

WUNDERLICH, W.

Ein vierdimensionales Abbildungsprinzip für ebene Bewegungen

Herrn Professor O. BOTTEMA zum 85. Geburtstag gewidmet.

Die Punktbahnen eines ebenen Zwanglaufs π'/π werden gedeutet als verschiedene Parallelprojektionen einer gewissen Bildkurve k in einem vierdimensionalen euklidischen Raum R^4 , der die Rastebene π enthält. Die Projektionsachsen bilden ein elliptisches Strahlennetz im Fernraum des R^4 und sind den einzelnen Punkten der Gangebene π' zugeordnet, während die Punkte von k den einzelnen Lagen von π' entsprechen. Das Abbildungsprinzip erweist sich insbesondere für algebraische Zwangläufe als nützlich und wird durch Beispiele illustriert. Auch die beiden Polkurven der Bewegung sind vom R^4 aus deutbar.

The point paths of a constrained planar motion π'/π are interpreted as different parallel projections of a certain curve k in a Euclidean 4-space R^4 which contains the fixed plane π . The axes of projection form an elliptic linear congruence in the hyperplane at infinity of R^4 . Its rays correspond to the points of the moving plane π' , whereas the points of k are related with the various positions of π' . The mapping principle is particularly useful for algebraic motions and is illustrated by some examples. Both of the polhodes of the motion are also interpreted from the established point of view.

Пути точек вынужденного плоского движения π'/π интерпретируются как параллельные проекции определённой кривой k в четырёхмерном евклидовом пространстве R^4 , содержащем неподвижную плоскость π . Оси проекции составляют эллиптическую сеть лучей в гиперплоскости на бесконечности R^4 и соответствуют отдельным точкам плоскости движения π' , в то время как точки кривой k соответствуют отдельным положениям π' . Принцип отображения оказывается особенно полезным для алгебраических вынужденных движений и демонстрируется на нескольких примерах. Обе полюиды движения могут быть также интерпретированы с указанной точки зрения.

1. Konzept

Betrachtet wird eine beliebige Bewegung π'/π einer starren Gangebene π' gegenüber einer festgedachten, mit ihr vereinigten Rastebene π . Nach Einführung von kartesischen Koordinatensystemen $(O; x, y)$ in π und $(A'; x', y')$ in π' kann jede Lage von π' bezüglich π gekennzeichnet werden durch die Position $A(X, Y) \in \pi$ des Ursprungs $A'(0, 0) \in \pi'$ sowie den Winkel $\varphi = \angle xx'$ der Abszissenachsen (Bild 1). Die Stelle $C(x, y) \in \pi$, an der sich ein Punkt $C'(x', y') \in \pi'$ befindet, ist dann gegeben durch

$$x = x'u - y'v + X, \quad y = x'v + y'u + Y, \quad (1.1)$$

wobei

$$u = \cos \varphi, \quad v = \sin \varphi. \quad (1.2)$$

Bei einem stetigen Zwangslauf π'/π ändert sich die Lage von π' in Abhängigkeit von einem Zeitparameter τ :

$$X = X(\tau), \quad Y = Y(\tau), \quad \varphi = \varphi(\tau); \quad (1.3)$$

diese Funktionen seien als stetig differenzierbar vorausgesetzt. Das Gleichungspaar (1.1) mit $x', y' = \text{const}$ stellt dann die Bahn c dar, die ein gangfester Punkt $C'(x', y') \in \pi'$ in π durchläuft.

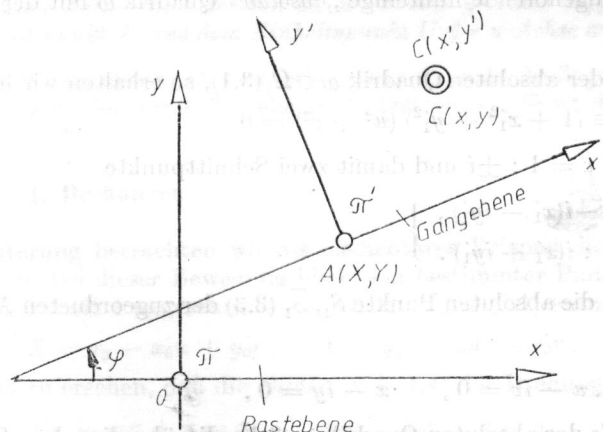


Bild 1

Wir denken uns nun die Rastebene π in einen durch die kartesischen Koordinaten u, v, x, y beschriebenen vierdimensionalen Bildraum R^4 eingebettet und ordnen der zur Zeit τ eingenommenen Lage der Gangebene π' den Bildpunkt $K \in R^4$ mit den Koordinaten

$$u = \cos \varphi(\tau), \quad v = \sin \varphi(\tau), \quad X = X(\tau), \quad Y = Y(\tau) \quad (1.4)$$

zu. Im Zuge der Bewegung durchläuft K die durch (1.4) mit variablem τ beschriebene Bildkurve $k \subset R^4$ des Zwanglaufs π'/π . Umgekehrt legt eine solche Kurve k einen Zwangslauf vollkommen fest, weil sie durch die Koordinaten (1.4) ihrer Punkte die Lagenfolge (1.1) von π' bestimmt. Wegen (1.2) verläuft die Kurve k auf dem Drehhyperzylinder Δ :

$$u^2 + v^2 = 1. \quad (1.5)$$

2. Darstellend-geometrische Deutung

Sei $C'_1(x'_1, y'_1) \in \pi'$ ein beliebiger gangfester Punkt ($x'_1, y'_1 = \text{const}$). Seine augenblickliche Lage $C_1(x_1, y_1) \in \pi$ ist gemäß (1.1) bestimmt durch

$$x_1 = x'_1 u - y'_1 v + X, \quad y_1 = y'_1 u + x'_1 v + Y, \quad (2.1)$$

wobei u, v, X, Y von τ abhängen. Da die Koordinaten x_1, y_1 sich als feste Linearkombinationen der Koordinaten (1.4) des Bildpunktes $K \in k \subset R^4$ darstellen, kann C_1 als *axonometrisches Bild* von K aufgefaßt werden.

Fragen wir aus diesem Anlaß nach *allen* jenen Punkten des R^4 , die ihr — durch die in (2.1) verwendeten Koeffizienten definiertes — axonometrisches Bild in C_1 haben, so lautet die Antwort: Es sind dies jene Punkte, deren Koordinaten u, v, x, y den Bedingungen

$$x'_1 u - y'_1 v + x = x_1, \quad y'_1 u + x'_1 v + y = y_1 \quad (2.2)$$

genügen, also die Punkte der durch das lineare Gleichungspaar (2.2) erfaßten Ebene σ_1 . Diese Ebene enthält neben K auch den Punkt C_1 selbst.

