gerade desselben erzeugt eine Regelschraubfläche, jede Ebene eine Schraubtorse; die Spurpunkte G der Geraden beschreiben nach Satz II i. a. Trochoiden, die Spuren e der Ebenen Zykloiden derselben Art. Da sich weiterhin irgend ein zu Π paralleles Feld bei einer Schraubung ähnlich ändert und dabei stets parallele Lagen annimmt, ist das Spurfeld $\Pi\{G, e\}$ eines der Schraubung unterworfenen Bündels ein ähnlich veränderliches System, dessen Punkte Trochoiden und dessen Geraden Zykloiden durchlaufen.

Um die Veränderung rein planimetrisch zu beschreiben, geben wir die Wege zweier Punkte des Systems an, indem wir im Bündel zwei Strahlen auszeichnen. Hierfür bieten sich vor allem die beiden Netzstrahlen e_i, e_r des Bündels T . Sie bewegen sich während der Schraubung auf demselben Schraubhyperboloid und ihre Spurpunkte T^i, T^r beschreiben nach Satz I mit proportionalen Geschwindigkeiten dessen Kehlkreis:

¹³⁾ Nach E. Wölffing, „Bericht über den gegenwärtigen Stand der Lehre von den cyclischen Kurven“ (Bibliotheca mathematica 1901, S. 243) erhält Franoise (Brief an Bellavitis 1872) eine Trochode aus einer anderen als Ort der Sehnenmitten, deren Endpunkte dieselbe Differenz des Wälzungswinkels haben. Fouret (1868) allgemein für proportionale Teilung.

Satz VIII. Durchlaufen zwei Punkte eines ähnlich veränderlichen ebenen Systems einen festen Kreis mit proportionalen Geschwindigkeiten, dann beschreiben die übrigen Punkte i. a. Trochoiden, die Geraden des Systems jedoch Zykloiden¹⁴⁾.

Jetzt wählen wir als ausgezeichnete Bündelstrahlen die Bahntangente t des Scheitels T und deren bezüglich des Schraubhyperboloids Σ durch T konjugierte Tangente \bar{t} . Diese ist längs der Σ durch die Bahnkurve vom T umschriebenen Schraubtorse, mithin selbst eine Bahntangente und ihr Spurpunkt $\bar{T}_1 = [\bar{t}^T]$ durchläuft dieselbe Zykloide, die durch die Spur t_1 von $\bar{\tau} = [t^T]$ umhüllt wird. Ebenso wird die vom Spurpunkt T_1 von t umschriebene Zykloide durch die Spur t_1 der Bahnschmiegeebene τ von T umhüllt, da τ die von t erzeugte Schraubtorse längs t berührt. Da aber t_1 auf \bar{t}_1 euklidisch normal steht¹⁵⁾, ist T_1 das zu T_1 gehörige Krümmungszentrum der zuletzt genannten Zykloide.

Satz IX. Durchlaufen zwei Punkte $T_1 \bar{T}_1$ eines ähnlich veränderlichen ebenen Systems eine Zykloide und deren Evolute, so zwar, daß \bar{T}_1 stets der zu T_1 gehörige Krümmungsmittelpunkt ist, dann beschreiben die Geraden des Systems konzentrische Zykloiden derselben Art, ebenso die Punkte des über $T_1 \bar{T}_1$ als Durchmesser errichteten Kreises, die übrigen Punkte hingegen Trochoiden¹⁶⁾.

Um den letzten Teil dieses Satzes einzusehen, haben wir zu bedenken, daß die Bahntangenten der elliptischen Schraubung einen tetraedralen Komplex mit dem Fundamentalhettetraeder $I_1 I_2 J_1 J_2$ darstellen, demnach die durch T gehenden Bahntangenten einen dem Fixtetraeder umschriebenen Kegel 2. Grades bilden, dem auch t und \bar{t} angehören und der längs t von τ berührt wird. Die Spurkurve des Kegels geht durch die absoluten Punkte I_1, I_2 , ist also ein Kreis, von dem wir

¹⁴⁾ G. Bellermann, „Epicycloiden und Hypocycloiden“, Dissertation Jena 1867, stellt fest (S. 19, 21), daß die Verbindungssehne zweier mit konstanten Geschwindigkeiten auf einem Kreis rotierenden Punkte eine Zykloide umhüllt, während alle die Sehne proportional teilenden Punkte Trochoiden beschreiben, abgesehen von zwei Punkten mit Zykloidbahnen.

¹⁵⁾ $t_1 \perp \bar{t}_1$ ist aus Symmetriegründen einleuchtend, wenn T auf dem Kehlkreis des Hyperboloides liegt und gilt daher allgemein, weil sich das Spursystem des Bündels T ähnlich verändert.

¹⁶⁾ Dieser Satz findet sich im wesentlichen bei Fouret (L'institut, Paris 1868), der Trochoiden erhält, indem er auf gegen die Tangenten einer Zykloide gleich geneigten Geraden Stücke proportional zum Krümmungshalbmesser aufträgt. Moritz Blanc (Nouv. ann. de math. 1876) errichtet über den Krümmungsradien einer Zykloide ähnliche Dreiecke und findet im Ort der Spitzen eine Trochode.

zwei Punkte T_1, \bar{T}_1 und die Tangente t_1 des ersten kennen. Wegen $t_1 \perp \bar{t}_1 = [T_1 \bar{T}_1]$ (s. o.) ist $T_1 \bar{T}_1$ ein Durchmesser. Sämtliche Kegelerzeugende erzeugen Schraubtoren, ihre den genannten Kreis erfüllenden Spurpunkte mithin Zykloiden.

In Satz IX ist die bekannte Tatsache enthalten, daß die Evolute und die Evolutoiden einer Zykloide wieder Zykloiden derselben Art sind, ferner ergibt sich aus der Betrachtung eines dem veränderlichen System angehörenden Winkels der Satz: „Gleiten die Schenkel eines festen Winkels an zwei ähnlichen, konzentrischen Zykloiden, dann beschreibt der Scheitel i. a. eine Trochode“, der für identische Zykloiden von Chasles¹⁷⁾ bewiesen wurde, während Fouret zeigte, daß eine mit dem Winkel fest verbundene Gerade eine ähnliche Zykloide umhüllt. Schrumpft die eine Zykloide auf den Mittelpunkt zusammen, dann ergibt sich als Scheitelort eine Rhodonee; insbesondere ist also die Mittelpunktsfßpunktcurve einer Zykloide eine Rhodonee.

Die zuletzt ausgezeichneten Bündelstrahlen t, \bar{t} waren konjugierte Flächentangenten des Schraubhyperboloids, werden daher durch dessen in der Tangentialebene $\bar{\tau}$ liegende Erzeugenden e_1, e_r harmonisch getrennt. Folglich liegen die Spurpunkte T_1, \bar{T}_1, T^r, T' harmonisch auf der Spur \bar{t}_1 und wir wissen (Satz IX), daß \bar{T}_1 das Krümmungszentrum der von T_1 durchlaufenen Zykloide ist, während (Satz VIII) T^r und T' den festen Kreis derselben beschreiben. Daraus folgt unmittelbar der Satz von Cesàro¹⁸⁾: „Bei der Zykloide liegt das Krümmungszentrum auf der Polare des Kurvenpunktes im bezug auf den festen Kreis“ und aus Satz IX der Satz von Fouret: „Teilt man die Normalenstrecken einer Zykloide bis zum Schnitt mit dem festen Kreis proportional, so erhält man i. a. eine Trochode“.

5. Normalschnitte hyperbolischer Regelschraubflächen.

Die den folgenden Betrachtungen zugrunde gelegte hyperbolische Schraubung ist ganz analog zur elliptischen (Abschnitt 1) normiert¹⁹⁾: Es wird bloß die nullteilige Maßkugel vom Radius i durch eine ein teilige Einheitskugel ersetzt, was einfach durch jene Affinität \mathfrak{S} bewerkstelligt werden kann, die alle Applikaten durch i dividiert. Die auf der lotrechten Schraubachse z gelegenen Fixpunkte $J_1, J_2(1, 0, 0, \pm 1)$

¹⁷⁾ Aperçu historique, 1837.

