

Über die Schleppkurven des Kreises

von

Walter Wunderlich (Wien)

(Mit 4 Textfiguren)

(Vorgelegt in der Sitzung am 19. April 1947) /

Die vorliegende Arbeit behandelt einen bemerkenswerten Zusammenhang zwischen den Kreistraktrizzen und den Böschungslinien auf Drehflächen 2. Grades, der für einen Sonderfall schon von Morley¹ erwähnt wurde, jedoch unbeachtet blieb. Die drei Typen der Schleppkurven des Kreises lassen sich nämlich als stereographische Projektionen der Böschungslinien auf Drehellipsoiden, -hyperboloiden und -paraboloiden gewinnen und damit konstruktiv erfassen.

Annahme des Projektionszentrums auf der Achse außerhalb oder innerhalb der Fläche führt auf eine naheliegende nicht-euklidische Verallgemeinerung, die wiederum aufs engste mit den sphärischen Kreistraktrizzen zusammenhängt. Letztere sind invers zu den ebenen Schleppkurven des Kreises.

Mit Hilfe der räumlichen Deutung können auch die Evoluten der Kreistraktrizzen erfaßt werden, die von Morley im euklidischen Fall als „Newton'sche Kettenlinien“ gekennzeichnet wurden und jetzt allgemein als Zentralprojektionen von Drehkugelgeodätischen oder einer auf einen Drehzylinder aufgewickelten Parabel erkannt werden.

I. Ebene Schleppkurven. Wird in der Ebene eine Strecke AB von konstanter Länge l mit ihrem Anfangspunkt A entlang einer „Grundkurve“ g geführt, während der Endpunkt B etwa

¹ F. Morley, The "No-Rolling" Curves of Amsler's Planimeter. Ann. of Math. 1 (1899).

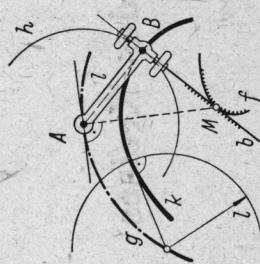


Fig. 1. Entstehung einer Schleppkurve.

durch eine Rolle gehindert wird, sich quer zur Strecke zu verschieben, dann beschreibt derselbe eine Schleppkurve oder „Traktrix“ k von g (Fig. 1). Die Schleppstrecke gibt stets die Tangente der Traktrix an und man erhält umgekehrt aus der Schleppkurve k die Grundkurve g als „Tangentialie“, indem man auf den Tangenten von k vom Bezugspunkt aus immer die konstante Länge l abträgt.

Die Rollenachse b in B steht senkrecht auf die Schleppstrecke l und fällt mit der Schleppkurvennormale zusammen. Sie hält während der Bewegung die Evolute f von k ein und rollt auf ihr entlang, ohne zu gleiten. Der Berührungs punkt M ist das jeweilige Momentanzentrum (der Drehpol), und das Polkurvenpaar der Schleppbewegung wird durch die Evolute f und die sich auf ihr abwälzende Rollenachse b dargestellt.

Denkt man sich um jede Lage von A einen Hilfskreis h mit dem Halbmesser l geschlagen, so erhält man eine Schar kongruenter Kreise, die von den ∞^1 durch g und l definierten Schleppkurven (die sich nur durch die Anfangsstellung unterscheiden) orthogonal durchsetzt werden. Auf diese Weise können die Traktrizien ohne kinematische Vorstellungen rein geometrisch erklärt werden.

Ist die Grundkurve g im besonderen ein Kreis vom Halbmesser a und der Mitte O , dann bilden die Hilfskreise eine Dreh schar, und auch das System der ∞^1 Orthogonaltrajektorien verträgt die Drehungen um O . Die durch a und l festgelegten Kreistraktrizien einer Schar sind mithin untereinander kongruent. Sie sind eingeschlossen in das Ringgebiet zwischen den beiden „Grenzkreisen“ mit den Radien $a \pm l$, auf welche sie mit Spitzen senkrecht aufsetzen; die Spitzentangenten sind Symmetrieachsen.

Neben den allgemeinen Schleppkurven tritt noch als singuläre Lösung ein Kreis auf, dessen Halbmesserquadrat $a^2 - l^2$ beträgt und der „Hauptkreis“ heißen soll. Je nach den Realitäts-

verhältnissen sind im wesentlichen drei Typen von Kreistraktrizien zu unterscheiden²:

$a < l$: „Elliptischer Typ.“ Hauptkreis nullteilig. Die Traktrix besteht aus kongruenten Teilbögen, die je einen Wendepunkt enthalten und in Spitzen zusammenhängen, die abwechselnd auf die Grenzkreise verteilt sind.

$a = l$: „Parabolischer Typ.“ Hauptkreis in einen Nullkreis ausgeartet. O ist ein asymptotischer Punkt der Traktrix; diese weist nur eine einzige Spitze auf und ist seit Cotes (1722) als „Tractrix complicata“ bekannt. Sie erweist sich als Inverse der Kreisevolvente und Fußpunktskurve der hyperbolischen Spirale.

$a > l$: „Hyperbolischer Typ.“ Hauptkreis reell. Die Traktrix nähert sich ihm einseitig asymptotisch in unzähligen Windungen und weist nur eine reelle Spitze auf. Es treten zwei Erscheinungsformen auf, da die Schleppkurven außerhalb und innerhalb des Hauptkreises nicht zusammenhängen; die beiden Formen sind jedoch als komplexe Kongruent anzusehen, da sie durch eine komplexe Drehung ineinander übergeführt werden können.

Zum Grenzfall $a = \infty$ einer geraden Grundlinie g gehört die gemeinsame Traktrix, deren Evolute bekanntlich die gewöhnliche Kettenlinie ist. — Zu einem anderen Grenzfall ($l = \infty$) gelangt man dadurch, daß man die Kreise h der Dreh schar zu Geraden ausarten läßt: Deren Orthogonaltrajektorie ist die (gemeine) Kreisevolvente, die sich nun hier einordnen läßt.