Wird der affine Raum R^4 durch die *Fernhyperebene* Ω projektiv abgeschlossen, die durch die homogenen Koordinatenquadrupel $u : v : x : y$ beschrieben werden mag, so stellt man fest, daß die *Ferngerade* s_1 der Ebene σ_1 , homogen dargestellt durch

$$x'_1 u - y'_1 v + x = 0, \quad y'_1 u + x'_1 v + y = 0, \quad (2.3)$$

nur von C'_1 abhängt und demnach *zeitunabhängig* ist. Die erwähnte axonometrische Abbildung $K \rightarrow C_1$ ist mithin nichts anderes als eine *Parallelprojektion*, die folgendermaßen vor sich geht (Bild 2): Man verbinde den Punkt $K \in k$ mit der zu C'_1 gehörigen Projektionsachse $s_1 \subset \Omega$ (2.3) durch eine Ebene σ_1 und schneide dieselbe mit der Rastebene π ($u = v = 0$). Unter Ablauf der Zeit τ folgt daraus

Satz 1: Die bei einem ebenen Zwangslauf π'/π von einem gangfesten Punkt $C'_1 \in \pi'$ durchlaufene Bahn $c_1 \subset \pi$ ist die Parallelprojektion der Bildkurve $k \subset R^4$ des Zwangslaufs aus der dem Punkt C'_1 zugeordneten Fernachse $s_1 \subset \Omega$ auf die Rastebene $\pi \subset R^4$.

Die Bahnkurve c_1 kann als die Schnittlinie der Rastebene π mit jenem *Hyperzylinder* Γ_1 angesehen werden, der die Projektionsachse s_1 mit der Bildkurve k verbindet. Er besteht aus den Verbindungsebenen σ_1 von s_1 mit den einzelnen Punkten K von k .

Läßt man die Bedingung (1.5) fallen, so bleibt das Abbildungskonzept auch für das Studium von Bewegungen einer ähnlich-veränderlichen Ebene π' brauchbar, also für die *äquiforme Kinematik* („E-Kinematik“ im tschechischen Schrifttum). Für diese Zwecke wurde es — unabhängig vom Autor und ohne Einsatz der Parallelprojektion — von O. BOTTEMA und G. R. VELDKAMP [2] in einem Vortrag auf der Oberwolfacher Kinematik-Tagung 1982 verwendet. Es entfällt dann lediglich die Bindung der Bildkurve k an den Drehhyperzylinder Δ .

3. Struktur des Achsensystems

Nach Erweiterung des bisher stillschweigend als reell angenommenen Bildraums R^4 ins *Komplexe* wird dessen euklidische Metrik geregelt durch die dem Fernraum Ω angehörende nullteilige „absolute“ Quadrik ω mit der Gleichung

$$u^2 + v^2 + x^2 + y^2 = 0. \quad (3.1)$$

Schneiden wir die Projektionsachse $s_1 \subset \Omega$ (2.3) mit der absoluten Quadrik $\omega \subset \Omega$ (3.1), so erhalten wir über

$$u^2 + v^2 + (x'_1 u - y'_1 v)^2 + (y'_1 u + x'_1 v)^2 \equiv (1 + x_1'^2 + y_1'^2)(u^2 + v^2) = 0 \quad (3.2)$$

unter Ausschluß von $x_1'^2 + y_1'^2 + 1 = 0$ zunächst $u : v = 1 : \pm i$ und damit zwei Schnittpunkte

$$\left. \begin{aligned} S_1 \dots u : v : x : y &= 1 : i : -(x'_1 - iy'_1) : -i(x'_1 - iy'_1), \\ \bar{S}_1 \dots u : v : x : y &= 1 : -i : -(x'_1 + iy'_1) : i(x'_1 + iy'_1). \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

Bei Veränderung des Punktes $C'_1(x'_1, y'_1) \in \pi'$ variieren die absoluten Punkte $S_1, \bar{S}_1$ (3.3) der zugeordneten Achse s_1 auf zwei festen Geraden f bzw. $\bar{f}$:

$$f \dots u + iv = 0, \quad x + iy = 0, \quad \bar{f} \dots u - iv = 0, \quad x - iy = 0. \quad (3.4)$$

Es sind dies zwei *konjugiert-hochimaginäre Erzeugende* der absoluten Quadrik ω (3.1), die überdies dem Drehhyperzylinder Δ (1.5) angehören. Unter der vorhin ausgeschlossenen Annahme $x_1'^2 + y_1'^2 + 1 = 0$ würde die Achse s_1 ganz auf ω liegen; die Formeln (3.3) für ihre Treffpunkte mit f und $\bar{f}$ gelten aber trotzdem.

Das System $\mathcal{S}$ aller möglichen Projektionsachsen besteht mithin aus den Treffgeraden der beiden konjugiert-hochimaginären (und daher windschiefen) Geraden f und $\bar{f}$ (3.4). Es handelt sich demnach um ein *elliptisches Strahlennetz* mit den „Brennlinien“ $f, \bar{f}$. Dieses imaginäre Geradenpaar $f, \bar{f}$ spielt auch bei BOTTEMA-VELDKAMP [2] eine entscheidende Rolle. Nach dem Sprachgebrauch der im Fernraum Ω herrschenden elliptischen Metrik Cayley-Kleinscher Prägung sind die Strahlen des Netzes $\mathcal{S}$ untereinander „parallel im Sinne Cliffords“. Je zwei Netzstrahlen s_1, s_2 sind (elliptisch) äquidistant, und irgendzwei Ebenen $\sigma_1 \supset s_1$ und $\sigma_2 \supset s_2$ sind (euklidisch) „äquiangular“; dies bedeutet, daß σ_1 bei Normalprojektion auf σ_2 ähnlich abgebildet wird (und umgekehrt).