¹⁸⁾ Mathesis VII, 1887.

¹⁹⁾ K. Strubecker, „Über nichteuklidische Schraubungen“, Monatsh. f. Math. u. Phys., 38 (1931), S. 65.

sind nun samt ihren Berührungssebenen t_1, t_2 ($x_0 = \pm x_3$) reell, während die absoluten Kreispunkte I_1, I_2 auf \bar{z} und die Minimalebenen durch z weiterhin Dopperelemente geblieben sind.

Die so normierte hyperbolische Schraubung lautet dann in homogenen kartesischen Koordinaten entsprechend (3)

$$(9) \quad \begin{aligned} y_0 &= x_0 \operatorname{ch} \frac{\varphi}{p} + x_3 \operatorname{sh} \frac{\varphi}{p} \\ y_1 &= x_1 \cos \varphi - x_2 \sin \varphi \\ y_2 &= x_1 \sin \varphi + x_2 \cos \varphi \\ y_3 &= x_0 \operatorname{sh} \frac{\varphi}{p} + x_3 \operatorname{ch} \frac{\varphi}{p} \end{aligned}$$

worin φ wieder den Drehwinkel um z bedeutet. Die invarianten Flächen 2. Grades

$$(10) \quad x_0^2 - x_3^2 + \lambda(x_1^2 + x_2^2) = 0$$

sind nun ovale Drehflächen ($\lambda < 0$ Ellipsoide, $\lambda > 0$ zweischalige Hyperboloida) mit der Achse z und den gemeinsamen Scheiteln J_1, J_2 .

Vermöge \Im gehen elliptische Schraubgebilde in entsprechende hyperbolische über. Wir können daher in Anlehnung an Satz II in den Horizontalschnitten der hyperbolischen Regelschraubflächen jene Kurven vermuten, die als Bahnkurven beim Abrollen komplexer Kreise aufeinander entstehen und unter dem Namen „Pseudotrochoiden“ bekannt sind²⁰⁾. So einleuchtend damit auch die Existenz und manche Eigenschaften dieser Kurven werden, ist diese Überlegung doch nicht einwandfrei, da wir nur reelle elliptische Schraubgebilde betrachtet haben, weshalb der rechnerische Beweis folgt.

Da jede allgemeine Raumgerade ein invariantes Ellipsoid und ein Hyperboloid berührt (die Berührungspunkte sind die Doppelpunkte der von dem invarianten Flächenschnüren auf der Geraden ausgeschnittenen Involution, werden demnach von t_1, t_2 harmonisch getrennt), dürfen wir von der Anfangslage der Geraden voraussetzen, daß sie ein Ellipsoid am Äquator berührt; da schließlich die Schraubung Drehungen um z und windschiefe Kollinationen mit den Achsen z, \bar{z} verträgt, genügt es, die Geraden

$$x_0 = 1, x_1 = 1, x_2 = kt, x_3 = t$$

zu verschrauben:

$$(11) \quad \begin{aligned} y_0 &= \operatorname{ch} \frac{\varphi}{p} + t \cdot \operatorname{sh} \frac{\varphi}{p} \\ y_1 &= \cos \varphi - kt \cdot \sin \varphi \\ y_2 &= \sin \varphi + kt \cdot \cos \varphi \\ y_3 &= \operatorname{sh} \frac{\varphi}{p} + t \cdot \operatorname{ch} \frac{\varphi}{p}. \end{aligned}$$

Für den Schnitt mit der Mittelebene Π ($y_3 = 0$) ergibt sich aus der letzten Zeile

$$t = -\operatorname{th} \frac{\varphi}{p}$$

hierauf aus der ersten

$$y_0 = 1 : \operatorname{ch} \frac{\varphi}{p}$$

und damit

$$(12) \quad \begin{aligned} x &= \frac{y_1}{y_0} = \operatorname{ch} \frac{\varphi}{p} \cos \varphi + k \cdot \operatorname{sh} \frac{\varphi}{p} \sin \varphi \\ y &= \frac{y_2}{y_0} = \operatorname{ch} \frac{\varphi}{p} \sin \varphi - k \cdot \operatorname{sh} \frac{\varphi}{p} \cos \varphi. \end{aligned}$$

Das ist in der Tat das Gleichungspaar einer Pseudotrochode²¹⁾.

Aus der Spurkurve (12) entstehen durch Verschraubung die übrigen zu ihr ähnlichen Horizontalschnitte der Fläche. Zu bedenken ist bloß, daß wir durch Anwendung reeller Schraubkollinationen stets zwischen den beiden Fixebenen t_1, t_2 bleiben. Es sind aber auch die äußeren Horizontalschnitte unserer Regelschraubfläche untereinander im gewöhnlichen Sinn ähnliche Pseudotrochoden, wie wir durch Ausübung der harmonischen perspektiven Kollination $\tilde{\mathfrak{Q}}$ mit J_1 als Zentrum und t_2 als Kollineationsebene erkennen. $\tilde{\mathfrak{Q}}$ läßt das Doppelpunktstetraeder fest und vertauscht die invarianten Flächen 2. Grades untereinander, derart, daß die Ellipsoide zu Hyperboloiden werden und umgekehrt; da das Kollinationsstrahlensystem J_1 die Schraubung erträgt, bleibt das System der Schraublinien erhalten. Eine Regelschraubfläche wird durch $\tilde{\mathfrak{Q}}$ in eine zweite derselben Schraubung transformiert, wobei den äußeren Horizontalschnitten der einen die zu ihnen perspektiv ähnlichen inneren der andern entsprechen.

Innere und äußere Horizontalschnitte ein und denselben Regelschraubfläche haben rein äußerlich verschiedene Gestalt, sind aber als komplexähnlich anzusehen, da sie durch Schraubung für gewisse komplexe Werte von φ ineinander übergeführt werden können. Sie werden getrennt

²⁰⁾ E. Wölffling, „Über Pseudotrochoiden“, Zeitschr. f. Math. u. Phys., 44 (1899). — H. Wieleitner, „Spezielle Ebene Kurven“, S. 211ff., 259 ff.

²¹⁾ Vgl. E. Wölffling a. a. O., S. 145.

durch die beiden Fixebenen ι_1, ι_2 ; deren Schnitte mit der Fläche sind die in ihnen gelegenen Schraublinien, das sind gegensinnig kongruente logarithmische Spiralen²²⁾, die als unendliche Verkleinerung der Pseudotrochoiden aufgefaßt werden können.

Die Horizontalschnitte einer die Schraubachse z aber nicht \bar{z} enthaltenden Regelschraubfläche sind analog zum elliptischen Fall (Satz II) i. a. „Pseudorhodoneen“²³⁾; nehmen wir etwa an, die reellen Erzeugenden der Fläche schneiden z im inneren Teil, dann sind die inneren Schnittlinien die sogenannten Differenzenspiralen (in Polarkoordinaten $r = a \cdot \operatorname{sh} \frac{\varphi}{p}$), die äußeren hingegen Summenspiralen ($r = a \cdot \operatorname{ch} \frac{\varphi}{p}$).

Die Horizontalschnitte einer Schraubtorse sind i. a. „Pseudozykloiden“²⁴⁾; nehmen wir etwa an, die Gratlins sei eine innere Schraublinie, dann sind die inneren Horizontalschnitte die sogenannten Parazykloiden (diese haben eine reelle Spitze), die äußeren hingegen Hyperzykloiden (kein reeller Rückkehrpunkt, dafür ein reeller Scheitel). Der feste Kreis für die erwähnte Erzeugung durch Rollung ist der Parallelkreis der die Gratlins tragenden Schraubfläche 2. Grades, also für Parazykloiden einteilig, für Hyperzykloiden nullteilig.

