Kurven mit kreisförmiger Holditchiane

Herrn Prof. H.R. Müller zum 75. Geburtstag

Von **Walter Wunderlich,** Wien

Vorgelegt von H.-J. Kanold
(Eingegangen am 11.9.1985)

1. H. Holditch [2] hat 1858 folgenden merkwürdigen Satz gefunden: Werden in der euklidischen Ebene die Endpunkte einer Strecke AB mit der unveränderlichen Länge $\overline{AB}=a+b$ einmal längs einer Eilinie k_0 herumgeführt, so beschreibt ein auf der Strecke befestigter Zwischenpunkt C $(\overline{AC}=a,\ \overline{CB}=b)$ eine geschlossene Kurve k_1, und der Flächeninhalt des von k_0 und k_1 berandeten Ringgebietes beträgt – unabhängig von der Gestalt der Ausgangskurve k_0 – $F=ab\pi$.

Dieser Satz wurde späterhin verschiedentlich betrachtet und erweitert, wobei wichtige Beiträge dem Jubilar zu verdanken sind [3].

Ein auf praktische Anwendungen abzielender Aufsatz von M. A. Hacar Benitez [1] schreibt dem Holditch-Prozeß eine glättende Wirkung zu und wiederholt ihn zu diesem Zweck, wobei er den Eindruck gewinnt, daß die „höheren Holditchianen“ $k_2, k_3, \dots$ zunehmend kreisähnlicher werden. Abgesehen davon, daß der Glättungseffekt keineswegs immer eintritt, ist der Prozeß wegen der ständig kleiner werdenden Kurven nicht unbeschränkt fortsetzbar. Für einen *Kreis* k_0 sind natürlich die abgeleiteten Holditchianen $k_1, k_2, \dots$ wieder Kreise, doch erhebt sich die Frage, ob es über-

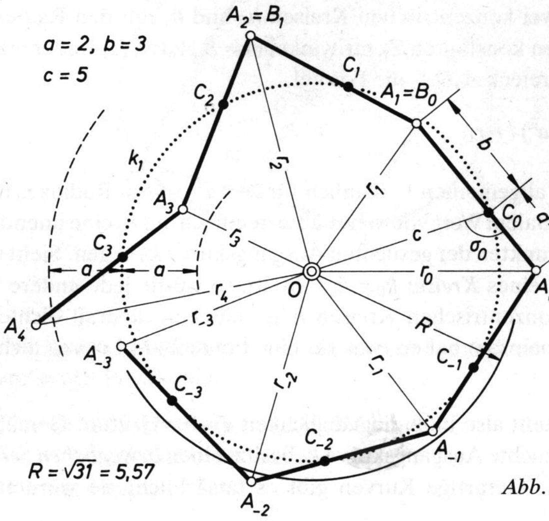

Abb. 1

haupt vom Kreis verschiedene Ausgangskurven k_0 gibt, die einen Kreis als Holditchiane k_1 liefern. Diese Frage soll hier geklärt werden.

2. Sei also k_1 ein vorgelegter *Kreis* (Mittelpunkt O, Radius c) und $A_0B_0 = A_0A_1$ eine Lage der bewegten Strecke AB, deren Punkt C sich an einer Stelle C_0 auf k_1 befindet (Abb. 1). Vor- und zurückschreitend lassen sich dann weitere Lagen A_nB_n leicht konstruieren, wodurch man zusätzliche Punkte $B_n = A_{n+1}$ der gesuchten Ausgangskurve k_0 gewinnt. Setzt man – unbeschadet der Zweideutigkeit jedes Einzelschrittes – $\overline{OA}_n = r_n$, so erhält man aus dem als gegeben angenommenen Anfangswert r_0 zunächst r_1 durch Anwendung des Kosinussatzes in den Dreiecken OA_0C_0 und OC_0A_1 aus der Relation

$$ar_1^2 + br_0^2 = (a+b)\,(ab+c^2). \tag{1}$$

Der Sonderfall $r_1 = r_0$ tritt ein, wenn $r_0^2 = ab + c^2 = R^2$; dann liegen auch alle übrigen Punkte A_n auf einem Kreis (k_0) mit dem Radius R.

Durch Iteration von (1) und Induktion gelangt man nach Einführung des Quotienten $b/a = q$ zu der allgemeineren Formel

$$r_n^2 = R^2 + (-q)^n(r_0^2 - R^2) \quad \text{mit } R^2 = ab + c^2,\ q = b/a, \tag{2}$$

die auch für negative n gilt.

Unter der Annahme $b > a$ $(q > 1)$ erkennt man, daß die Folge der Punkte A_n mit wachsendem n nach endlich vielen Schritten abbricht, weil r_n einmal aus dem Realitätsintervall $c - a \leq r \leq c + a$ heraustritt (Abb. 1). Mit abnehmendem n hingegen nähert sich die Punktfolge asymptotisch dem Kreis mit dem Radius R. Hieraus schließt man auf

Satz 1: *Für $a \neq b$ existieren außer Kreisen keine Kurven mit kreisförmiger Holditchiane.*

3. Zu untersuchen bleibt also nur noch der Fall $a = b$ $(q = 1)$. Hier liegen die Punkte A_n abwechselnd auf zwei konzentrischen Kreisen h_0 und h_1 mit den Radien r_0 bzw. $r_1 = \sqrt{2R^2 - r_0^2}$. Für den konstanten Zentriwinkel $\omega = \sphericalangle A_nOA_{n+1}$ findet man mittels des Kosinussatzes im Dreieck A_0OA_1 die Formel

$$\cos\omega = (c^2 - a^2)\,/\,r_0r_1. \tag{3}$$

Sie lehrt, daß ω im allgemeinen – nämlich für $c^2 \neq a^2$ – vom Radius r_0 des Kreises h_0 abhängt. Bei irrationalem Wert von ω/π müßte demnach auf h_0 eine unendliche, überall dichte Menge von Punkten der gesuchten Ausgangskurve k_0 liegen. Sieht man von dem trivialen Sonderfall eines *Kreises* $k_0 = h_0 = h_1$ ab, so würde jede andere Kurve k_0 mit unendlich vielen konzentrischen Kreisen h jeweils eine überall dichte Menge von Schnittpunkten gemeinsam haben, was für eine brauchbare Lösung nicht in Betracht kommt.