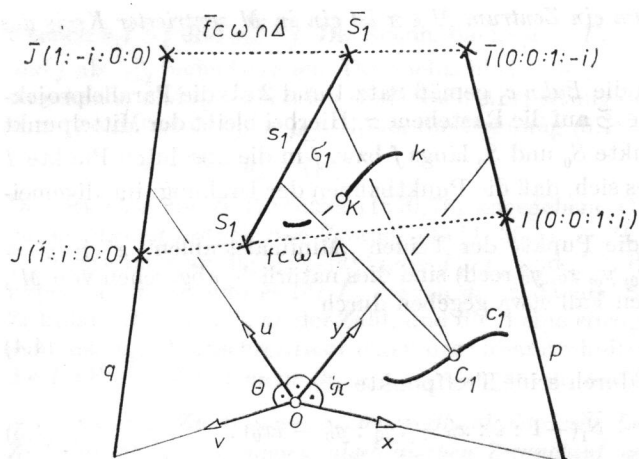


Bild 2

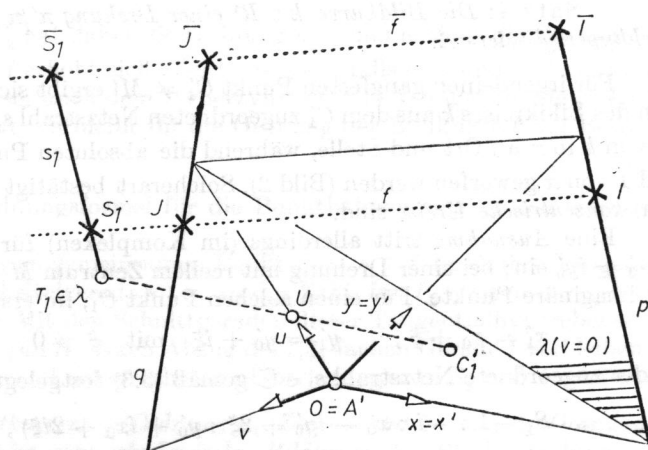


Bild 3

Zu den Strahlen des Achsenetzes $\mathcal{S}$ gehört übrigens auch die Ferngerade p der Rastebene π ($u = v = 0$); ihre Treffpunkte mit den Brennlinien f und $\bar{f}$ sind die absoluten Punkte $I(0 : 0 : 1 : i)$ und $\bar{I}(0 : 0 : 1 : -i)$ von π (Bild 2). Analoges gilt für die Ferngerade q der zu π ganznormalen uv -Ebene θ ($x = y = 0$); sie trifft die Brennlinien in den absoluten Punkten $J(1 : i : 0 : 0)$ und $\bar{J}(1 : -i : 0 : 0)$ von θ . Die Gerade p scheidet allerdings als Projektionsachse aus, während die Gerade q als Achse für die Normalprojektion auf π fungiert und dem Ursprung $A'(0, 0) \in \pi'$ zugeordnet ist. Die Ursprungsbahn $x = X(\tau)$, $y = Y(\tau)$ ist somit — wie schon aus dem Ansatz (1.4) hervorgeht — die Normalprojektion der Bildkurve $k \subset R^4$ auf π . Ansonsten gilt, in Ergänzung zu Satz 1,

Satz 2: Die Punktbahnen eines ebenen Zwangslaufs $\pi' | \pi$ sind verschiedene Parallelprojektionen einer und derselben Bildkurve $k \subset R^4$ auf die Rastebene π . Die Projektionsachsen hängen jeweils von dem bahnerzeugenden Punkt der Gangebene π' ab und erfüllen ein der Fernhyperebene Ω angehörendes elliptisches Strahlnetz $\mathcal{S}$ von Cliffordschen Parallelen, das auch die Ferngerade p von π enthält.

Zur geometrischen Interpretation der durch (2.3) erklärten Zuordnung zwischen einem Punkt $C'_1 \in \pi'$ und dem entsprechenden Netzstrahl $s_1 \in \mathcal{S}$ denke man sich die Gangebene π' samt dem Punkt C'_1 in jene „Nullage“ gebracht, in welcher das Gangkreuz ($A'; x', y'$) mit dem Rastkreuz ($O; x, y$) zusammenfällt. Für diese Lage reduzieren sich die Grundgleichungen (1.1) auf $x = x'$, $y = y'$, sodaß ihr — im Hinblick auf $u = 1$ und $v = X = Y = 0$ — der Bildpunkt $U(1, 0, 0, 0)$ zukommt (Bild 3). Die Nullage von C'_1 erscheint so als die Projektion von U aus der Achse s_1 auf π . Nachdem die projizierende Ebene $s_1 U$ auch den Strahl UC'_1 enthält und dieser die Achse s_1 in jenem Punkt T_1 trifft, der der Hyperebene $U\pi = \Lambda(v = 0)$ angehört (und damit auch deren Fernebene $\lambda = \Lambda \cap \Omega$), gelangt man zu der nachstehenden konstruktiven Regel in

Satz 3: Um den zu einem gegebenen Netzstrahl $s_1 \in \mathcal{S}$ gehörigen Punkt $C'_1 \in \pi'$ in der Nullage zu erhalten, schneide man s_1 mit der Fernebene λ des von der u -, x - und y -Achse aufgespannten Koordinatenraums $\Lambda(v = 0)$ und projiziere diesen Schnittpunkt T_1 aus dem Einheitspunkt U der u -Achse auf die xy -Ebene π .

Für die Umkehrung $C'_1 \rightarrow s_1$ bringe man C'_1 in die Nullage und suche dann den Fernpunkt T_1 der Verbindungsgerade $C'_1 U$ auf; der durch T_1 gehende Netzstrahl $s_1 \in \mathcal{S}$ ist der gesuchte.

4. Drehungen

Zur Erläuterung betrachten wir als elementares Beispiel die Drehung der Gangebene π' um ein festes Zentrum $M(x_0, y_0) \in \pi$. Bei dieser Bewegung bleibt ein bestimmter Punkt $M'(x'_0, y'_0) \in \pi'$ stets an der Stelle M . Aus den (mit dem Index 0 statt 1 angeschriebenen) Gleichungen (2.1) entnimmt man

$$X = x_0 - x'_0 u + y'_0 v, \quad Y = y_0 - y'_0 u - x'_0 v. \quad (4.1)$$

Hieraus ist zu ersehen, daß die Bildkurve k (1.4) der Drehung $\pi' | \pi$ in der durch

$$x'_0 u - y'_0 v + x = x_0, \quad y'_0 u + x'_0 v + y = y_0 \quad (4.2)$$

festgelegten Ebene μ verläuft; dies steht in Einklang mit dem Umstand, daß die Bahn des Punktes M' auf den Punkt M zusammengeschrunpft ist. Die Ferngerade m der projizierenden Ebene μ ist demgemäß die dem Punkt $M' \in \pi'$ zugeordnete Projektionsachse aus dem Strahlnetz $\mathcal{S}$; ihre Treffpunkte mit den Brennlinien $f, \bar{f}$ sind laut (3.3) gegeben durch

$$S_0(-1 : -i : x'_0 - iy'_0 : y'_0 + ix'_0), \quad \bar{S}_0(-1 : i : x'_0 + iy'_0 : y'_0 - ix'_0). \quad (4.3)$$

Da die Bildkurve k auch an den Drehhyperzylinder Δ (1.5) gebunden ist und dieser die absoluten Punkte $S_0, \bar{S}_0$ von μ enthält, ist der ebene Schnitt $k = \mu \cap \Delta$ ein Kreis. Sein Mittelpunkt muß der Achsenebene π von Δ angehören und ist daher mit dem Drehzentrum $M = \mu \cap \pi$ identisch. Wir haben also

Satz 4: Die Bildkurve $k \subset R^4$ einer Drehung π'/π um ein Zentrum $M \in \pi$ ist ein in M zentrierter Kreis des Drehhyperzylinders Δ .