Die Polarität bezüglich einer der Schraubflächen 2. Grades gestattet so wie in Abschnitt 3 (S. 257), Aussagen über den 1. Umriß der Regelschraubflächen zu machen. Wir fassen die hyperbolischen Seitenstücke zu den Sätzen II und IV zusammen in

Satz X. Eine normierte hyperbolische allgemeine Regelschraubfläche wird von den zur Schraubachse z normalen Ebenen nach Pseudotrochoiden geschnitten. Für eine Schraubtorse ergeben sich Pseudozykloiden, für eine z , aber nicht \bar{z} enthaltende Regelschraubfläche Summen- und Differenzenspiralen.

Der 1. scheinbare Umriß einer allgemeinen Regelschraubfläche besteht aus einer Pseudotrochode durch die Polarität bezüglich eines konzentrischen Kreises, jener einer \bar{z} , aber nicht z enthaltenden Regelschraubfläche auf die gleiche Weise aus einer Summen- oder Differenzenspirale. Der Grundriß einer Schraublinie ist eine polare Pseudozykloide (auch inverse Pseudorhodonee²⁵⁾).

²²⁾ Man setze in (9) $x_0 = 1, x_1 = a, x_2 = 0, x_3 = \pm 1$; man erhält dann als Gleichung der Bahnkurve in Polarkoordinaten: $r = a \cdot e \mp \frac{q}{p}$.

²³⁾ H. Wieleitner, S. 262.

²⁴⁾ H. Wieleitner, S. 212.

²⁵⁾ Eine innere Schraublinie erscheint im Grundriß als „Poinsotsche Spirale“ (Wieleitner, S. 264).

Die Schnitte einer hyperbolischen Regelschraubfläche mit den Ebenen des Büschels z sind untereinander kollinear, weshalb wir uns auf die Betrachtung der speziellen Ebene $y_2 = 0$ beschränken. Aus (11) ergibt sich zunächst

$$t = -\frac{1}{k} \operatorname{tg} \varphi$$

$$\text{dann } y_1 = 1 : \cos \varphi$$

und endlich

$$(13) \quad \begin{aligned} x &= \frac{y_0}{y_1} = \operatorname{ch} \frac{\varphi}{p} \cos \varphi - \frac{1}{k} \operatorname{sh} \frac{\varphi}{p} \sin \varphi \\ y &= \frac{y_2}{y_1} = \operatorname{sh} \frac{\varphi}{p} \cos \varphi - \frac{1}{k} \operatorname{ch} \frac{\varphi}{p} \sin \varphi. \end{aligned}$$

Unsere Schnitte sind kollinear zu der Kurve (13), welche wir im Sinne E. Müllers als „C-Pseudotrochode“ bezeichnen können.

Korrelative dieser Kurven treten als 2. scheinbare Umrisse der hyperbolischen Regelschraubflächen auf (vgl. Satz V).

6. Sätze über Pseudotrochoiden und -zykloiden.

Durch ähnliche Betrachtungen wie im 4. Abschnitt gelangen wir wieder zu einer Reihe von Sätzen über Pseudotrochoiden. So erhalten wir etwa durch Parallelprojektion der Horizontalabschnitte einer hyperbolischen Regelschraubfläche (Satz X) auf die Mittelebene, wobei wir die in ι_1, ι_2 gelegenen logarithmischen Spiralen (s. S. 264) besonders hervorheben, den

Satz XI. Bewegt sich ein Punkt A auf einer logarithmischen Spirale nach innen, ein anderer Punkt B mit gleicher Winkelgeschwindigkeit auf einer gegensinnig kongruenten Spirale nach außen, dann beschreiben alle die Strecke AB in festem Verhältnis teillenden Punkte Pseudotrochoiden, insbesondere Pseudozykloiden, wenn die Tangenten in A und B parallel sind²⁶⁾.

Sind die Spiralen konzentrisch, dann umhüllt die Gerade AB die Polare einer Pseudotrochode bezüglich eines konzentrischen Kreises.

²⁶⁾ Diese Erzeugung, die sich zum Zeichnen von Pseudozykloiden und -trochoiden gut eignet, hängt innig zusammen mit der von Wölffing (a. a. O., S. 166) angeführten Entstehung der Pseudotrochode als Sonderfall der Rothschen „Ephelix“. Nimmt man die Tangenten der log. Spiralen als bekannt an, dann ist auch die Tangentenkonstruktion der Pseudotrochode einfach: Man trägt in den Punkten A, B Tangentenvektoren im Sinne der Bewegung proportional zu den zugehörigen Radienvektoren auf und teilt die Verbindung ihrer Endpunkte im selben Verhältnis wie AB ; der so erhaltene Punkt gehört der Tangente an.

Aus der Betrachtung eines verschraubten Strahl- und Ebenenbündels T ergibt sich ganz ähnlich wie im elliptischen Fall (S. 259 ff.) das Seitenstück zu Satz IX, wo man bloß den Namen „Trochoide“ und „Zykloide“ das Bewort „Pseudo-“ vorzusetzen hat.

In diesem Satz ist dann die schon Euler bekannte Tatsache enthalten, daß die Evolute einer Parazykloide eine Hyperzykloide ist und umgekehrt; die Evolutoiden sind Pseudozykloiden beider Kategorien, unter welchen sich auch zwei logarithmische Spiralen als Spurkurven der von den Bündelebenen $[tJ_1]$ und $[tJ_2]$ umhüllten Schraubkegel befinden. Eingeschlossen ist ferner der Satz: „Gleiten die Schenkel eines festen Winkels an zwei ähnlichen konzentrischen Pseudozykloiden, dann beschreibt der Scheitel i. a. eine Pseudotrochoide“²⁷⁾ und dessen Sonderfälle: „Gleitet ein fester Winkel an zwei konzentrischen gegenseitig kongruenten logarithmischen Spiralen, dann beschreibt der Scheitel eine Pseudotrochoide“ sowie: „Die Mittelpunktsfußpunktkurve einer Parazykloide ist eine Differenzenspirale, die einer Hyperzykloide eine Summenspirale“ (vgl. die entsprechenden Sätze auf S. 261).

Während es zu Satz VIII kein reelles Analogon gibt, erhalten wir einen für die hyperbolische Schraubung eigentümlichen Satz, wenn wir im Bündel T die beiden Strahlen nach den reellen Fixpunkten J_1, J_2 auszeichnen. Da die Bahnkurven in t_1, t_2 gegensinnig kongruente logarithmische Spiralen sind (S. 264), durchlaufen die Spurpunkte der genannten Strahlen ebensolche, und es gilt:

Satz XII. Bewegen sich zwei Punkte eines ähnlich veränderlichen ebenen Systems auf zwei konzentrischen gegensinnig kongruenten logarithmischen Spiralen derart, daß sie stets mit dem Mittelpunkt in einer Linie bleiben, dann beschreiben die übrigen Punkte des Systems i. a. Pseudotrochoiden, die Geraden i. a. Pseudozykloiden.

7. Clifford'sche Parallelbeleuchtung quasielliptischer Schraubflächen.

Wir kehren wieder zur elliptischen Schraubung zurück und versuchen, Analogien zu den bekannten Schattenkonstruktionen an gewöhnlichen euklidischen Schraubflächen zu finden.

Als Lichtstrahlen definieren wir die Strahlen eines Netzes Cliffordscher Parallelen, dessen Brennlinien bekanntlich einer Erzeugendenschar der Maßfläche angehören³⁾ und erklären als „Eigen-

²⁷⁾ Für zusammenfallende Parazykloiden bewiesen von Wölffing (a. a. O., S. 163). — Es sind natürlich auch komplexe ähnliche Pseudozykloiden zugelassen.

schattengrenze“ einer Fläche den Ort aller Punkte, in denen es eine dem „Lichtnetz“ angehörende Flächentangente gibt.