4. Nach allem steht also bloß die Möglichkeit $a = b = c$ offen. Gemäß (3) ist dann $\omega = \pi/2$, d. h. die gesuchte Ausgangskurve k_0 besitzt einen *beweglichen Sehnenrhombus* $A_0A_1A_2A_3$ (Abb. 2). Derartige Kurven gibt es tatsächlich; sie wurden in anderem

Zusammenhang bereits betrachtet [4] und haben sogar eine praktische Bedeutung für gewisse Nockentriebe [5].

Man denke sich eine solche Kurve k_0 durch ihre *Polargleichung* $r = r(u)$ beschrieben, wobei $r(u)$ eine Funktion mit der Periode $2\omega = \pi$ ist. Für die zu den Argumenten u und $\bar{u} = u + \omega$ gehörenden Zentralabstände r und $\bar{r}$ gilt dann die Beziehung

$$r^2 + \bar{r}^2 = 4a^2. \tag{4}$$

Zieht man neben dieser konstanten Summe der Quadrate auch noch deren veränderliche Differenz

$$r^2 - \bar{r}^2 = 4a^2 \cdot \Delta \quad \text{mit } \Delta(u+\omega) = -\Delta(u) \tag{5}$$

heran, so ergibt sich – nach willkürlicher Wahl einer periodischen, der Nebenbedingung in (5) genügenden *Hilfsfunktion* $\Delta(u)$ – aus (4) und (5):

$$r = a\sqrt{2}\sqrt{1+\Delta(u)}. \tag{6}$$

Das einfachste *Beispiel* liefert die Annahme $\Delta = \varepsilon \cdot \cos 2u$, wobei aus Realitätsgründen $|\varepsilon| < 1$ zu wählen ist. Über $x = r\cos u$ und $y = r\sin u$ gelangt man so zur kartesischen Gleichung

$$(x^2+y^2)^2 = 2a^2\left[(1+\varepsilon)x^2 + (1-\varepsilon)y^2\right] \tag{7}$$

der Lösungskurve k_0. Diese rationale bizirkulare Quartik (mit einem isolierten Doppelpunkt im Ursprung O) ist die wohlbekannte *Boothsche Lemniskate*, erzeugbar als zentrische Inverse oder Fußpunktkurve einer Ellipse. Sie ist streng oval für $|\varepsilon| \leq 1/3$ (Abb. 2).

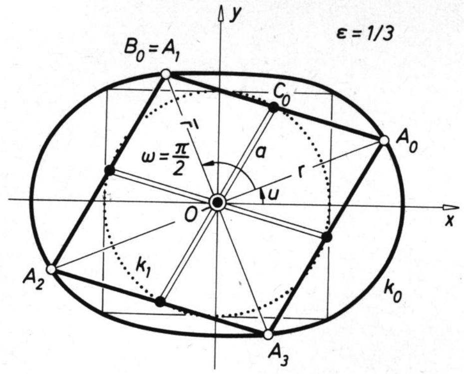

Abb. 2

Beliebig viele weitere *algebraische Lösungskurven* k_0 erhält man mit der Annahme von trigonometrischen Polynomen

$$\Delta = \sum_{j} (\alpha_j \cos 2ju + \beta_j \sin 2ju) \quad \text{mit } j > 0, \text{ ungerade}. \tag{8}$$

Die Ordnung beträgt $4 \max j$.

Zusammenfassend sei festgehalten

Satz 2: *Außer den Kreisen sind die einzigen Kurven k_0, die eine kreisförmige Holditchiane k_1 besitzen, die Kurven mit einem beweglichen Sehnenrhombus. Sie werden beschrieben durch die Polargleichung (6), wobei $\Delta(u)$ eine willkürliche periodische Funktion mit der Eigenschaft $\Delta(u+\pi/2)=-\Delta(u)$ ist, die der Beschränkung $|\Delta(u)|<1$ unterliegt.*

Literatur

[1] M. A. HACAR BENITEZ: Numerosas aplicaciones de un teorema olvidado de geometria. Rev. obras publicas 1980, 415–428.

[2] H. HOLDITCH: Lady's and gentleman's diary for the year 1858. – Geometrical theorem. Q. J. Pure Appl. Math. **2** (1858).

[3] H. R. MÜLLER: Über geschlossene Bewegungsvorgänge. Monatsh. Math. **55**, 206–214 (1951). – Sphärische Kinematik. Berlin, 1962. – Zum Satz von Holditch. Aus TÖLKE-WILLS: Contributions to Geometry. Basel, 1979. – Erweiterung des Satzes von Holditch für geschlossene Raumkurven. Abh. Braunschw. Wiss. Ges. **31**, 129–135 (1980).

[4] W. WUNDERLICH: Ebene und räumliche Kurven mit einem beweglichen geschlossenen Sehnenpolygon. Sb. Österr. Akad. Wiss. **192**, 207–225 (1983).

[5] W. WUNDERLICH: Single-disk cam mechanisms with oscillating double roller follower. Mech. Mach. Theory **19**, 409–415 (1984).