II. Sphärische Schleppkurven. Die Übertragung der Schleppkurvendefinition von der Ebene auf die Kugel liegt auf der Hand. Eine sphärische Traktrix k erscheint demzufolge als Orthogonaltrajektorie einer Schar kongruenter Kugelkreise h , deren sphärischer Mittelpunkt die Grundkurve g darstellt, während ihr gemeinschaftlicher sphärischer Radius die Schleppstrecke l ab-

² G. Loria, Spezielle algebraische und transzendente Kurven (Leipzig und Berlin 1911, II. Bd., 195 ff.

gibt; an Stelle von g kann auch die Gegenkurve \bar{g} treten, wenn gleichzeitig l durch $\pi - l$ ersetzt wird.
Von besonderem Interesse ist hier der Sonderfall $l = \pi/2$, der sich auf eine Schar von Großkreisen bezieht. Deren Orthogonaltrajektorien sind identisch mit den sphärischen Evolventen des von ihnen eingehüllten Kurvenpaars und entstehen als Bahnen der Punkte eines Kreises h , dessen Ebene auf einem Kegel rollt.

Nehmen wir als Grundkurve g wieder einen Kreis, so erscheinen dessen sphärische Schleppkurven k als Orthogonaltrajektorien einer Drehschar von Kugelkreisen h . Wir bilden nunmehr die Kugel aus einem der sphärischen Mittelpunkte von g stereographisch auf eine zu g parallele Ebene ab; die Bilder mögen durch einen Stern gekennzeichnet werden. Auf Grund der Winkel- und Kreistreue der Abbildung erhalten wir in der Bildebene die Bildkurven k^* als Orthogonaltrajektorien einer ebenen Drehschar von Kreisen h^* ; damit ergibt sich sofort der

Satz 1. *Die sphärischen Kreistraktrizien gehen bei stereographischer Abbildung aus einem Grundkreismittelpunkt in ebene Kreistraktrizien über und sind daher zu diesen invers.*

Für den ersten Teil dieses Satzes teilt Loria³ einen ziemlich umständlichen rechnerischen Beweis mit. Der zweite Teil beruht auf der bekannten Tatsache, daß sich die stereographische Projektion in eine räumliche Inversion vom Projektionszentrum aus einbetten läßt.

Die in Abschnitt I gegebene Einteilung der ebenen Schleppkurven des Kreises läßt sich danach sofort auf die sphärischen übertragen. Unabhängig davon können die drei Typen durch die Lage jenes „Hauptpunktes“ H gekennzeichnet werden, der allen Hilfskreisebenen gemein ist: Er liegt für den elliptischen Typ innerhalb der Kugel, für den parabolischen auf der Kugel und für den hyperbolischen außerhalb der Kugel. Satz 1 ist im Hinblick auf den parabolischen Fall nur dann ausnahmslos richtig, wenn wir — wie zum Schluß von Abschnitt I ange deutet wurde — den Begriff der ebenen Kreis-

³ G. Loria, Curve sghembe speciali (Bologna 1925), II. Bd., 82 f.

traktrix durch Hinzunahme der Kreisevolvente erweitern. Wir erhalten diese nämlich bei stereographischer Projektion der parabolischen sphärischen Kreistraktrix aus dem asymptotischen Punkt, während die Projektion aus dem Gegenpunkt auf die Tractrix complicata führt.

Orthogonale Linienelemente auf der Kugelfläche liegen bekanntlich harmonisch zum (isotropen) Erzeugendepaar durch den Flächelpunkt. Bei Projektion der Kugel aus einem beliebigen, jedoch nicht der Fläche angehörigen Augpunkt auf eine Ebene bilden sich die Flächenerzeugenden als Tangenten des scheinbaren Kugelumrisses ab. Fassen wir diesen als Maßkegelschnitt einer nichteuklidischen Metrik nach Cayley-Klein schem Muster auf⁴, dann können wir die Bilder senkrechter Linienelemente der Kugel als normal im Sinne dieser Metrik bezeichnen, da sie harmonisch zum absoluten Tangentenpaar liegen.

Wählen wir nun insbesondere den Hauptpunkt H als Augpunkt, so ist der Kugelumriß im elliptischen Fall ein nulldimensionaler Kegelschnitt, im hyperbolischen Fall ein reeller. Die Maßbestimmung in der Bildebene ist dementsprechend die elliptische, bzw. hyperbolische. Die Hilfskreise h erscheinen im Bild als Tangenten eines gewissen Kegelschnittes, der im Sinne der genannten Metrik als Kreis anzusprechen ist, da er den Umriß doppelt berührt. Das Bild der Traktrix k muß nun diese Tangentenschar orthogonal durchsetzen, ist also eine nichteuklidische Kreisevolvente.

Satz 2. *Die Zentralprojektion einer sphärischen Kreistraktrix elliptischen, bzw. hyperbolischen Typs aus ihrem Hauptpunkt auf eine Ebene ist eine elliptische, bzw. hyperbolische Kreisevolvente im Sinne jener Cayley-Kleinschen Metrik, die sich auf den Kugelumriß als Maßkegelschnitt gründet.*

Der parabolische Fall ist durch die im Anschluß an Satz 1 gemachte Bemerkung schon vorweggenommen; er führt auf die euklidische Kreisevolvente.

⁴ F. Klein, Vorlesungen über nicht-euklidische Geometrie (Die Grundlehren d. math. Wiss. in Einzeldarst. 26, Berlin 1928).