Solange wir allerdings die unter den invarianten Flächen 2. Grades der Schraubung mehr oder minder willkürlich ausgezeichnete Maßkugel beibehalten (s. S. 251), kommen wir zu keinen befriedigenden Analogien²⁸⁾, wohl aber, wenn wir die Metrik auf die in das Ebenenpaar t_1, t_2 bzw. Punktpaar I_1, I_2 ausgearbeitete Fläche gründen. Die beiden Regelscharen sind hier in je zwei konjugiert komplexe Strahlbüschel zerfallen, nämlich in die Büschel $(I_1 t_1), (I_2 t_2)$ von „linken“ Erzeugenden und die Büschel $(I_1 t_2), (I_2 t_1)$ von „rechten“. Die zugehörige Geometrie wurde bereits von J. Grünwald²⁹⁾ und W. Blaschke³⁰⁾ studiert und ist unter dem Namen „quasielliptische Geometrie“ bekannt. Quasielliptische Schraubgebilde sind, soweit nicht metrische Begriffe eine Rolle spielen, mit den elliptischen vollkommen identisch.

Alle ein konjugiert komplexes „rechtes“ Erzeugendenpaar treffenden Geraden bilden ein Netz \mathfrak{F}_R linksparalleler Lichtstrahlen, das, weil seine Brennlinien Minimalstrahlen sind, ein Drehecknetz ist und aus unserem Projektionsnetz \mathfrak{E}_l (S. 252) durch bloße Parallelverschiebung in waagrechter Richtung hervorgeht. Neben diesem Linksnetz \mathfrak{F}_L betrachten wir gleichzeitig das Rechtsnetz \mathfrak{E}_R , das durch Spiegelung an der Mittelebene Π aus \mathfrak{F}_R entsteht und mit diesem den Hauptstrahl c gemeinsam hat. Die durch \mathfrak{F}_R und \mathfrak{F}_L vermittelte netzprojektive Abbildung auf Π wollen wir als „Schatten“ ansprechen und zur Unterscheidung von den bisher durch \mathfrak{E}_l und \mathfrak{E}_c erzeugten „Bildern“ mit griechischen Zeigern kennzeichnen.

Projizieren wir ein horizontales Feld mit der Wendelfläche ζ einmal mittels \mathfrak{E}_l und einmal mittels \mathfrak{F}_L auf Π ! Jedesmal wird es im Verhältnis $\cos \zeta : 1$ ähnlich verkleinert und um ζ gedreht (S. 255). Bildfeld und Schattensfeld sind somit kongruent und gleich orientiert.

1. Hilfssatz. Linksbild (Rechtschatten) und Linksschatten (Rechtschatten) eines waagrechten Feldes gehen durch Parallelverschiebung auseinander hervor.

²⁸⁾ Die Linksschattengrenze der Wendelfläche etwa erscheint im Rechtsbild als elliptische zirkulare Kurve 3. Ordnung.

²⁹⁾ Ein Abbildungsprinzip, welches die ebene Geometrie und Kinematik mit der räumlichen Geometrie verknüpft. „Sitzsber. d. Akad. Wien, 120 (1911).

³⁰⁾ „Euklidische Kinematik und nichteuklidische Geometrie.“ Zeitschr. f. Math. u. Phys., 60 (1912). — Vgl. die Darstellung bei E. Müller-Kruppa, „Die linearen Abbildungen“ (Vorlesungen über darstellende Geometrie, I), S. 240 ff.

Die beiden Bildkreise des Hauptstrahls c der Lichtnetze $\mathfrak{F}_k, \mathfrak{F}_\ell$ sowie die beiden Schattenkreise der Schraubachse z fallen sämtlich in jenem Kreis zusammen, auf dem die Spurpunkte c' und 0 von e und z Gegenpunkte bilden (der gemeinsame Fernpunkt U von e und z hat ja sein Bild in 0 und seinen Schatten in c' ; vgl. S. 254). Er möge kurz „Grundkreis“ heißen; die Angabe seines Mittelpunkts C^0 legt \mathfrak{F}_k und \mathfrak{F}_ℓ vollkommen fest.

Sei nun f ein beliebiger Strahl aus \mathfrak{F}_k , also ein linker Lichtstrahl. Sein Spurpunkt F stellt den Linksschatten des ganzen Strahles f , insbesondere auch seines Fernpunktes F_u dar (Fig. 2). Dessen Rechtschatten F_u^0 hingegen liegt $F_u^0 = F$ in bezug auf c' symmetrisch gegenüber (S. 252). Unseren Hilfssatz über (S. 252) zufolge müssen F_u^r und F_u^l bezüglich $z' = 0$ dieselbe Lage haben wie F_u^k und F_u^ℓ bezüglich c' . Da mit sind aber beide Bildkreise des Lichtstrahls f schon bestimmt, da F und F_u^0 einen Durchmesser von f' begrenzen, wie auch F und F_u^r einen von f' . Aus dieser Konstruktion der Netzzüsse des linken Lichtstrahls f ergibt sich der

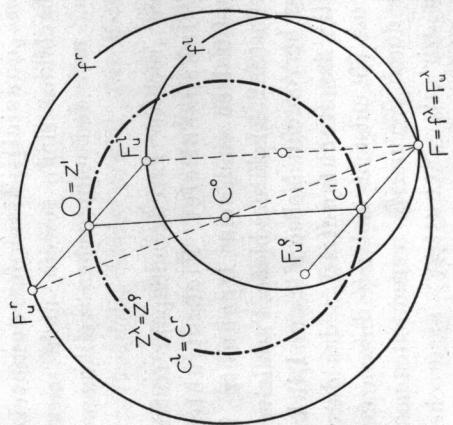


Fig. 2.
2. Hilfssatz. Die Rechts-
risse der linken Lichtstrahlen so-
wie die Linksrisse der rechten

sind konzentrisch mit dem Grundkreis.
Die Linksrisse der linken Lichtstrahlen sowie die Rechtsrisse der

rechten sind gleich groß mit dem Grundkreis.
Betrifft wir das Schattenproblem einer Schraubfläche in Angriff nehmen können, müssen wir noch die Abbildung der Schraubtangentialen erledigen. Betrachten wir zunächst einen Punkt T_0 der Mittelebene Π mit dem Ursprung Abstand r . Eine infinitesimale Schraubkollineation vom Parameter p dreht ihn um den Winkel $d\varphi$ um z und um $\frac{1}{p}d\varphi$ um \bar{z} (s. S. 250). Er hat sich somit in waagrechter Richtung um $rd\varphi$, in lotrechter um $\frac{1}{p}d\varphi$ weiterbewegt (s. S. 253: Schraubwinkel um \bar{z} = Winkelkote; Formel (6)). Die Bahntangente t_0 von T_0 hat demnach das Gefälle $tgy = \frac{1}{pr}$ und sie berührt nicht nur das Schraubhyperboloid mit dem Kehlkreisradius r in T_0 , sondern auch jenes mit

dem Radius pr , und zwar im unendlich fernen Punkte \bar{T}_u . Die Netzzüsse von \bar{T}_u liegen sonach auf OT_0 in den Abständen $\pm pr$ von 0 und die Bildkreise von t_0 sind durch die Durchmesser $T_0\bar{T}_u^l$ und $T_0\bar{T}_u^r$ bestimmt. Ihr Radienverhältnis ist nach dem Gesagten $|p+1| : |p-1|$ und dies gilt auch für jede Lage, welche t_0 bei Verschraubung annimmt, da sich die Bilder hiebei bloß um 0 drehen (Satz I).

3. Hilfssatz (Fig. 3). Die beiden Kreise t^l, t^r eines Zwillingss sind dann und nur dann Link- und Rechtsriß einer Bahntangente t der elliptischen Schraubung vom Parameter p , wenn sich ihre Halbmesser wie $|p+1| : |p-1|$ verhalten; t^l und t^r berühren die Kehlkreise $(0, r)$ und $(0, pr)$.

In Fig. 3 wurde eine solche allgemeine, durch Verschraubung von t_0 entstandene gedachte Schraubtangente t abgebildet. T_0 wandert auf einer Schraublinie s nach T , die Tangente beschreibt hiebei eine Schrautorse, die das die Bahnkurve s von \bar{T}_u tragende Schraubhyperboloid Σ längs s berührt. Die Bahnschmiegebene τ von T , das ist die Tangentialebene der Torse längs t , ist somit die Berührhene von Σ in \bar{T}_u .