Für irgendeinen gangfesten Punkt $C'_1 \neq M'$ ergibt sich die Bahn c_1 gemäß Satz 1 und 2 als die Parallelprojektion des Bildkreises k aus dem C'_1 zugeordneten Netzstrahl $s_1 \in \mathfrak{S}$ auf die Rastebene π . Hierbei bleibt der Mittelpunkt M von k in π an Ort und Stelle, während die absoluten Punkte S_0 und $\bar{S}_0$ längs f bzw. $\bar{f}$ in die absoluten Punkte I und $\bar{I}$ von π geworfen werden (Bild 2). Solcherart bestätigt es sich, daß die Punktbahnen der Drehung (im allgemeinen) konzentrische Kreise sind.

Eine Ausnahme tritt allerdings (im Komplexen) für die Punkte der beiden „Minimalstrahlen“ $x' \pm iy' = x'_0 \pm iy'_0$ ein; bei einer Drehung mit reellem Zentrum $M(x_0, y_0, x'_0, y'_0)$ reell sind dies natürlich, abgesehen von M' , nur imaginäre Punkte. Für einen solchen Punkt C'_1 , im ersten Fall etwa gegeben durch

$$x'_1 = x'_0 + \xi, \quad y'_1 = y'_0 + i\xi \quad \text{mit} \quad \xi \neq 0, \quad (4.4)$$

ist der zugeordnete Netzstrahl $s_1 \in \mathfrak{S}$ gemäß (3.3) festgelegt durch seine Treffpunkte

$$S_1(-1 : -i : x'_0 - iy'_0 + 2\xi : y'_0 + ix'_0 + 2i\xi), \quad \bar{S}_1(-1 : i : x'_0 + iy'_0 : y'_0 - ix'_0). \quad (4.5)$$

Der Vergleich mit (4.3) lehrt $S_1 \neq S_0$, hingegen $\bar{S}_1 = \bar{S}_0$. Da die Projektionsachse s_1 mit dem zu projizierenden Bildkreis k den Punkt $\bar{S}_0$ gemeinsam hat, reduziert sich der sonst quadratische Projektionshyperzylinder $\Gamma_1 = s_1 k$ auf die Hyperebene $\Gamma_1 = s_1 \mu = f \mu$. Die von C'_1 erzeugte Bahn $c_1 = \Gamma_1 \cap \pi$ ist daher die Minimalgerade MI ; dies wäre an Hand der Bewegungsgleichungen (1.1) mit $x' = x'_1, y' = y'_1$ aus (4.4) und X, Y aus (4.1) unmittelbar zu bestätigen.

5. Algebraische Zwangsläufe

Algebraische Zwangsläufe π'/π sind in dem vorliegenden Rahmen einfach als solche zu erklären, deren Bildkurve $k \subset \Delta \subset R^4$ algebraisch ist. Hat diese die Ordnung n , dann sind die Punktbahnen — als Projektionen von k — ebenfalls algebraisch und von derselben Ordnung n , von vereinzelten, noch zu besprechenden Ausnahmen abgesehen. Die vorhin betrachteten Drehungen bieten ein einfaches Beispiel mit $n = 2$.

Die Definition ist insofern sinnvoll, als sie von den verwendeten Koordinatensystemen unabhängig ist. Ein Wechsel der Achsenkreuze $(O; x, y)$ und $(A'; x', y')$ bewirkt nämlich, wie leicht festzustellen ist, höchstens eine affine Transformation der ursprünglichen Bildkurve k .

Legt man einen ebenen Zwangslauf π'/π durch eine Zweipunktführung fest, also dadurch, daß man zwei verschiedene gangfeste Punkte $C'_i(x'_i, y'_i) \in \pi'$ ($i = 1, 2$) auf zwei vorgeschriebenen Bahnen $c_i \subset \pi$ wandern läßt, so erhält man die Bildkurve $k \subset R^4$ im Schnitt des Drehhyperzylinders Δ (1.5) mit den beiden projizierenden Hyperzylindern $\Gamma_i = s_i c_i$, wobei s_i die zu C'_i gemäß (2.3) gehörige Projektionsachse aus dem Netz $\mathfrak{S}$ bezeichnet. Unter Umständen kann die Schnittlinie $\Delta \cap \Gamma_1 \cap \Gamma_2$ in mehrere Bestandteile zerfallen, sodaß dieselbe Zweipunktführung verschiedene Zwangsläufe liefern mag. (Man denke etwa an die Koppel des Gelenkparallelogramms, das zu einem Antiparallelogramm umschlagen kann, Abschnitt 6.)

Im algebraischen Fall müssen natürlich auch die Leitkurven c_1, c_2 algebraisch sein; sie seien von nun ab — ebenso wie die sie durchlaufenden Punkte C'_1, C'_2 — ausdrücklich als reell vorausgesetzt. Ist n_i die Ordnung von c_i ($i = 1, 2$), dann hat auch der projizierende Hyperzylinder Γ_i die Ordnung n_i . Sofern die Schnittlinie $g = \Delta \cap \Gamma_1 \cap \Gamma_2$ nicht zerfällt, stellt sie bereits die Bildkurve k dar. Ihre Ordnung

$$n = 2n_1 n_2 \quad (5.1)$$

ist auch die Ordnung aller von c_1 und c_2 verschiedenen Punktbahnen. Die Ausnahmstellung der Leitlinien erklärt sich damit, daß c_1 $2n_2$ -fach überdeckt ist und c_2 $2n_1$ -fach.

Zur Illustration diene die bekannte Ellipsenbewegung. Hier werden zwei (reelle) Punkte C'_1, C'_2 auf zwei nicht parallelen (reellen) Geraden c_1, c_2 geführt ($n_1 = n_2 = 1$); ihr Schnittpunkt sei mit M bezeichnet. Die Hyperzylinder $\Gamma_1 = s_1 c_1$ und $\Gamma_2 = s_2 c_2$ sind jetzt Hyperebenen, die einander nach einer Ebene μ durch M schneiden. Die Bildkurve $k = \Delta \cap \mu$ ist mithin eine in M zentrierte Ellipse. Folglich sind die Punktbahnen der Bewegung im allgemeinen ebenfalls Ellipsen mit dem gemeinsamen Mittelpunkt M . — Eine Sonderstellung nehmen jene Punkte C'_3 ein, deren zugeordnete Projektionsachse $s_3 \in \mathfrak{S}$ die Ferngerade m der Ebene μ treffen; für jede solche Gerade s_3 (darunter auch s_1 und s_2) artet der quadratische, sie mit k verbindende Hyperzylinder in eine doppelt zählende Hyperebene $\Gamma_3 = s_3 k = s_3 \mu$ aus und liefert daher als Bahn c_3 von C'_3 eine doppelt überdeckte Gerade (Strecke) durch M . Die ausgezeichneten Netzstrahlen s_3 erfüllen den durch die Leitgeraden $f, \bar{f}$ und m bestimmten Regulus (Erzeugendenschar einer Fläche 2. Grades); daß die entsprechenden Punkte C'_3 in der Gangebene auf einem Kreis liegen, wäre durch Anwendung der Regel aus Satz 3 zu folgern.