III. Böschungslinien auf der Kugel. Wir setzen im folgenden den Hauptpunkt H in der Kugelmitte O voraus. Die Hilfskreise h sind dann Großkreise der Kugel Φ und es liegt der schon erwähnte Sonderfall $l = \pi/2$ vor. Die zugehörigen Schleppkurven sind demzufolge sphärische Kreise evolventen und sie entstehen als Bahnen der Punkte eines Kreises h , dessen Ebene μ auf einem Drehkegel Γ mit dem Scheitel O abrollt. Wir stellen uns die Kegelachse lotrecht vor und bezeichnen die waagrechte Ebene durch O als Grund- oder Äquatorebene. Da die Bahntangenten bei der Rollung stets senkrecht zu μ stehen, haben sie gegen die Grundebene konstante Neigung und die Bahnkurven sind als Böschungslinien auf der Kugel zu bezeichnen (P. Serret 1860⁵). — Aus Satz 1 folgt jetzt der Satz von Morley:

Satz 3. *Die stereographische Projektion einer sphärischen Böschungslinie auf die Äquatorebene der Kugel ist eine Kreistraktrix von elliptischem Typ.*

Bezeichnen wir den Böschungswinkel mit α , den Kugelradius mit r und den Radius der Kegelbasis $q = [\Phi\Gamma]$ mit $r' = r \sin \alpha$, dann lauten die Gleichungen der Böschungslinie h in einem Normalkoordinatensystem xyz , das O zum Ursprung und die Kegelachse als z -Achse hat:

$$\begin{cases} x = r' \cos r' \tau \cos r \tau + r \sin r' \tau \sin r \tau = \frac{r+r'}{2} \cos(r-r')\tau - \\ \quad - \frac{r-r'}{2} \cos(r+r')\tau, \end{cases}$$

$$(1) \quad \begin{cases} y = r' \cos r' \tau \sin r \tau - r \sin r' \tau \cos r \tau = \frac{r+r'}{2} \sin(r-r')\tau - \\ \quad - \frac{r-r'}{2} \sin(r+r')\tau, \end{cases}$$

$$z = r \cos \alpha \cos r' \tau = \sqrt{r^2 - r'^2} \cdot \cos r' \tau;$$

$r' \tau$ ist dabei der seit der Nullage abgewälzte Zentriwinkel der Kreisscheibe h , $r' \tau$ der zugehörige Winkel auf der Kegelbasis q . Im Grundriß erscheinen diese Böschungslinien bekanntlich als Epizykloiden (Enneper⁶).

⁵ Vgl. W. Wunderlich, Über die Böschungslinien auf Flächen 2. Ordnung Sitzber. Ak. Wiss. Wien 155, (1947), 309—331, wo sich entsprechende Literaturhinweise finden.

Erfolgt die stereographische Projektion aus dem „Nordpol“ $N(0, 0, r)$ auf die xy -Ebene, so lauten die Abbildungsgleichungen:

$$(2) \quad x^* = \frac{rx}{r-z}, \quad y^* = \frac{ry}{r-z}, \quad z^* = 0.$$

Dieselben stellen gleichzeitig die Parametergleichungen der Traktrix k^* dar, wenn wir für x, y, z die Ausdrücke (1) einsetzen. Die so gewonnene Darstellung ist wesentlich übersichtlicher und bequemer als die durch direkte Integration der Differentialgleichung gefundene bei Loria².

Der Grundkreis g von k^* fällt mit dem Zentralriß c_u^* des „Böschungsfernkreises“ c_u zusammen, den alle Böschungstangenten treffen; für seinen Halbmesser a sowie für die Schleppstrecke l findet man

$$(3) \quad a = r \cdot \operatorname{ctg} \alpha, \quad l = r / \sin \alpha.$$

Da die Umkehrung

$$(4) \quad r = \sqrt{l^2 - a^2}, \quad \cos \alpha = a/l$$

unter der Voraussetzung $l > a$ stets reell ausführbar ist, kann auch jede Kreistraktrix von elliptischem Typ als stereographische Projektion einer sphärischen Böschungslinie erhalten werden. Da die konstruktive Behandlung der sphärischen Kreisrolung mit darstellend-geometrischen Hilfsmitteln leicht durchzuführen ist, werden mittelbar auch die elliptischen Kreistraktren zeichnerisch beherrscht.

Die Grenzkreise sind die Bilder des Kreispaars $q_{1,2} = [\Phi\Gamma]$ und haben die Radien $r_{1,2} = l \pm a = r \operatorname{ctg} \alpha/2$, bzw. $r \operatorname{tg} \alpha/2$. — Die Wendepunkte von k^* röhren von jenen Punkten W der Böschungslinie her, deren Schmiegebenden projizierend sind, also durch N gehen. Da alle Schmiegebenden den Böschungskreis c_u berühren, werden die Wendetangentialen der Traktrix gleichzeitig Tangenten des Grundkreises $g = c_u^*$ sein; daß für eine die Grundkurve berührende Lage der Schleppstrecke $A B$ das Krümmungszentrum M ins Unendliche rückt, ist auch unmittelbar aus Fig. 1 zu ersehen. Wie aus der in Fig. 2 eingezeichneten besonderen Lage W_0 ersichtlich ist (die zu einer aufrüpprojizierenden Stellung der rollenden Kreisscheibe ge-

hört), liegen die fraglichen Punkte W in der Parallelkreisebene $\mathcal{Z} = r \cos^2 \alpha$; die Umklappung lehrt gleichzeitig, daß der Wälz-winkel $r' \tau$ bis auf Vielfache von 2π gleich $\pm \alpha$ ist. Damit erklärt sich die eingetragene Konstruktion der scheinbaren Wendepunkte W^* ; diese liegen auf dem „Wendekreis“ mit dem Radiusquadrat $a^2 + l^2$.

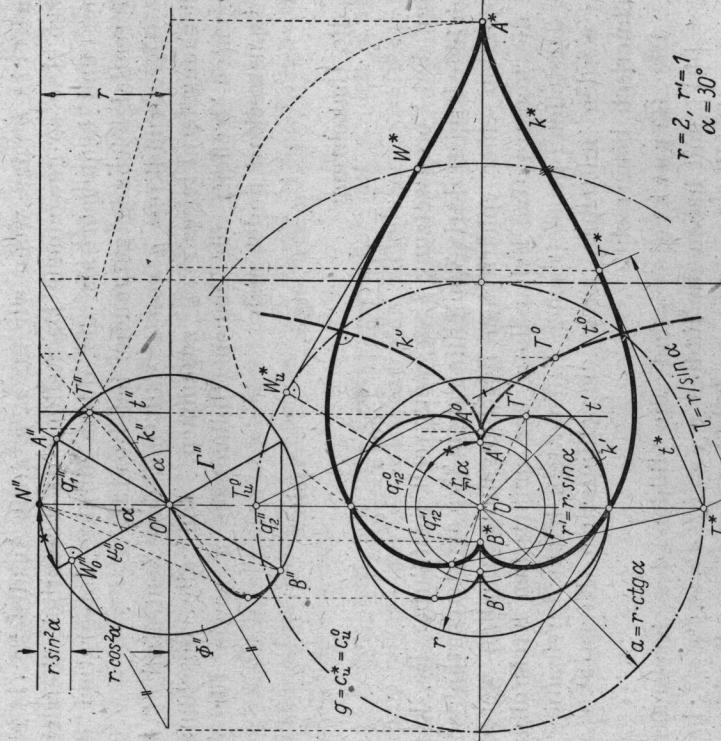


Fig. 2. Algebraische Kreistraktrix 6. Ordnung und 6. Klasse
($a:l = \sqrt[3]{3}:2$).