Ihre Netzzüsse τ^l, τ^r sind deshalb identisch mit $\bar{T}_u^l\bar{T}_u^r$ (S. 254) und gehen aus den Bildern T^l, T^r durch die zentrischen Ähnlichkeiten $-p:1$ bzw. $p:1$ von 0 aus hervor.

Ein Element $(T\bar{\tau})$ einer Fläche wird im Rechtsriß durch das Rechtsbild T^r des Punktes T und durch den Spurpunkt $\bar{\tau}^r$ abgebildet, in welchem der in der Tangentialebene τ liegende Strahl e des Rechtsnetzes die Bildebene schneidet. Eine Fläche erscheint damit im Rechtsriß als eine Punktvverwandtschaft $T^r \rightarrow \bar{\tau}^r$ abgebildet, die nun für Schraubflächen näher untersucht werden soll. Die Schraubung, die ein Flächenelement $(T_0\bar{\tau}_0)$ in ein anderes $(T\bar{\tau})$ derselben Fläche überführt, kann zerlegt werden in eine gewisse Drehung um z und

eine Rechtsschiebung parallel zu z (S. 250). Da sich bei der Rechtsschiebung eines Flächenelementes wegen des strahlweisen Festbleibens von \mathfrak{G} , sein Bildpaar $(T^r \bar{\tau}^r)$ nicht ändert, muß unsere Punktverwandtschaft bei den Drehungen um 0 invariant bleiben. Da ferner die Bahntangente von T in τ liegt und den Netzstrahl e schneidet, liegt $\bar{\tau}^r$ auf dem Rechtsriß t^r von t . t^r ist, wie erinnerlich, ein Kreis, auf dem T^r und der aus T^r durch die Streckung $p:1$ entstehende Punkt $\bar{T}^r = \tau^r$ Gegenpunkte sind (Fig. 3, Hilfssatz 3).

Ersetzen wir das Bildpaar $(T^r \bar{\tau}^r)$ durch das Linienelement $(T^r \bar{t})$, worin \bar{t} die Verbindungsgerade von T^r und $\bar{\tau}^r$ bedeutet (Fig. 3), so ist unsere Schraubfläche Φ abgebildet auf ein Nullsystem $T^r \rightarrow \bar{t}$, das die Drehung um 0 gestattet. Fassen wir einmal einen Punkt T der Spurkurve m von Φ ins Auge: Die Spur seiner Tangentialebene γ ist bestimmt durch $T = T^r$ und $\bar{\tau}^r$, fällt also mit t zusammen! Unser Nullsystem entsteht somit aus den Linienelementen der Spurkurve m durch Drehung um 0 und es ist klar, daß umgekehrt die Angabe eines Nullsystems, das die Drehungen um 0 verträgt, eine Drehschar von kongruenten Schraubflächen bestimmt, deren Spurkurven die Elementvereine sind.

Stellen wir uns nun die Aufgabe, die Linksschattengrenze einer Schraubfläche zu ermitteln, also die Gesamtheit jener Punkte T , deren Berührbene $\bar{\tau}$ einen durch T gehenden Strahl f des Lichtnetzes \mathfrak{F}_k enthält, dann haben wir zu bedenken, daß der Rechtsriß f^r des Lichtstrahls durch T^r und $\bar{\tau}^r$ geht und nach Hilfsatz 2 mit dem „Grundkreis“ mittengleich ist. Wir haben also jene Punkte T^r zu finden, die von der Grundkreismitte C^0 ebenso weit entfernt sind, wie ihre zugeordneten Punkte $\bar{\tau}^r$:

$$C^0 T^r = C^0 \bar{\tau}^r.$$

Solche Punktpaare sind dadurch ausgezeichnet, daß ihre Symmetrale t_r durch C^0 geht (Fig. 3). Wenden wir nun auf die Gesamtheit der Symmetralen t_r die Streckung \mathfrak{U}_1 mit dem Mittelpunkt 0 und dem Verhältnis $2:(1+p)$ an, so erhalten wir, wie man aus Fig. 3 entnimmt, Gerade $t^r = \mathfrak{U}_1 t_r$, die ihren zugehörigen Punkt T^r enthalten und durch einen festen Punkt $C_1^X = \mathfrak{U}_1 C^0$ gehen. t^r ist normal zu \bar{t} , das Linienelement $(T^r \bar{t}^r)$ demnach ein Normalelement der gedrehten Spurkurve m von Φ (s. o.) und es gilt:

Satz XIII. Der Rechtsriß der Linksschattengrenze der normierten quasielliptischen Schraubfläche mit der Spurkurve m ist der Ort der Fußpunkte der aus C_1^X auf m gefüllten Normalen, wenn sich m um 0 dreht.

Ein entsprechender Satz gilt für den Linkssriß der Rechtsschattengrenze, wobei an Stelle von C_1^X ein Punkt C_2^X tritt, der aus der Grundkreismitte C^0 durch die Streckung $2:(1-p)$ entsteht³¹⁾.

So ergibt sich beispielsweise für die allgemeine Regelschraubfläche, deren Spurkurve wir als Trochoide erkannt haben (Satz II), als Rechtsbild des Linksschattens i. a. eine aus zwei Zügen bestehende trizirkulare Kurve 6. Ordnung vom Geschlecht 1 mit drei endlichen Doppelpunkten, von denen einer in C_1^X liegt. Bei der z enthaltenden Regelschraubfläche hat die Kurve eine Selbstberührung in 0. Bei der Schrautorse spaltet sich von der Kurve ein Kreis ab (der der Grathlinie als Eigenschattengrenze entspricht) und es bleibt eine rationale bizirkulare Kurve 4. Ordnung. Die Spur einer Regelschraubfläche durch \bar{z} ist eine Gerade, der Rechtsriß des Linksschattens i. a. eine Pascal-schnecke.

Ist die Spur eine Gerade durch 0, dann heißt die von ihr erzeugte Regelschraubfläche Wendelfläche und deren Linksschattengrenze erscheint im Rechtsbild als Kreis über OC_1^X als Durchmesser (Fig. 4).

Bevor wir auf die Schattengrenze derselben selbst eingehen, wollen wir den Schatten einer Schraublinie besprechen. Wir denken uns dieselbe von einem Punkt P durchlaufen und bezeichnen mit M den auf der Schraubachse z liegenden Punkt der P tragenden (waagerechten) Wendelflächenerzeugenden. Nach Satz I drehen sich die Bilder P', P_r mit konstanten Winkelgeschwindigkeiten c_1, c_2 um 0, wobei $c_1 : c_2 = (p+1):(p-1)$. Denken wir uns die Anfangslage P_0 des verschraubten Punktes in Π (M_0 ist dann in 0), dann hat sich nach der Zeitseinheit P' um den Winkel c_1, P_r um c_2 von der Nulllage entfernt (vgl. Fig. 4). Bedenken wir weiter, daß die Winkelkote zweier gleich hoher Punkte dieselbe ist und daß die doppelte Winkelkote für P nach (7) gleich ist

$$\stackrel{\wedge}{P'OP'} = c_1 - c_2 \quad (14)$$

dann gilt für die Schatten M', M_r des gleich hohen Punktes M , welche auf dem Grundkreis $z^\lambda = z^c$ liegen müssen:

$$\stackrel{\wedge}{OC_1^0 M} = c_1 - c_2 = \stackrel{\wedge}{M C_1^0 O}. \quad (15)$$

³¹⁾ Satz XIII ist analog einem Satz für die gewöhnliche euklidische Schraubung, wo die Drehflucht der Lichtrichtung die Rolle von C_1^X spielt.