Wesentlich für die Gültigkeit der Formel (5.1) ist die Bedingung, daß die Leitkurven c_1 und c_2 nicht zirkular sind, d. h. nicht beide die absoluten Punkte $I, \bar{I}$ der Rastebene π (vgl. Abschnitt 3) enthalten dürfen. Andernfalls hätten nämlich die drei Hyperzylinder Γ_1, Γ_2 und Δ das Brennpunktlinienpaar $f, \bar{f}$ (3.4) des Achsennetzes $\mathfrak{S}$ gemeinsam, und ihr Gesamtschnitt g würde sicher zerfallen.

Sei nun $c_i \subset \pi$ ($i = 1, 2$) eine reelle algebraische Leitkurve mit der Ordnung n_i und der Zirkularität ζ_i , d. h. c_i besitzt die absoluten Punkte I und $\bar{I}$ von π zu ζ_i -fachen Punkten; (im Falle einer nicht zirkularen Kurve c_i ist $\zeta_i = 0$ zu setzen). Der Hyperzylinder $\Gamma_i = s_i c_i$ ist dann ebenfalls von n_i -ter Ordnung, und er enthält die ζ_i -fach zählenden

Ebenen $s_i I \supset f$ und $s_i \bar{I} \supset \bar{f}$. Die Schnittfläche $\mu = \Gamma_1 \cap \Gamma_2$ hat daher die Ordnung $n_1 n_2$ und enthält die Brennnlinien f und $\bar{f}$ als $\zeta_1 \zeta_2$ -fache Geraden. Die Vielfachheit von f und $\bar{f}$ erhöht sich allerdings noch, falls in I und $\bar{I}$ Berührungen zwischen c_1 und c_2 vorhanden sind. Nach Abspaltung dieser auch dem Hyperzylinder Δ (1.5) angehörenden Geraden vom Gesamtschnitt $g = \mu \cap \Delta$, der die Ordnung (5.1) hat, verbleibt für die Ordnung der Bildkurve k der Betrag

$$n = 2(n_1 n_2 - \zeta_1 \zeta_2). \quad (5.2)$$

Dies ist eine von S. ROBERTS (1870/76) angegebene Ordnungsformel für die Punktbahnen eines durch eine Zweipunktführung festgelegten Zwangslaufs [1, 350 u. 442].

Ersetzt man die Hyperzylinder Γ_1, Γ_2 und Δ in ihrem gemeinsamen Punkt $S_1 = s_1 \cap f$ durch ihre Tangentialhyperebenen, so sind es für Γ_1 (wegen der n_1 -fachen Scheitelgerade s_1) n_1 an der Zahl, für Γ_2 (wegen der ζ_2 -fachen Zirkularität von c_2) ζ_2 an der Zahl, und für Δ eine einzige. Mit den Schnittgeraden dieser Tangentialhyperebenen hat man also $n_1 \zeta_2$ Fortschreitrichtungen des Gesamtschnitts g in S_1 . Nach Abzug der $\zeta_1 \zeta_2$ -fachen Gerade f verbleiben für die Bildkurve k nur mehr $(n_1 - \zeta_1) \zeta_2$ Tangenten. Auf Grund entsprechender Überlegungen in S_2 und I erhält man

Satz 5: Zu dem durch zwei reelle algebraische Leitkurven c_1 (Ordnung n_1 , Zirkularität ζ_1) und c_2 (Ordnung n_2 , Zirkularität ζ_2) bestimmten algebraischen Zwangslauf gehört eine algebraische Bildkurve $k \subset R^4$ der Ordnung $n = 2(n_1 n_2 - \zeta_1 \zeta_2)$. Dieselbe trifft die Brennnlinien f und $\bar{f}$ des Achsennetzes $\mathcal{S}$ in den $(n_1 - \zeta_1) \zeta_2$ -fachen Punkten S_1 und $\bar{S}_1$, in den $(n_2 - \zeta_2) \zeta_1$ -fachen Punkten S_2 und $\bar{S}_2$, sowie in den $\zeta_1 \zeta_2$ -fachen Punkten I und $\bar{I}$ der Rastebene.

Die Bahnkurve c eines von C'_1 und C'_2 verschiedenen reellen Punktes C' der Gangebene entsteht gemäß Satz 1 und 2 durch Projektion der Bildkurve k aus dem C' zugeordneten Netzstrahl s auf die Rastebene. Da k und s keinen gemeinsamen Punkt besitzen, hat auch die Bahnkurve c die Ordnung n (5.2). Bei der Projektion gelangen die Punkte S_1 und S_2 von k nach I ; durch Addition der aus Satz 5 ersichtlichen Vielfachheiten findet man — in Übereinstimmung mit S. ROBERTS [1, 350 u. 442] — für c die Zirkularität

$$\zeta = n_1 \zeta_2 + n_2 \zeta_1 - \zeta_1 \zeta_2. \quad (5.3)$$

Es gilt also im allgemeinen

Satz 6: Die reellen Punktbahnen des Zwangslaufs aus Satz 5 haben — mit Ausnahme der beiden Leitkurven — durchwegs die Ordnung n (5.2) und die Zirkularität ζ (5.3).

Die Ausnahmestellung der beiden Leitkurven c_1 und c_2 ist dadurch bedingt, daß die den geführten Punkten C'_1 und C'_2 zugeordneten Projektionsachsen s_1 und s_2 mit der zu projizierenden Bildkurve k die Punkte S_1 und $\bar{S}_1$ bzw. S_2 und $\bar{S}_2$ gemeinsam haben. Bei Beachtung der aus Satz 5 ersichtlichen Vielfachheiten verringert sich daher die allgemeine Bahnkurvenordnung n (5.2) auf $2n_1(n_2 - \zeta_2)$ bzw. $2n_2(n_1 - \zeta_1)$. Die Leitkurve n_1 -ter Ordnung c_1 ist mithin $2(n_2 - \zeta_2)$ -fach überdeckt, die Leitkurve n_2 -ter Ordnung c_2 hingegen $2(n_1 - \zeta_1)$ -fach.