Die räumliche Spiegelung der Böschungslinie k an der Äquatorebene ist aus Symmetriegründen gleichwertig mit einer Drehung um den Winkel $\pm \frac{r-r'}{r'} \pi$. Da sich die Spiegelung der Kugel im stereographischen Bild als Inversion am Äquator äußert, kann die elliptische Traktix k^* in erweitertem Sinn

als anallagmatisch angesehen werden, da sie durch eine Inversion zwar im allgemeinen nicht in sich selbst, jedoch stets in eine kongruente Kurve übergeführt werden kann.

Die Gleichungen (1) und (2) lassen erkennen, daß unter den Böschungslinien und Schleppkurven algebraische Vorkommen, wenn nämlich das Verhältnis $r'/r = \sin \alpha$ einen rationalen Wert besitzt. Setzen wir in diesem Falle r und r' als ganze, positive und teilerfremde Zahlen voraus, so wird die Ordnung der Traktix durch $2(r+r')$ angegeben; sie ist rational und vollzirkular, besteht aus $2r'$ kongruenten Bögen und schließt sich nach $r-r'$ Umläufen. — Der einfachste Fall ergibt sich für $\alpha = 30^\circ$ ($r=2$, $r'=1$) und ist in Fig. 2 dargestellt. Die zweispitzige, herzförmige Schleppkurve k^* ist von 6. Ordnung, und trizirkular. Die zugehörige Böschungslinie k ist eine Raumsextik mit Spitzen in den absoluten Punkten der Grundebene, die im Grundriß als Nephroide (zweispitzige Epizykloide) k , im Aufriß als doppelt überdeckte kubische Parabel k' erscheint; ihre Projektion k^0 aus dem Hauptpunkt O auf eine waagrechte Ebene ist die Zissoidie des Diokles, die somit gemäß Satz 2 als elliptische Kreisevolvente angesprochen werden kann.

IV. Böschungslinien auf dem zweischaligen Drehhyperboloid. Ersetzen wir in (1) r' durch $r'i$ und gleichzeitig x durch xi und y durch yi — was geometrisch einer imaginären axialen Streckung \Im entspricht —, so gelangen wir zu den Böschungslinien auf dem zweischaligen Hyperboloid $x^2 + y^2 - z^2 + r'^2 = 0$:

$$\begin{aligned} x &= r' ch r' \tau \cos r \tau + r sh r' \tau \sin r \tau, \\ y &= r' ch r' \tau \sin r \tau - r sh r' \tau \cos r \tau, \\ z &= \pm \sqrt{r'^2 + r'^2} \cdot ch r' \tau. \end{aligned} \quad (5)$$

Für den konstanten Böschungswinkel α gegen die (waagrechte) xy -Ebene gilt:

$$\operatorname{ctg}^2 \alpha = 1 + \left(\frac{r}{r'} \right)^2. \quad (6)$$

Im Grundriß erscheinen diese Böschungslinien bekanntlich als Parazykloiden (Enneper⁶).

Als „Böschungskreis“ c_u bezeichnen wir wieder jenen Fernkreis, den alle Böschungstangenten treffen. Die Berührungs-

kegelschmette h der dem Hyperboloid Φ aus den Punkten von c_u umschriebenen Zylinder bilden das zu den Böschungslinien konjugierte Kurvensystem. Sie erfüllen eine Drehschar und werden von den Tangentialebenen des durch Polarisation vom e_u an Φ hervorgehenden Kegels Γ aus der Grundfläche ausgeschnitten.⁵

Bilden wir nunmehr das Hyperboloid stereographisch aus dem Scheitel $N(0, 0, r)$ auf die xy -Ebene ab — die Abbildungsgleichungen werden wieder durch (2) dargestellt —, dann wird aus dem System der Hyperbeln h eine Drehschar von Kreisen h^* ; da ferner konjugierte Flächentangenten senkrechte Bilder haben, geht jede Böschungslinie k in eine Orthogonaltrajektorie der Kreisschar, also in eine Kreistraktrix k^* , über. Die Schleppkurve ist diesmal von hyperbolischem Typ.

Satz 4. Die stereographische Projektion der Böschungslinien eines zweischaligen Drehhyperboloides mit lotrechter Achse führt auf Kreistraktrizien von hyperbolischem Typ.

Für den Halbmesser a des Grundkreises $g = c_u^*$ und die Schleppstrecke l findet man

$$(7) \quad a = r \cdot \operatorname{ctg} \alpha, \quad l = \frac{r}{\sin \alpha} \sqrt{\cos 2\alpha}.$$

Umgekehrt ergibt sich

$$(8) \quad r = \sqrt{a^2 - l^2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{a} \sqrt{a^2 - l^2},$$

so daß jede Kreistraktrix hyperbolischen Typs ($l < a$) erhalten werden kann. Der asymptotische Kreis (Hauptkreis) ist die Projektion des Fernkegelschnittes von Φ und hat daher den Halbmesser r ; „äußere“ Schleppkurven röhren von den Böschungslinien des oberen Flächemantels her, „innere“ hingegen von denen des unteren. Inversion am Hauptkreis vertauscht die beiden Formen.