272 Unserem 1. Hilfsatz zufolge ist $M^{\lambda} \vec{P}^{\lambda} = \vec{O}P$, d. h. der Halbmesser $M^{\lambda} P^{\lambda}$ hat feste Länge und dreht sich mit konstanter Geschwindigkeit c_1 um seinen Endpunkt M^{λ} , der nach (15) seinerseits mit der konstanten Geschwindigkeit $c_1 - c_2$ auf dem Grundkreis wandert. Hieraus folgt sofort, daß P^{λ} eine Trochoide $c_1 : (c_1 - c_2)$ beschreibt; ähnlich ergibt sich für P° eine Trochoide $c_2 : (c_2 - c_1)$.

$$p = 2$$

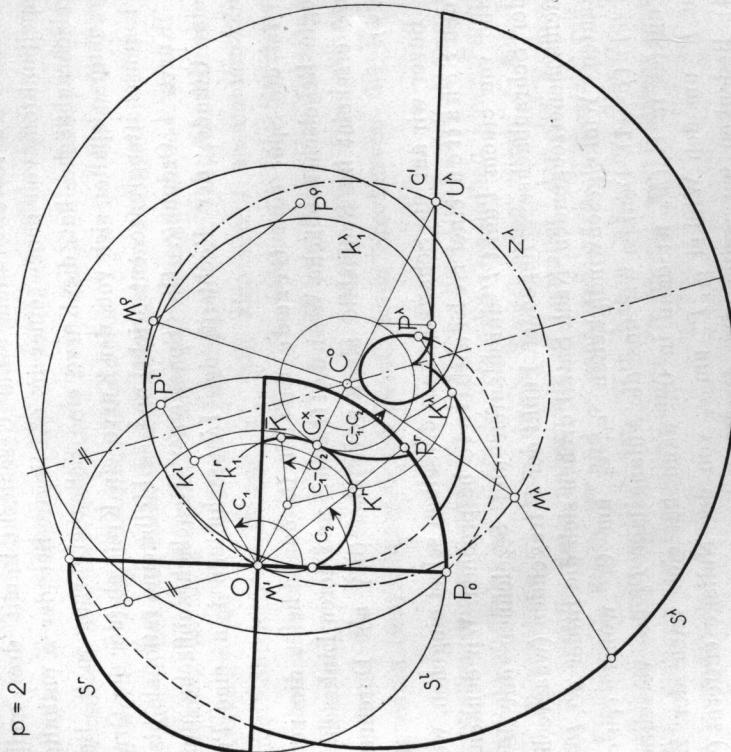


Fig. 4.

Satz XIV. Der Linksschatten einer Schraublinie vom Parameter p ist eine Trochoide $(1+p):2$, der Rechtsschatten einer Trochoide $(1-p):2$.

Die Linksschattengrenze k_1' der von $[MP]$ beschriebenen Wendelfläche erscheint im Rechtsriß, wie bereits bemerkt, als Kreis k_1' durch 0 (Fig. 4) und wird daher (neben der Schraubachse z) von dem über k_1' errichteten rechtsprojizierenden Hyperboloid Ψ aus der Wendelfläche ausgeschnitten. In Fig. 4 wurde $c_1 = 3c_2$, also $p=2$ angenommen. k_1' ist daher der Kreis über dem Durchmesser OC_1^X , wo C_1^X den in Fig. 3 erläuterten Punkt bedeutet, der hier die Strecke OC^0 im Verhältnis $2:-1$ teilt. Wir behaupten, k_1 ist eine affin

transformierte elliptische Schraublinie. Um dies einzusehen, untersuchen wir die Bewegung der Spurpunkte K^r, \bar{K} der beiden durch den Eigenschattenpunkt K von $[MP]$ gehenden Erzeugenden von Ψ im Verlauf der Schraubung. Hierbei dreht sich bekanntlich der Rechtsriß OP^r der Erzeugenden mit der Geschwindigkeit c_2 um 0, so daß K^r den Kreis k_1' mit der doppelten Geschwindigkeit $c_2 = 2c_2$ durchläuft. Die doppelte Winkelkote von K tritt einerseits als Zentriwinkel des Bogens $K^r \bar{K}$ auf, der ja den Rechtsriß der Strecke \bar{KK} darstellt, anderseits ist sie gleich der des ebenso hohen Punktes P , also nach (14) gleich $c_1 - c_2$. Es bewegt sich demnach auch K mit einer konstanten Geschwindigkeit c_1 auf k_1' , und zwar ist $c_1' = c_2 + c_1 - c_2 = c_1 + c_2$. k_1 entsteht nun als Ort des Schnittpunktes zweier mit konstanten Spurgeschwindigkeiten c_1', c_2' auf Ψ sich bewegenden Erzeugenden verschiedener Scharen und wird durch eine perspektive Affinität \mathfrak{A} mit der Affinitätssehne Π und hierzu parallelen Affinitätsstrahlen, die das schiefe Hyperboloid Ψ aufrichtet, zu einer normierten elliptischen Schraublinie (vgl. die Fußnote zu Satz I) mit dem Parameter

$$p_1 = \frac{c_1' + c_2'}{c_1' - c_2'} = \frac{c_1 + 3c_2}{c_1 - c_2} = 2p - 1.$$

Analog erhält man für die auf einem linksprojizierenden Hyperboloid liegende Rechtsschattengrenze k_2 eine affine elliptische Schraublinie vom Parameter $p_2 = 2p + 1$. Auch für diese affinen Schraublinien (es sind übrigens nichtnormierte Schraublinien unserer quasielliptischen Metrik) gilt offenbar Satz XIV, da durch die erwähnte Affinität \mathfrak{A} das Lichtnetz wieder in ein Drehnetz übergeht. Bilder und Schatten der Lichtgrenzen sind somit Trochoiden $(1 \pm p_i):2$ (vgl. Satz XV).

Insbesondere geht der Linksschatten von k_1 durch 0, ist also eine Rhodonee, während sich der Linksschatten von k_1' — das ist der Schlagschatten der Wendelfläche — auch als Hüllkurve der Durchmesser $[M^{\lambda} P^{\lambda}]$, also als Zyklode ergibt (Fig. 4). Die Schlagschatten spitzen röhren von jenen Flächenpunkten her, deren Rechtsbild mit C_1^X zusammenfällt; in diesen „Übergangspunkten“ ist der Lichtstrahl Tangente der Eigenschattengrenze und Haupttangente der Fläche ³²⁾. Wir fassen zusammen:

³²⁾ Merkwürdigweise erscheint bei dem der Fig. 4 zugrundegelegten Falle $p=2$ auch der von der Eigenschattengrenze verursachte Schlagschatten der Wendelfläche auf sich selbst im Bild als Kreis, was natürlich für allgemeines p nicht mehr trifft.

Satz XV. Die Links(Rechts)schattengrenze einer normierten quasielliptischen Wendelfläche vom Parameter p ist eine affine Schraublinie mit dem Parameter $2p \mp 1$, die im Rechts(Links)riß als Kreis erscheint, im Links(Rechts)riß hingegen als Rhodonee $\pm p:1$. Ihr Links(Rechts)schatten, das ist der Schlagschatten der Wendelfläche, ist eine Zykloide $\pm p:1$.

8. Quasielliptische Schraubsschiebflächen.

Die eben festgestellten weitgehenden Analogien zwischen den gewöhnlichen euklidischen und den quasielliptischen Wendelflächen legen den Gedanken nahe, ob sich diese nicht wie jene als Schiebflächen auffassen lassen. Das ist in der Tat möglich.

Als „Schiebung“ bezeichnen wir in der quasielliptischen Geometrie jede windschiefe Kollineation, deren Achsen einem der Büschelpaare $(I_1 \cdot I_2)$, $(I_2 \cdot I_1)$ oder $(I_1 \cdot I_1)$, $(I_2 \cdot I_2)$ entnommen sind (S. 267). Im ersten Falle sprechen wir von einer Linksschiebung, im zweiten von einer Rechtsschiebung; die Schiebstrahlen bilden ein Drehnetz Clifford-scher Links- bzw. Rechtsparallelen.