Im Komplexen kommt eine Sonderstellung auch jenen Punkten der Gangebene zu, denen ein (hochimaginärer) Netzstrahl zugeordnet ist, der bloß einen der vier Punkte S_i oder $\bar{S}_i$ enthält. Es sind dies die imaginären Punkte auf einem der vier Minimalstrahlen durch C'_1 oder C'_2 ; für die (komplexen) Bahnkurven solcher Punkte tritt eine Ordnungsreduktion ein (man vergleiche die entsprechende Situation bei der Drehung in Abschnitt 4). In verstärktem Maße tritt dieses Phänomen bei den beiden (konjugiert-imaginären) Punkten C'_3 und $\bar{C}'_3$ auf, die den Netzstrahlen $s_3 = S_1 \bar{S}_2$ oder $\bar{s}_3 = \bar{S}_1 S_2$ entsprechen; sie liegen auf der (reellen) Symmetrale der Strecke $C'_1 C'_2$ und spiegelbildlich zu dieser. Ihre Bahnkurven haben die Ordnung $2n_1 n_2 - n_1 \zeta_2 - n_2 \zeta_1$ (vgl. Abschnitt 6).

Algebraische Zwangsläufe ungerader Ordnung — wie etwa die ebenen kubischen Zwangsläufe in [4] — kommen bei einer Zweipunktführung in der Weise zustande daß die über den Gesamtschnitt g gewonnene Bildkurve k in zwei Bestandteile ungerader Ordnung zerfällt.

6. Koppelbewegung des Dreistabgetriebes

Zur Illustration der voranstehenden Darlegungen mag die Bewegung der Koppel eines Dreistabgetriebes herangezogen werden. Die dabei vorliegende Führung zweier Punkte C'_1, C'_2 auf zwei nicht konzentrischen Kreisen c_1, c_2 ($n_1 = n_2 = 2, \zeta_1 = \zeta_2 = 1$) wird durch ein Gelenkviereck $M_1 C'_1 C'_2 M_2$ bewirkt. Unter Verwendung der aus Bild 4 ersichtlichen Achsenkreuze und Bezeichnungen ist die jeweilige (vom Zeitparameter τ abhängige) Position $C_1(x_1, y_1)$ des Punktes $C'_1(a, 0)$ gemäß (1.1) gegeben durch

$$x_1 = au + X, \quad y_1 = av + Y. \quad (6.1)$$

Die Bindung an den Leitkreis $c_1: (x_1 - b)^2 + y_1^2 = r_1^2$ liefert die Führungsbedingung

$$(X + au - b)^2 + (Y + av)^2 = r_1^2. \quad (6.2)$$

Analog gilt mit Rücksicht auf die Führung von $C'_2(-a, 0)$ längs c_2 :

$$(X - au + b)^2 + (Y - av)^2 = r_2^2. \quad (6.3)$$

Hieraus ließen sich unter Beachtung von (1.2), (1.3) und (1.5) die Funktionen $X(\tau)$ und $Y(\tau)$ berechnen.

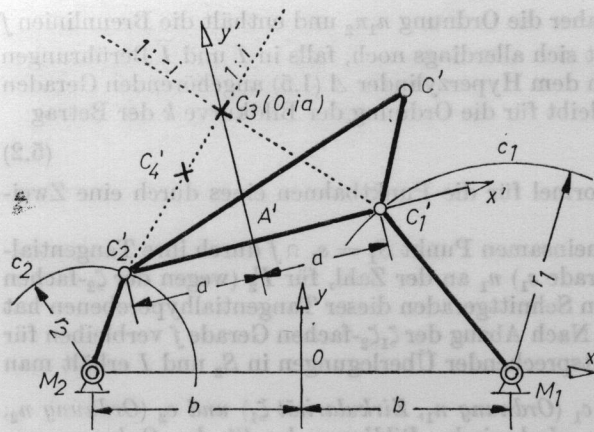


Bild 4

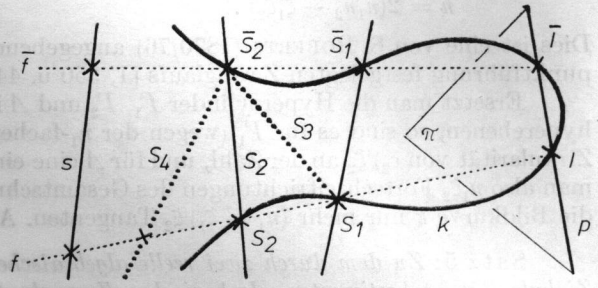


Bild 5

Die zu C_1', C_2' gehörigen Projektionsachsen s_1, s_2 — gemäß (2.3) beschrieben durch $x \pm au = y \pm av = 0$ — treffen die Brennpunkte $f, \bar{f}$ des Achsennetzes $\mathcal{S}$ laut (3.3) in den Punkten

$$S_1(1 : i : -a : -ia), \bar{S}_1(1 : -i : -a : ia), \text{ bzw. } S_2(1 : i : a : ia), \bar{S}_2(1 : -i : a : -ia). \quad (6.4)$$

Die durch (6.2) und (6.3) bereits erfaßten Hyperzylinder 2. Ordnung $\Gamma_1 = s_1 c_1$ und $\Gamma_2 = s_2 c_2$ durchdringen einander nach einer Fläche 4. Ordnung μ , welche die Geraden $f, \bar{f}$ (3.4) einfach enthält. Der von μ aus dem Drehhyperzylinder Δ (1.5) ausgeschnittenen Kurve 8. Ordnung g gehört das Geradenpaar $f, \bar{f}$ an, so daß nach dessen Abspaltung für die Bildkurve k der betrachteten Koppelbewegung π'/π eine Kurve 6. Ordnung übrigbleibt. Dieselbe besitzt die Geraden f und $\bar{f}$ zu Trisekanten, denn sie trifft sie in den genannten Punkten (6.4) sowie in den absoluten Punkten $I, \bar{I}$ von π (Bild 5). Die durch Projektion von k aus weiteren reellen Netzstrahlen s zu erhaltenden Punktbahnen der Bewegung („Koppelkurven“) sind mithin, wie bekannt, *trizirkuläre Sextiken*, d. h. Kurven 6. Ordnung mit dreifachen Punkten in I und $\bar{I}$.

Ausnahmen bilden die Punkte C_1' und C_2' , welche auf den Kreisen c_1 bzw. c_2 wandern; diese sind doppelt zu zählen, wie schon F. HOHENBERG [3] hervorgehoben hat. Weitere Ausnahmepunkte sind die imaginären Punkte auf den Minimalgeraden $x' \pm iy' = a$ oder $-a$ (Bild 4), für welche sich die Ordnung der (komplexen) Koppelkurven im allgemeinen auf 5 reduziert. Ausgezeichnet unter ihnen sind die Punkte $C_3'(0, ia)$ und $\bar{C}_3'(0, -ia)$, deren Bahnen *bizirkuläre Quartiken* sind; diese Tatsache scheint bisher nicht bemerkt worden zu sein.