Die Parametergleichungen der Kreistraktrizien vom hyperbolischen Typ werden durch (2) und (5) dargestellt. Die Kurven sind immer transzendent und besitzen keine reelle Drehsymmetrie, lediglich eine Spiegelsymmetrie bezüglich der ein-

zigen reellen Spitzentangente. Die Wendepunkte liegen wieder auf dem Kreis mit dem Radiusquadrat $a^2 + l^2$.

V. Böschungslinien auf dem Drehpolytop. Der Grenzfall des Drehpolytopes $x^2 + y^2 = 2p z$ ist rasch erledigt. Die zu den unter dem Winkel α gegen die xy -Ebene ansteigenden Böschungslinien k konjugierten Kurven sind die Berührungslien der aus Böschungstangenten gebildeten umschriebenen Zylinder, also ∞^1 Parabeln h einer Drehschar. Da konjugierte Richtungen im Grundriß senkrecht erscheinen, sind die Grundrisse k' der Böschungslinien die Orthogonaltrajektorien der Tangenten h' eines gewissen Kreises ($x^2 + y^2 = p^2 \operatorname{tg}^2 \alpha$), mithin Kreisevolventen (Huth⁵).

Hieraus fließt die Parameterdarstellung einer solchen Böschungslinie, deren Anfang in der yz -Ebene liegt:

$$(9) \quad \begin{aligned} x &= r(\cos \tau + \tau \sin \tau), \\ y &= r(\sin \tau - \tau \cos \tau), \\ z &= \frac{r}{2} \operatorname{tg} \alpha (1 + \tau^2), \end{aligned} \quad \text{mit } r = p \operatorname{tg} \alpha.$$

Wenden wir hingegen wieder die stereographische Projektion aus dem Flächenscheitel O an, die ja konjugierte Richtungen ebenfalls normal erscheinen läßt, so bildet sich jede Böschungslinie k als Orthogonaltrajektorie k^* einer Drehschar von Kreisen h^* ab, die einen Punkt gemeinsam haben; also als Kreistraktrix von parabolischem Typ.

Satz 5. Die stereographische Projektion der Böschungslinien eines Drehpolytopes mit lotrechter Achse ist eine Kreistraktrix parabolischen Typs („Tractrix complicata“).

Ihre Gleichungen leiten sich aus (9) mittels der Abbildungsformeln ab, die für die Bildebene $z = m$ lauten:

$$(10) \quad x^* = \frac{mx}{z}, \quad y^* = \frac{my}{z}, \quad z^* = m.$$

Die Schleppkurve ist demnach transzendent und weist nur die Spiegelsymmetrie bezüglich der x -Achse auf, die mit der (einzigsten) Spitzentangente zusammenfällt. Grundkreishalbmesser und Schleppstrecke haben den Betrag $a = l = m \operatorname{ctg} \alpha$; der Zentralabstand der Spitze ist $2a$, der des Wendepunktes $a\sqrt{2}$.

Die parabolische Kreistraktrix ist nicht anallagmatisch, sondern geht, wie schon erwähnt wurde, durch Inversion vom asymptotischen Punkt aus in eine Kreisevolvente über.

Denkt man sich die Böschungslinie auf der spiegelnden Innenseite des Paraboloides aufgezeichnet, dann erscheint bei achsenparalleler Blickrichtung ihr Spiegelbild als Tractrix *compliata*.

VI. Nichteuklidische Kreistraktrizen. Wir gehen von einer Böschungslinie k auf einer Drehfläche 2. Grades Φ mit lotrechter Achse aus und betrachten ihre Zentralprojektion k^c aus einem Achsenpunkt C auf eine waagrechte Bildebene. Diesmal sei jedoch — zum Unterschied von der stereographischen Abbildung — C kein Flächenpunkt. Der scheinbare Umriß Φ^c der Grundfläche ist dann ein nichtzeraffender Kreis, den wir als absolutes Gebilde einer nichteuklidischen Metrik Cayley-Kleinscher Prägung ansehen (vgl. Abschn. II). Unsere Abbildung hat zwei fundamentale Eigenschaften:

A. Konjugierte Richtungen der Fläche haben nichteuklidisch-normale Bilder.

B. Die ebenen Schnitte der Fläche haben i. a. Bildkegelschnitte, die Φ^c doppelt berühren, mithin als nichteuklidische Kreise anzusehen sind⁶.

Da sich nun insbesondere auch die zu den Böschungslinien konjugierten Kegelschnitte h als nichteuklidische Kreise h^c abilden, die eine Drehschar erfüllen, ergibt sich sofort der

Satz 6. *Projiziert man die Böschungslinie k einer Drehfläche 2. Grades Φ mit lotrechter Achse aus einem allgemeinen Achsenpunkt auf eine Ebene, so erhält man eine nichteuklidische Kreistraktrix k^c im Sinne jener Cayley-Kleinschen Maßbestimmung, die sich auf den scheinbaren Umriß von Φ als absolutes Gebilde gründet. Diese Metrik ist elliptisch, bzw. hyperbolisch, wenn der Augpunkt innerhalb, bzw. außerhalb von Φ liegt. Der Grundkreis der Schleppkurve ist der Zentralriß des Böschungskreises; die Tractrix selbst ist vom elliptischen, bzw. hyperbolischen Typ.*

Der Grundkreis der Schleppkurve ist die Projektion des Polen der Schnittebene. Im hyperbolischen Fall (Φ^c reell) ist der erweiterte Kreisbegriff zu verwenden, der auch die Abstandslinien umfaßt.

parabolischem oder hyperbolischem Typ, je nachdem die Grundfläche ein Ellipsoid, Paraboloid oder zweischaliges Hyperboloid ist.

„Allgemeine Lage“ des Achsenpunktes C bedeutet: Endlich, vom Mittelpunkt verschieden und nicht der Fläche angehörend. Nehmen wir C nämlich im Fernpunkt der Achse an, dann artet der Grundkreis e_u^c in eine doppelt zählende Gerade aus; der Parallelriß der Böschungslinie kann dann als Schleppkurve dieser Geraden aufgefaßt werden. Fällt C hingegen in die Flächenmitte, so werden die Hilfskreise h^c gerade und wir gelangen zu Kreisevolventen⁶.