Eine Linksschiebung läßt die aus Schiebstrahlen bestehenden Büschel $(I_1 \cdot I_1)$, $(I_2 \cdot I_2)$ strahlweise fest, während die Strahlen von $(I_1 \cdot I_2)$, $(I_2 \cdot I_1)$ projektiv untereinander vertauscht werden. Demnach geht jedes Netz von Rechtsparallelen in sich über, ein Netz von Linksparallelen hingegen i. a. in ein anderes. Die Lagen, in die eine Gerade durch Anwendung von Linksschiebungen gelangt, können nur Rechtsparallele sein und umgekehrt. Die von \tilde{z} verschiedenen Doppelstrahlen der durch zwei hintereinander angewendete Linksschiebungen in $(I_1 \cdot I_2)$ und $(I_2 \cdot I_1)$ induzierten Projektivitäten bleiben punktweise fest, so daß die aus den zwei Linksschiebungen zusammen gesetzte Kollineation wieder eine Linksschiebung ist. Beide Arten von Schiebungen bilden mithin je eine dreigliedrige Gruppe.

Im Verlauf einer Linksschiebung beschreibt eine Gerade g ein Hyperboloid Ψ , das die Achsen der Schiebung enthält und, da diese Minimalstrahlen sind, von Π nach einem Kreis geschnitten wird. Die linksparallele Erzeugendenschar von Ψ besteht aus Schiebstrahlen, die rechtsparallele aus den einzelnen Lagen von g . Der zu Π konjugierte Durchmesser a der „Clifford-schen Fläche“ Ψ ist zu beiden Scharen parallel und mag die „Achse“ von Ψ heißen. Ψ entsteht offenbar nicht nur durch Linksschiebung einer rechten Erzeugenden, sondern auch durch Rechtsschiebung einer linken parallel zu a .

Eine Schiebfläche unserer Geometrie entsteht, wenn wir auf eine Raumkurve k_1 eine Folge infinitesimaler Schiebungen derselben

Art anwenden, wobei wir etwa die Bahnkurve k_2 eines Punktes P_{00} von k_1 vorgeben können. Wir stellen uns ein Modell der Fläche her, indem wir auf k_1 endlich viele aufeinanderfolgende Punkte $P_{00}, P_{01}, \dots, P_{m0}$ wählen, ebenso auf k_2 die Punkte $P_{00}, P_{10}, \dots, P_{m0}$ und nun das Polygon (P_{0k}) längs des Polygons (P_{i0}) etwa linksverschieben, was durch die endlichen Schiebungen $P_{00} \rightarrow P_{10}, P_{10} \rightarrow P_{20}, \dots$ bewerkstelligt wird und wobei der Punkt P_{0k} der Reihe nach in die Lagen P_{1k}, \dots, P_{mk} gelangt. Die einzelnen Lagen des ersten Polygons bilden zusammen mit den Schiebstrecken der Eckpunkte ein Gitter, dessen Knotenpunkte P_{ik} sämtlich auf der ursprünglichen Schiebfläche liegen, während die Maschen durch sogenannte „windschiefe Parallelogramme“ ausgefüllt sind, das sind geradlinig begrenzte Teile von Cliffordschen Flächen mit parallelen und gleich langen Gegenseiten. In der Tat sind die Schiebstrecken $P_{i-1,k} P_{ik}$ (i fest) untereinander linksparallel und haben gleiche quasielliptische Länge, während die Sehnenlagen $P_{i,k-1} P_{ik}$ (k fest) untereinander rechtsparallel und ebenfalls gleich lang sind.

Es liegt auf der Hand, daß unser ganzes Modell nicht nur durch die besagten Linksschiebungen des ersten Polygons längs des zweiten erzeugt wird, sondern auch durch Rechtsschiebungen des zweiten Polygons längs des ersten! Durch Verfeinerung der Ersatzpolygone erkennt man mittels Grenzübergang, daß jede Schiebfläche auf zwei Arten erzeugbar ist, wobei die Bahnkurven der Linksschiebung Erzeugungskurven der Rechtsschiebung sind und umgekehrt. Die beiden Schiebcurvensysteme bilden kein konjugiertes Kurvennetz wie bei den gewöhnlichen Schiebflächen, doch kann man feststellen, daß zusammenfallende Schiebrichtungen eine Haupttangente der Fläche bilden.

Bewegen sich auf einer Cliffordschen Fläche Ψ mit der Achse a zwei Erzeugende verschiedener Scharen derart, daß ihre Spurpunkte den Spurkreis mit konstanten Geschwindigkeiten d_1, d_2 durchlaufen, dann beschreibt ihr Schnittpunkt eine quasielliptische Schraublinie mit der Achse a und dem Parameter $q = (d_1 + d_2):(d_1 - d_2)$ (s. die Fußnote zu Satz I). Sie wird zu einer normierten Schraublinie durch die schon einmal verwendete perspektive Affinität mit Π als Affinitätsebene und hiezu parallelen Affinitätsstrahlen, welche a normal zu Π macht. Wir beweisen nun den folgenden Satz³³⁾.

³³⁾ Vgl. das euklidische Seitenstück bei L. Burmester, „Kinematische Flächenherzeugung vermittelt zylindrischer Rollung“, Zeitschr. f. Math. u. Phys., 33 (1888) und E. Müller, „Über Schraubflächen, deren eine Erzeugendenschar aus gewöhnlichen Schraublinien besteht“, Sitzgsber. d. Akad. Wien, 118 (1909).

Satz XVI. Verschraubt man eine quasielliptische Schraublinie k_1 mit zur Schraubachse z rechtsparalleler Achse, so erhält man eine Schraubschiebfläche, welche durch Linksschiebung von k_1 oder durch Rechtsschiebung einer anderen Schraublinie k_2 mit zu z linksparalleler Achse entsteht.

Zwischen dem Schraubparameter p und den Parametern q_1, q_2 der Schiebcurven k_1, k_2 besteht die Beziehung

$$p(q_1 + q_2) = 1 + q_1 q_2.$$

Der Fall der Regelschraubfläche ($q_1 = -q_2 = -1$) ist auszu schließen.

Die Wendelfläche ($q_1 = 2p - 1, q_2 = 2p + 1$) ist auf ∞^1 Arten als Schiebfläche erzeugbar.

Die Horizontalschritte der Schraubschiebfläche sind i. a. Tro choiden ($p - 1 : (p - q_1) = (p - q_2) : (p + 1)$).

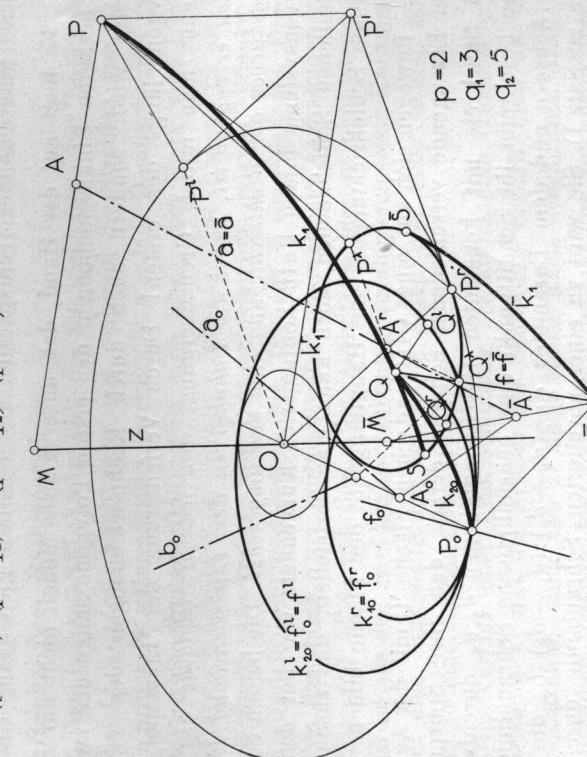


Fig. 5.