Besondere Verhältnisse liegen unter der Annahme $a = b$ und $r_1 = r_2$ vor, die das Gelenkviereck als *Parallelogramm* oder *Antiparallelogramm* kennzeichnet. Hier zerfällt die Bildsextik k in einen *Kreis* und eine (rationale) *Quartik*. Der Kreis verläuft in einer Erzeugendenebene des Drehhyperzylinders Δ und enthält die Punkte I und $\bar{I}$; er liefert die (untereinander kongruenten) Bahnkreise des Parallelogramms. Die Quartik enthält hingegen die Punkte (6.4) und führt auf die (rationalen) *bizirkulären Bahnquartiken* des Antiparallelogramms, insonderheit auf komplexe Bahnkurven 3. Ordnung sowie auf die komplexen Bahnkreise der Punkte C_3' und $\bar{C}_3'$.

Ein andersartiger Zerfall der Bildsextik k in einen Kreis und eine Quartik tritt beim *Gelenkdeltoid* auf, das etwa durch $r_1 = 2a$ und $r_2 = 2b$ gekennzeichnet ist. Hier spaltet sich die Zweipunktführung der Koppel in eine Drehung um M_1 (Abschnitt 4) und einen nichttrivialen Zwanglauf mit rationalen Bahnkurven 4. Ordnung auf.

Ein paar Worte noch zum Grenzfall des *Schubkurbelgetriebes*. Es realisiert die Führung eines Punktes C_1' längs einer Geraden c_1 ($n_1 = 1, \zeta_1 = 0$) und eines zweiten Punktes C_2' längs eines Kreises c_2 ($n_2 = 2, \zeta_2 = 1$). Der Hyperzylinder $\Gamma_1 = s_1 c_1$ wird hier zu einer Hyperebene, während $\Gamma_2 = s_2 c_2$ ein quadratischer Hyperzylinder mit der Scheitelgeraden s_2 bleibt. Die Schnittflächen $\mu = \Gamma_1 \cap \Gamma_2$ und $\nu = \Gamma_1 \cap \Delta$ sind zwei Zylinder 2. Ordnung in der Hyperebene Γ_1 . Sie durchdringen einander nach einer in Γ_1 enthaltenen *Raumkurve* 4. Ordnung, die die Bildkurve k des durch die Schubkurbel erzeugten Zwanglaufs darstellt. Die beiden in Γ_2 und Δ enthaltenen Geraden f und $\bar{f}$ treffen k in den Punkten S_1 und $\bar{S}_1$ von $s_1 \in \Gamma_1$. Bei der Projektion von k aus einem Netzstrahl $s \in \mathcal{S}$ gelangen diese Punkte in die absoluten Punkte $I, \bar{I}$ der Rastebene: Die Punktbahnen der betrachteten Bewegung sind mithin, wie bekannt, im allgemeinen *monozirkuläre Quartiken*. Auszunehmen sind wieder die doppelt zählenden Leitlinien c_1 und c_2 , ferner (im Komplexen) die Bahnen jener imaginären Punkte, die den Minimalstrahlen durch C_1' angehören; es sind dies Kurven 3. Ordnung durch I oder $\bar{I}$. Das Vorhandensein solcher (komplexer) Bahnkurven scheint noch nicht bemerkt worden zu sein. — Auf jenes spezielle Schubkurbelgetriebe, welches (neben einer Drehung) die Ellipsenbewegung (Abschnitt 5) erzeugt und für welches die Bildquartik k in einen Kreis und eine Ellipse zerfällt, sei bloß hingewiesen.

7. Das Polkurvenpaar

Ein beliebiger ebener Zwanglauf π'/π kann bekanntlich in jedem Augenblick durch eine ihn in erster Ordnung approximierende *Momentandrehung* ersetzt werden. Zuzufolge Abschnitt 4 wird diese Drehung durch einen *Kreis* $h \in R^4$ repräsentiert, der die Bildkurve k (1.4) des Zwanglaufs in jenem Punkt K berührt, der der augenblicklichen Position

der Gangebene entspricht. Um diesen Bildkreis h zu ermitteln, suche man von der in K berührenden Tangente t von k den Fernpunkt $T = t \cap \Omega$ auf und bestimme den durch T gehenden Netzstrahl $m \in \mathfrak{S}$. Anschließend ist nur noch die Verbindungsebene $\mu = mt$ mit dem Drehhyperzylinder Δ (1.5) zu schneiden. Eine Ausnahmposition liegt vor, wenn t parallel zu π verläuft ($m = p$, Momentanschiebung).

Der Netzstrahl m ist jenem Punkt $M' \in \pi'$ zugeordnet, der momentan in Ruhe ist. Seine Lage $M \in \pi$, das Zentrum des Kreises h , ist der Schnittpunkt von μ mit π . Die im Laufe der Bewegung auftretenden *Momentanzentren* (oder „Pole“) M' bzw. M erfüllen in der Gangebene π' die sogenannte *Gangpolkurve* l' bzw. in der Rastebene π die *Rastpolkurve* l . Letztere ergibt sich demnach als die in π verlaufende Spurkurve der von den Ebenen μ gebildeten Hyperfläche Ψ , erstere hingegen erscheint in der Nullage (Abschnitt 3) gemäß Satz 3 als eine Zentralprojektion der Schnittlinie der von den Achsen m erfüllten Netzfläche $\psi = \Psi \cap \Omega$ mit der Fernebene λ ($v = 0$), und zwar aus dem Zentrum $U(1 : 0 : 0 : 0)$ auf die Rastebene π .

Im Zuge der Bewegung π'/π rollt bekanntlich die Gangpolkurve $l' \subset \pi'$ auf der Rastpolkurve $l \subset \pi$ gleitfrei ab. Bei einem algebraischen Zwangslauf sind die Polkurven naturgemäß gleichfalls algebraisch, doch auf Grund ihrer Konstruktion meist recht kompliziert.

8. Planetenbewegung

Die voranstehenden Entwicklungen mögen an Hand der sogenannten *Planetenbewegung* π'/π erläutert werden. Hierunter versteht man in der Getriebelehre jenen Zwangslauf, bei welchem die Gangebene π' um ein ihr angehörendes Zentrum A' gleichförmig rotiert, während dieses ebenfalls mit konstanter Geschwindigkeit um ein festes Zentrum $O \in \pi$ kreist. Unter Verwendung der aus Bild 6 ersichtlichen Koordinatensysteme wird die Bewegung durch das Gleichungspaar (1.1) beschrieben, wenn darin

$$\varphi = \tau, \quad X = a \cos \gamma\tau, \quad Y = a \sin \gamma\tau \quad \text{mit} \quad \gamma = \text{const} \quad (8.1)$$

angenommen wird. Die Konstante γ sei verschieden von 0 und 1 vorausgesetzt, um triviale Fälle von bloßen Drehungen auszuschalten (Abschnitt 4).