Umgekehrt kann — unter der einzigen Einschränkung, daß sie im hyperbolischen Fall einen eigentlichen Mittelpunkt hat — jede nichteuklidische Kreistraktrix als Projektion einer Böschungslinie gemäß Satz 6 gewonnen werden. Wir denken uns zu diesem Zweck zunächst durch eine Kollineation das komplexe Paar der Berührungs punkte von Grundkreis g und Maßkegel schnitt u in die absoluten Kreispunkte geworfen; in der so normierten Annahme sind dann beide Kurven euklidische Kreise mit der gemeinsamen Mitte O , die auch den Mittelpunkt der gesuchten Grundfläche Φ abgeben soll (vgl. Fig. 3 und 4). Nunmehr schlagen wir um einen Punkt M_u^c von g den (nicht-euklidischen) Kreis h^c mit der Schleppstrecke l als Radius und bestimmen die Polare m_u^c von O bezüglich h^c . Da O der Mittelpunkt des Flächenkegelschnittes h ist, stellt m_u^c den Zentralriß der Ferngeraden m_u der Kegelschmittebene μ dar, während M_u^c den Fluchtpunkt der zu μ konjugierten Richtung M_u abgibt. Das Zentralbild des Fernkreises von Φ ist somit durch jenen Kreis um O festgelegt, für welchen M_u^c und m_u^c Pol und Polare sind; dessen Halbmesserquadrat beträgt $d^2 = OM_u^c \cdot Om_u^c$ und ist negativ, wenn M_u^c und m_u^c durch O getrennt werden, sonst positiv. Im ersten Fall liegt ein elliptischer Schleppkurventyp vor und Φ ergibt sich als Kugel, wenn die Augdistanz $OC = |d|$ angenommen wird. Im zweiten Fall handelt es sich um einen hyperbolischen Typ und zu $OC = d$ gehört ein gleichseitiges zweischaliges Drehhyperboloid Φ . Im Grenzfall $Om_u^c = 0$ tritt eine Schleppkurve parabolischen Typs auf und die zu beliebiger Augdistanz gehörige Grundfläche ist immer ein Dreh-

⁶ Der nichteuklidische Mittelpunkt eines solchen Kreises ist die Projektion des Polen der Schnittebene. Im hyperbolischen Fall (Φ^c reell) ist der erweiterte Kreisbegriff zu verwenden, der auch die Abstandslinien umfaßt.

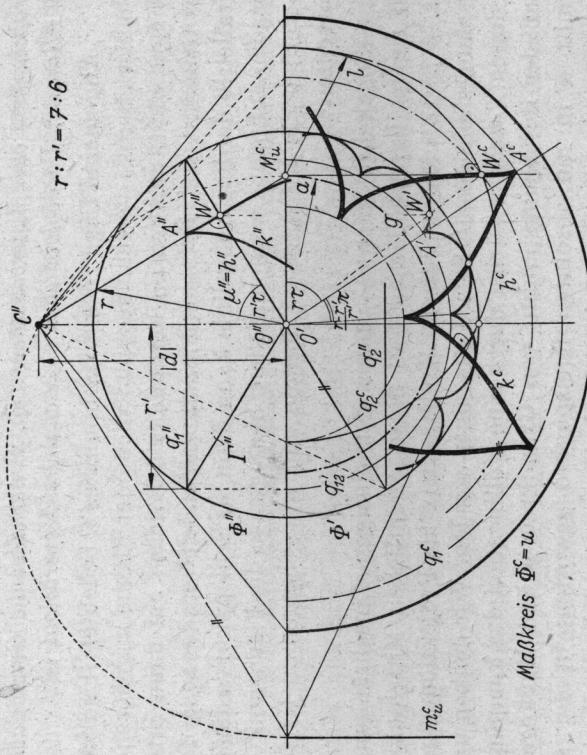


Fig. 3. Hyperbolische Kreistraktrix von elliptischem Typ.

paraboloid. — Zur gefundenen Grundfläche Φ ist nun noch der Böschungsfunktion c_u durch den Richtkegel $[Cg]$ hinzufügen. Nachdem so die normierte Annahme erledigt ist, kann durch einfache Verlegung der Bildebene auch die ursprüngliche, dazu kollineare erfaßt werden.

Fig. 3 gibt eine hyperbolische Kreistraktrix von elliptischem Typ wieder, Fig. 4 eine elliptische von hyperbolischem. Die Konstruktion der Wendepunkte geht ähnlich wie bei den euklidischen Schleppkurven vor sich. — Hyperbolische Schleppkurven, deren Grundkreise einen uneigentlichen oder unendlich fernen Mittelpunkt besitzen, könnten auf Böschungslinien von allgemeinem Flächen 2. Grades zurückgeführt werden.

Durch Ausübung einer passenden perspektiven Kollination mit waagrechter Fixebene kann jede der benützten Drehflächen 2. Grades in eine Kugel transformiert werden. Da das System der Kegelschnitte h dabei in eine Drehschar von Kugelkreisen übergeht und konjugierte Richtungen auf der