Wir fassen also eine quasielliptische Schraublinie k_1 ins Auge, deren Anfangslage k_{10} in der axonometrischen Fig. 5 durch ihren Spur punkt P_0 und den Spurkreis k_{10}^r der sie tragenden Clifford'schen Fläche Ψ_{10} festgelegt ist; Ψ_{10} ist rechtsprojizierend, da die Achse a_0 von k_{10} nach Voraussetzung rechtsparallel zu z ist. Es bedeutet keine Ein-

schränkung, daß P_0 mit dem Achsenursprungpunkt A_0 und O auf einer Geraden liegt: diese Lage kann durch Verschraubung stets erreicht werden.

Wir verschrauben nun k_{10} um z in eine allgemeine Lage k_1 , deren Achse a noch immer zu z rechtsparallel ist, da sich Ψ_{10} nach Satz I während der Schraubung bloß um z dreht. Es genügt jetzt zu zeigen, daß sich k_{10} auch durch eine einfache Linksschiebung nach k_1 bringen läßt.

Wir führen zunächst eine Linksschiebung parallel zu z aus, die a_0 nach a bringt, was sicher möglich ist, da a_0 und a auf demselben Schraubhyperboloid liegen und dessen linke Erzeugende dem Schieb strahlnetz \mathfrak{E}_1 angehören. Hierdurch gelangt auch Ψ_{10} mit dem k_1 tragenden Hyperboloid Ψ_1 (Spurkreis k_1^r) zur Deckung. Diese Schiebung läßt alle Linksbilder fest, insbesondere auch den Bildkreis f_0^l der durch P_0 gehenden zu a_0 linksparallelen Erzeugenden f_0 von Ψ_{10}, f_0 gelangt nach f und beschreibt hiebei die linksprojizierende Clifford'sche Fläche Ψ_{20} mit dem Spurkreis $f_0^l = f^l$. P_0 gelangt nach P auf f , durch welchen Punkt die aus k_{10} durch die Schraubung entstandene Schraublinie \bar{k}_1 geht, während k_1 den durch die Schraubung um z aus P_0 hervor gegangenen Punkt P enthält.

Da aber die beiden Lagen \bar{k}_1 und k_1 derselben Schraublinie auf derselben Cliffordfläche Ψ_1 liegen, können sie leicht durch eine Linksschiebung parallel zur Achse a zur Deckung gebracht werden, außer k_1 und \bar{k}_1 wären selbst Schiebstrahlen, was im Falle der Regelschraubfläche ($q_1 = -1, k_{10} = f_0$) tatsächlich eintritt.

Wegen der Gruppeneigenschaft der Linksschiebungen (S. 274) kann somit nicht nur k_{10} mit k_1 , sondern auch zwei beliebige — insbesonders benachbarte — Schraublagen von k durch eine einzige Linksschiebung ineinander übergeführt werden, womit unsere Schraubfläche als Schieb fläche erkannt ist.

Der Punkt \bar{P} bewegt sich bei der zweiten Schiebung auf f , bis er k_1 in Q erreicht. Um in dem Orte dieser auf Ψ_{20} gelegenen Punkte Q , der ja eine Schiebkurve des 2. Systems darstellt, eine Schraublinie nachzuweisen, untersuchen wir die Bewegung der Erzeugendenspunkte Q' und $Q^l = \bar{P}^l$ (λ kennzeichnet die Netzprojektion durch die linken Erzeugenden von Ψ_1 , den „Linksschatten“).

Der Hilfsatz 1 auf die waagrechte Strecke $\bar{A}\bar{P}$ angewendet, ergibt, daß der Linksschatten A_0P_0 und der Linksschatten $A^l\bar{P}^l = A^lQ^l$ gleich groß und gleichgerichtet sind. Läuft also nach Voraussetzung P^r , und damit auch $A^r = \bar{A}^r$, mit der Winkelgeschwindigkeit c_2 um 0 (Satz I), dann durchläuft auch Q^l den Kreis f^l mit derselben Geschwindigkeit.

Bezeichnen wir mit S den Spurpunkt von k_1 , dann muß, da sowohl P als auch Q der auf Ψ_1 liegenden Schraublinie k_1 vom Parameter $q_1 = (d_1 + d_2) : (d_1 - d_2)$ angehören, die Proportion gelten (S. 275):

$$(16) \quad \widehat{SP}^r : \widehat{SQ}^r = \widehat{S}Q^r : \widehat{SQ}^r = d_1 : d_2$$

woraus folgt

$$(17) \quad \widehat{Q^r P^r} : \widehat{Q^r P^r} = d_1 : d_2.$$

Nun haben aber Links- und Rechtsriß der Strecke $\bar{P}Q$ (entgegengesetzte gleiche Zentriwinkel (S. 253)):

$$(18) \quad \widehat{P_0 Q^r} = \widehat{Q^r P^r}$$

ebenso Linksschatten und Linkstriß der Strecke $\bar{P}P$ ($\bar{P}^r = Q^r$, s. o.)

$$(19) \quad \widehat{Q^r P^r} = \widehat{P_0 P^r}.$$

Nun ist aber dieser letztere Wert zufolge Satz I gleich $c_1 t$, wobei t die Zeit der Schraubung $P_0 \rightarrow P$ bedeutet, so daß wir aus (18), (17), (19) erkennen:

$$(20) \quad \widehat{P_0 Q^r} = \frac{d_2}{d_1} c_1 t.$$

Q^r und Q^s kreisen also mit den festen Geschwindigkeiten $\frac{c_1 d_2}{d_1}$ und c_2 auf \mathcal{F}' , so daß Q selbst eine Schraublinie k_2 vom Parameter

$$(21) \quad q_2 = \frac{c_1 d_2 + c_2 d_1}{c_1 d_2 - c_2 d_1} = \frac{p q_1 - 1}{q_1 - p}$$

beschreibt, die ganz auf der linksprojizierenden Clifford'schen Fläche Ψ_{20} mit der zu z linksparallelen Achse b_0 liegt. Alle übrigen Schraubkurven des 2. Systems gehen aus ihr durch Verschraubung hervor, sind also Schraublinien derselben Art.

Aus (16) folgt

$$(22) \quad \widehat{S}Q^r : \widehat{Q^r Q^s} = d_1 : (d_1 - d_2)$$

und da $\widehat{Q^r Q^s} = \widehat{Q^r Q^r}$ (Rechts- und Linksriss der Strecke $Q^r Q^s$) und

$$(23) \quad \widehat{Q^r Q^r} = \widehat{P_0 Q^r} - \widehat{P_0 Q^r} = \frac{c_2 d_2}{d_1} t - c_2 t$$

so ist

$$(24) \quad \widehat{S}Q^r = \frac{c_1 d_2 - c_2 d_1}{d_1 - d_2} t$$

woraus mit $\widehat{P_0 P^r} = c_2 t$ (Satz I) unmittelbar folgt, daß S als Spurkurve der Fläche i. a. eine Trochoide

$$\widehat{P_0 P^r} : \widehat{Q^r S} = c_2 (d_1 - d_2) : (c_2 d_1 - c_1 d_2) = (p - 1) : (p - q_1)$$

beschreibt.

Damit ist Satz XVI vollständig bewiesen und es bleibt nur noch zu bemerken, daß im Falle der Wendelfläche k_1 eine der ∞^2 Linksschattengrenzen ist (Satz XV), während k_2 den Rechtsschattengrenzen entnommen ist. Die Wendelfläche ist mithin auf ∞^1 Arten als Schiebfläche erzeugbar.

Eine besondere Stellung unter den Schraubschiebflächen nimmt auch jene durch Verschraubung eines waagrechten Kreises entstandene ein. Sie läßt sich sowohl durch $q_1 = \infty$, $q_2 = p$, als auch durch $q_1 = 1$, $q_2 = \infty$ dem allgemeinen Fall einordnen, je nachdem man den Kreis als Schraublinie mit zu z rechts- oder linksparalleler Achse anfaßt, so daß sie auf vier Arten als Schiebfläche erzeugbar ist.

(Eingegangen: 10. III. 1936.)