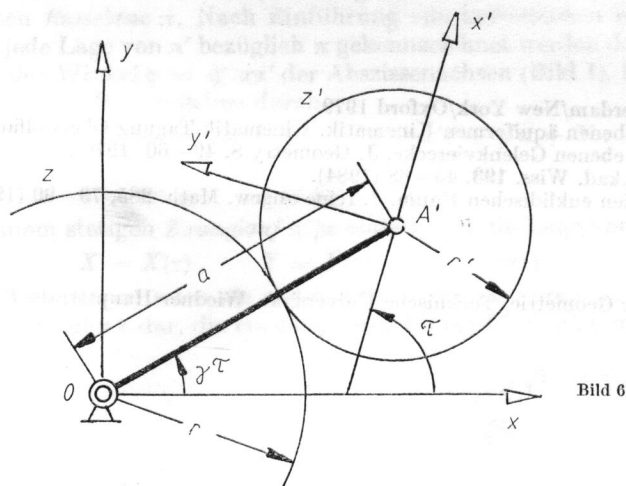


Bild 6

Die Bildkurve k , gemäß (1.4) durch

$$u = \cos \tau, \quad v = \sin \tau, \quad x = a \cos \gamma\tau, \quad y = a \sin \gamma\tau \quad (8.2)$$

dargestellt, ist eine euklidische *Schraublinie* des vierdimensionalen Raums R^4 mit dem Achsenpaar π, θ [5]. Sie gehört dem Drehhyperzylinder Δ (1.5) an, ebenso der Sphäre Σ

$$u^2 + v^2 + x^2 + y^2 = 1 + a^2 \quad (8.3)$$

und verläuft daher auf der ringartigen Zyklide 4. Ordnung $\Delta \cap \Sigma$. Die als *Radlinien* (Trochoiden und Zykloiden) bekannten Punktbahnen der Planetenbewegung können mithin als Parallelprojektionen einer Schraublinie des R^4 aufgefaßt werden.

Der zur Ermittlung der Polkurven benötigte Fernpunkt T der zum Zeitpunkt τ gehörigen Tangente t von k wird durch das (homogene) Koordinatenquadrupel

$$\dot{u} : \dot{v} : \dot{x} : \dot{y} = -\sin \tau : \cos \tau : -\gamma a \sin \gamma\tau : \gamma a \cos \gamma\tau \quad (8.4)$$

festgelegt. Der T enthaltende Netzstrahl $m \in \mathfrak{S}$ wird erfaßt durch ein lineares Gleichungspaar vom Muster (2.3):

$$x'_0 u - y'_0 v + x = 0, \quad y'_0 u + x'_0 v + y = 0. \quad (8.5)$$

Wegen $T \in m$ gilt

$$x'_0 \sin \tau + y'_0 \cos \tau = -\gamma a \sin \gamma\tau, \quad x'_0 \cos \tau - y'_0 \sin \tau = -\gamma a \cos \gamma\tau, \quad (8.6)$$

woraus sich

$$x'_0 = -\gamma a \cos(1 - \gamma)\tau, \quad y'_0 = \gamma a \sin(1 - \gamma)\tau \quad (8.7)$$

ergibt. Damit ist bereits die *Gangpolkurve* l' bekannt, die als *Kreis* mit dem Radius $r' = \gamma a$ zu erkennen ist (Bild 6).

Durch Eintragen der Ausdrücke (8.7) für x' und y' in die Bewegungsgleichungen (1.1) mit Beachtung von (8.1) und (8.2) gelangt man zur *Rastpolkurve* l :

$$x_0 = (1 - \gamma)a \cos \gamma\tau, \quad y_0 = (1 - \gamma)a \sin \gamma\tau. \quad (8.8)$$

Es ist dies wieder ein *Kreis*, diesmal mit dem Radius $r = (1 - \gamma)a$ (Bild 6).

Mit Rücksicht darauf, daß die die Schraublinie k (8.2) erzeugende Schraubung die Geraden f und $\bar{f}$ (3.4) und damit das Achsennetz $\mathcal{S}$ in sich überführt, sind auch die in Abschnitt 7 erwähnte Hyperfläche $\mathcal{P}$ und die in ihr enthaltene Netzfläche $\psi = \mathcal{P} \cap \Omega$ *Schraubgebilde*.

Für ein rationales Übersetzungsverhältnis $\gamma = \alpha/\beta$ (α und β teilerfremde ganze Zahlen) liegt eine *algebraische Planetenbewegung* vor. Sie läßt sich durch Zahnräder mit den Teilkreisen l' (8.7) und l (8.8) realisieren. Ihre Bildkurve k sowie die Punktbahnen — mit Ausnahme des Bahnkreises von $A'(0, 0)$ — haben die *Ordnung*

$$n = 2 \max(|\alpha|, |\beta|). \quad (8.9)$$

Speziell für $\gamma = -1$ ($n = 2$) hat man wieder die Ellipsenbewegung (Abschnitt 5).

9. Schlußwort

Das dargelegte Abbildungsprinzip ist, wie die vorgeführten Beispiele gezeigt haben, dank des bescheidenen Formelapparats relativ einfach zu handhaben und vermittelt bei einiger Vertrautheit mit den Elementen der vierdimensionalen Geometrie bemerkenswerte Einsichten. Eine Ausdehnung der Untersuchungen auf weitere kinematische Sachgebiete und Fragen würde sich lohnen.

Es wäre auch nicht ohne Interesse, einen direkten Zusammenhang mit der klassischen *kinematischen Abbildung* herzustellen, die W. BLASCHKE und J. GRÜNWALD um 1911 eingeführt haben [1, 393ff].

Literatur

- 1 BOTTEMA, O.; ROTH, B., *Analytical Kinematics*, Amsterdam/New York/Oxford 1979.
- 2 BOTTEMA, O.; VELDKAMP, G. R., Eine Abbildung der ebenen äquiformen Kinematik. Kinematik-Tagung Oberwolfach, 1982.
- 3 HOHENBERG, F., Eine liniengeometrische Deutung der ebenen Gelenkvierecke. *J. Geometry* 8, 49—60 (1976).
- 4 WUNDERLICH, W., Kubische Zwangsläufe. *Sb. Österr. Akad. Wiss.* 193, 45—68 (1984).
- 5 WUNDERLICH, W., Zur Schraubung im vierdimensionalen euklidischen Raum. *J. reine angew. Math.* 285, 79—99 (1976).

Eingegangen am 21. Oktober 1985

Anschrift: Emer. Prof. Dr. W. WUNDERLICH, Institut für Geometrie, Technische Universität, Wiedner Hauptstraße 8—10, A-1040 Wien, Österreich