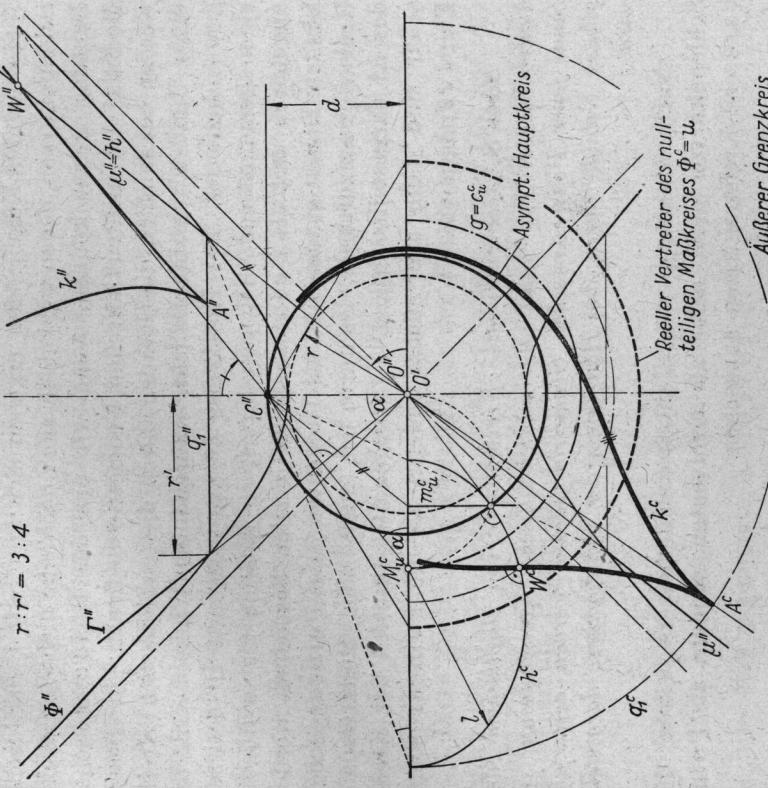


Fig. 4. Elliptische Kreistraktrix von hyperbolischem Typ.

Kugel normal sind, werden die Böschungslinien in sphärische Kreistraktrizien übergeführt (Abschn. II). Denken wir uns das Auge C mittransformiert, so erkennen wir in Verallgemeinerung von Satz 2:

Satz 7. *Die Zentralprojektion einer sphärischen Kreistraktrix aus einem allgemeinen Achsenpunkt auf eine Ebene ist eine nicht-euklidische Kreistraktrix im Sinne jener Cayley-Klein'schen Metrik, die sich auf den Kugelmuriß gründet.*

Im besonderen ist also der Normalriß auf die Grundkreisebene eine hyperbolische Kreistraktrix, die gnomonische Projektion (aus der Kugelmitte) hingegen eine elliptische. Liegt das

Auge auf der Kugel, dann ergeben sich laut Satz 1 euklidische Schleppkurven, denen wir jedoch auch noch eine nichteuklidische Deutung geben können, wenn wir uns des Poincaré'schen Modells⁴ der nichteuklidischen Geometrie bedienen: In diesem werden bekanntlich die Geraden durch die (euklidischen) Kreise eines Bündels versinnbildlicht, während die Winkelmetrik die gewöhnliche ist. Die Hilfskreise h^* aus Abschnitt II besitzen einen gemeinsamen Orthogonalkreis, so daß sie einem Bündel angehören und als Poincaré'sche Geraden bezeichnet werden können. Diese Geraden sind als Tangenten jenes Poincaré'schen Kreises q^* aufzufassen, der durch das (euklidische) Hüllkreispaar der h^* dargestellt wird. Die Orthogonaltrajektorien der Kreisscharen sind dann aber nichts anderes als die Poincaré'schen Evolventen von q^* .

Satz 8. Jede euklidische Kreistraktrix von elliptischem oder hyperbolischem Typ kann als nichteuklidische Kreisevolute im Sinne jener Poincaré'schen Geometrie gedeutet werden, deren absolutes Gebilde durch den Hauptkreis der Schleppkurve dargestellt wird.

Nach Änderung des Hauptkreishalbmessers wären die Schleppkurven nicht mehr als Evolventen, sondern als Poincaré'sche Kreistrakttrizien anzusehen.

VII. Evoluten der Kreistrakttrizien. Wir gehen von einer unserer Flächen 2. Grades Φ aus und betrachten die ihr längs einer Böschungslinie k umschriebene Torse Θ . Diese kann als das Polargebilde von k bezüglich Φ aufgefaßt werden. Ihre Erzeugenden s sind die zu den Böschungstangenten t konjugierten Flächentangenten, sie berühren somit auch den zum Böschungskreis c_u polaren Kegel, bzw. Zylinder Γ , und dieser trägt die Gratlinie f von Θ . Zwei benachbarte Tangenten t spannen ja eine Schmiegebene σ von k auf, und dieser entspricht in der Polarität als Schnitt zweier Nachbarerzeugenden s ein Punkt S von f ; da σ eine Berührebene von c_u ist, liegt S auf Γ .

Bei Zentralprojektion aus einem Achsenpunkt C bildet sich die Torsenerzeugende s als Normale der Schleppkurve k^e ab, und zwar in der auf dem Flächenumriß Φ^e basierenden Metrik.

Die Evolute der Kreistraktrix k^e fällt demnach mit dem Zentralriß der Gratlinie f von Θ zusammen.

Besonders übersichtliche Verhältnisse treten bei den Schleppkurven vom elliptischen Typ auf, weil hier die Grundfläche Φ als Kugel vorausgesetzt werden kann. Wie in Abschnitt III auseinandergesetzt wurde, entsteht jede sphärische Böschungslinie k als Bahn eines Umfangspunktes der auf dem Drehkegel Γ rollenden Kreisscheibe h . Nun ist die zur Bahntangente t konjugierte Torsenerzeugende s offenbar eine bestimmte Tangente von h ; stellen wir sie uns mit h starr verbunden und eingefärbt vor, so ist die Gratlinie f der von ihr überstrichenen Torse Θ einfach die Abdruckspur auf Γ , also eine geodätische Linie von Γ .

Diese Vorstellung gestattet, zu den Gleichungen (1) von k sofort die Gleichungen von f hinzuzufügen, denn ∂_S hat die Länge $r/\cos r\tau$, den (geographischen) Längenwinkel $\varphi = r\tau$ und die konstante Poldistanz α :

$$(11) \quad x = \frac{r' \cos r\tau}{\cos r'\tau}, \quad y = \frac{r' \sin r\tau}{\cos r'\tau}, \quad z = \frac{r \cos \alpha}{\cos r'\tau}.$$

Der Grundriß f' hat in Polarkoordinaten R, φ die Gleichung

$$(12) \quad R \cos \lambda \varphi = r' \quad \text{mit} \quad \lambda = r'/r = \sin \alpha,$$

ist also eine sogenannte Ährenkurve⁷.

Der Zentralriß f^e aus einem Achsenpunkt $C(0, 0, d)$ auf die Äquatorebene $z = 0$ ergibt sich dann aus (11) über die Abbildungsgleichungen

$$(13) \quad x^* = \frac{d \cdot x}{d - z}, \quad y^* = \frac{d \cdot y}{d - z}.$$

Als Polargleichung von f^e findet man

$$(14) \quad R = \frac{d \cdot r'}{d \cos \lambda \varphi - r \cos \alpha}.$$

Die Evolute f^e der Schleppkurve k^e ist demnach — wenigstens

⁷ G. Loria, a. a. O.², Bd. I, 367; a. a. O.³, 215. — Die Ährenkurven von Aubry, 1895 entstehen durch $1/\lambda$ -fache Winkelstreckung von Geraden, als Polarkurven von (Epi-)Zykloiden und als Inverse von Rosenkurven (Rhodoneen). Man sieht übrigens unschwer ein, daß auch die Spurkurve der Torse Θ in der Äquatorebene der Grundkugel eine Ährenkurve derselben Art ist.

in der durch Annahme der Bildebene $z = 0$ normierten Gestalt — ein winkelgestreckter Kegelschnitt. Die Winkelstreckung vom Betrag $1 : \lambda$ erfolgt vom Brennpunkt O aus; die numerische Exzentrizität beträgt $d/r \cos \alpha$. Da die Winkelstreckung im nichteuklidischen Fall ebenso gut euklidisch wie auch nichteuklidisch aufgefaßt werden kann, braucht man sich nicht auf die Äquatorebene als Bildecke zu beschränken und kann auch nichtnormierte Traktrizen zulassen.

Satz 9. *Die Evolute einer euklidischen Typs ist ein winkelgestrechter Kegelschnitt und ergibt sich als Zentralprojektion einer Drehkegelgeodätischen.*

Die euklidische Kreistraktrix tritt als stereographische Projektion von k auf ($d = r$); ihre (gewöhnliche) Evolute ist eine winkelgestreckte Hyperbel und wurde von Morley¹ als „Newton'sche Kettenlinie“ gekennzeichnet, nämlich als Form, die eine homogene Kette unter dem Einfluß einer Zentralbeschleunigung annimmt, welche dem Quadrat der Entfernung umgekehrt proportional ist.

Der Übergang zum hyperbolischen Typ vollzieht sich nach Abschnitt IV durch die imaginäre Affinität \mathfrak{J} . Die dem zweischaligen Drehhyperboloid $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ längs einer Böschungslinie k (5) angeschriebene Torse Θ hat als Gratlinie f die Kurve

$$(15) \quad x = \frac{r' \cos r\tau}{\operatorname{ch} r'\tau}, \quad y = \frac{r' \sin r\tau}{\operatorname{ch} r'\tau}, \quad z = \pm \sqrt{r^2 + r'^2},$$

die auf einem Drehkegel Γ liegt und eine Pseudogeodätische desselben darstellt, d.h. eine Extreme in der durch das Längenelement $ds^2 = dx^2 + dy^2 - dz^2$ definierten Metrik, die übrigens E. Müller im Rahmen seiner Zyklographie unter dem Namen „C-Metrik“ ausgiebig verwendet hat.⁸

Der Grundriß f' hat die Polargeichung

$$(16) \quad R \cdot \operatorname{ch} \lambda \varphi = r'$$

ist also eine Poinsot'sche Spirale.⁹ — Der Zentralriß f'' aus

⁸ Müller-Krames, Die Zyklographie (Vorlesungen über Darstellende Geometrie, Bd. II, Wien 1929).
⁹ H. Wieleitner, Spezielle Ebene Kurven (Samm. Schubert 56, Leipzig 1908), 263. Diese Doppelspirale tritt als Normalriß der Kugelloxodrome auf die Äquatorebene auf.

einem Achsenpunkt $C(0, 0, d)$ auf die Grundebene $z = 0$ ergibt sich wieder über die Abbildungsformeln (13) und stellt die Evolute

$$(17) \quad R = \frac{d \cdot r'}{d \operatorname{ch} \lambda \varphi \mp \sqrt{r^2 + r'^2}}$$

der Kreistraktrix k'' dar.¹⁰

Der parabolische Typ der Schleppkurven erfordert eine eigene Behandlung. Die dem Drehparaboloid $x^2 + y^2 = 2p z$ längs einer Böschungslinie k (9) umgeschriebene Torse Θ hat als Gratlinie f die Kurve

$$(18) \quad \begin{aligned} x &= r \cos \tau \\ y &= r \sin \tau \\ z &= \frac{r}{2} \operatorname{tg} \alpha \cdot (1 - \tau^2) \end{aligned}$$

Man findet nämlich den Grapunkt S einer Erzeugenden s als Berührungs punkt mit dem zum Böschungskreis c_n polaren Drezylinder Γ , der von den Ebenen der in Abschnitt V erwähnten Hilfsparabeln h eingehüllt wird; da s eine Parabeltangente ist, liegt S auf der Parabelachse, und zwar um denselben Betrag unterhalb des Parabelscheitels wie der Berührungs punkt darüber.

Wie man aus (18) abliest, geht die Gratlinie f bei der Entwicklung von Γ in eine Parabel über.

Der Zentralriß f'' aus einem Achsenpunkt $C(0, 0, d)$ auf einer achsennormalen Ebene hat die Polargeichung

$$(19) \quad R[d - \frac{r}{2} \operatorname{tg} \alpha \cdot (1 - \tau^2)] = \text{const}$$

und stellt die Evolute der zugehörigen Kreistraktrix k'' dar. Es handelt sich um die Inverse einer Galileischen Spirale.¹¹

Satz 10. *Die Evolute einer euklidischen oder nichteuklidischen Kreistraktrix parabolischen Typs ist die Zentralprojektion einer auf einen Dreheylinder aufgewickelten Parabel aus einem Achsenpunkt.*

¹⁰ Eine solche Evolute (für den euklidischen Fall $d = r$) zeigt G. Loria, a. a. O.², in Bild 49, doch bezeichnet er sie dort wie auch bei der Herleitung auf S. 197 f. irrtümlicherweise als Evolvente der Traktrix.

¹¹ G. Loria, a. a. O.³, Bd. II, 47.