

FAST BEWEGLICHE OKTAEDER MIT ZWEI SYMMETRIEEBENEN

Walter Wunderlich, Wien

Herrn Prof. Fritz Hohenberg zum 80. Geburtstag gewidmet

Abstract. The article considers non-convex octahedra with two planes of symmetry (Fig. 1). Suitable data and elastic material provided, these octahedra allow a snapping deformation from one possible shape to another one. In particular, snapping octahedra are being constructed, the two limit positions of which are completely flat (Fig. 3). For a quantitative judgement of the resistance to the deformation, a corresponding measure (discrepance) is introduced. Octahedra with $\delta = 0$ are shaky (infinitesimally deformable).

1. Seit *A. L. Cauchy* (1812) weiß man, daß alle konvexen Polyeder starr sind. Diese Tatsache beruht darauf, daß die Gestalt eines konvexen Polyeders bei Kenntnis seiner Seitenflächen und deren topologischer Anordnung eindeutig bestimmt ist [3].

Bei Verzicht auf die Forderung der Konvexität braucht diese Eindeutigkeit nicht mehr zu bestehen, und das Polyeder kann dann unter Umständen mehrere Gestalten annehmen. Sind zwei mögliche Formen eines nichtkonvexen Polyeders nicht allzu verschieden, so ist bei einer gewissen Nachgiebigkeit des Modellmaterials mit sanfter Gewalt ein sprunghafter («kiprender») Formenwechsel zu erzwingen.

Rücken die erwähnten Nachbarformen zusammen, so hat man ein *Wackelpolyeder*, das nur mehr eine infinitesimale Deformabilität aufweist, die jedoch am Modell deutlich zu merken ist. Das erste einschlägige Beispiel gab *W. Blaschke* [1] mit seinen Wackeloktaedern. *M. Dehn* (1916) zeigte hingegen, daß ein streng konvexes Polyeder auch nicht einmal wackelig sein kann [3].

Ob ein nichtkonvexes geschlossenes Polyeder vielleicht in endlichem Ausmaß stetig deformierbar sein kann, wurde langezeit bezweifelt. Erst 1976 haben *R. Connelly* und *K. Steffen* durch zwei Beispiele die Existenz solcher streng beweglichen Polyeder nachgewiesen [2].

2. In Ergänzung eines früheren Berichtes [4] sollen hier nichtkonvexe doppelt-symmetrische Oktaeder von dem aus Abb. 1 ersichtlichen Muster betrachtet werden. Ein solches Oktaeder besteht aus zwei kongruenten Pyramiden mit gemeinsamem Basisdeltoid $ABA'B'$ und den zur Basisebene spiegelbildlich angeordneten Spitzen C, C' . In einem dem Objekt angepaßten kartesischen Koordinatensystem seien die sechs Ecken festgelegt durch

$$A(0, u, 0), B(x, y, 0), A'(0, v, 0), B'(-x, y, 0), C(0, 0, z), C'(0, 0, -z). \quad (2.1)$$

Die (durchwegs positiven) *Kantenlängen* seien bezeichnet mit

$$AC = AC' = a, BC = BC' = B'C = B'C' = b, \quad (2.2)$$

$$A'C = A'C' = c, AB = AB' = d, A'B = A'B' = e.$$

Zwischen den als gegeben angesehenen fünf Kantenlängen a, b, c, d, e und den fünf Formparametern u, v, x, y, z bestehen die folgenden *fünf quadratischen Relationen*:

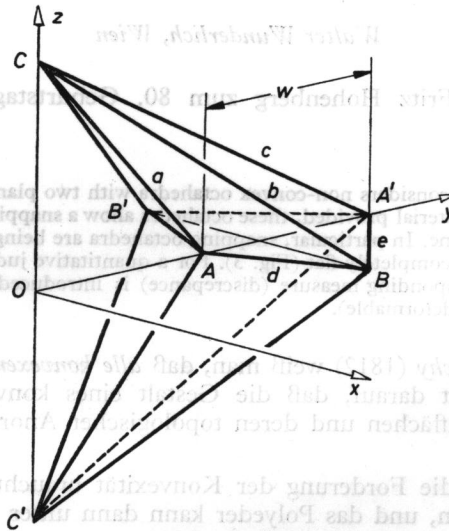


Abb. 1. Oktaeder mit zwei orthogonalen Symmetrieebenen

$$\begin{aligned} u^2 + z^2 &= a^2, \\ v^2 + z^2 &= c^2, \\ x^2 + y^2 + z^2 &= b^2, \\ x^2 + (y - u)^2 &= d^2, \\ x^2 + (y - v)^2 &= e^2. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Zur Ermittlung der Gestalt des durch die Kantenlängen bestimmten Oktaeders ist das Gleichungssystem (2.3) aufzulösen.

3. Zu diesem Zweck führen wir — im Hinblick auf die Beziehung $v^2 - u^2 = c^2 - a^2$ — als Hilfsgröße die Diagonale $AA' = w$ ein:

$$w = v - u. \quad (3.1)$$

Dies ermöglicht den Ansatz

$$u = \frac{1}{2} \left(\frac{H}{w} - w \right), \quad v = \frac{1}{2} \left(\frac{H}{w} + w \right) \quad \text{mit } H = c^2 - a^2. \quad (3.2)$$

Durch Addition der ersten beiden Gleichungen aus (2.3) ergibt sich dann

$$2z^2 = a^2 + c^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{H^2}{w^2} + w^2 \right). \quad (3.3)$$

Durch Subtraktion der letzten beiden Gleichungen aus (2.3) findet man

$$y = \frac{1}{2w} (H + d^2 - e^2). \quad (3.4)$$

Fügt man jetzt zur Summe der letzten beiden Gleichungen in (2.3) noch (3.3) hinzu, so gelangt man bei Beachtung der dritten Gleichung (2.3) zu einer Bestimmungsgleichung für den Hilfsparameter w . Sie läßt sich auf folgende Form bringen:

$$w^4 - (Q - 2b^2)w^2 + P^2 = 0 \quad (3.5)$$

$$\text{mit } P^2 = (c^2 - a^2)(e^2 - d^2), \quad Q = a^2 + c^2 + d^2 + e^2.$$

Hieraus ergibt sich

$$w_{1,2}^2 = \frac{1}{2} (Q - 2b^2 \mp R) \quad \text{mit } R^2 = (Q - 2b^2)^2 - 4P^2. \quad (3.6)$$

Die beiden Lösungen w_1^2 und w_2^2 fallen reell und positiv aus, wenn $R^2 \geq 0$ und $P^2 > 0$. Unter der Voraussetzung $c > a$ erfordert dies $e > d$ sowie $2b^2 \leq Q - 2P$ mit $P > 0$; es kann dann $w_2 \geq w_1 > 0$ angenommen werden. Die zugehörigen Werte u, v und y ergeben sich aus (3.2) und (3.4), weiterhin z aus (3.3) und schließlich x aus der dritten Gleichung (2.3). Damit auch die noch nicht gesicherte Realität der Formparameter x und z gewährleistet wird ($x^2 \geq 0, z^2 \geq 0$), sind noch zusätzliche Bedingungen zu erfüllen, auf die aber nicht näher eingegangen werden soll; ebensowenig auf jene, welche die in Abb. 1 angenommene Anordnung $0 < u < y < v$ bewirken.

4. Daß sämtliche Forderungen erfüllbar sind, zeigt etwa das *Beispiel*

$$a = 7, \quad b = 8, \quad c = 10, \quad d = 2, \quad e = 3.$$

Mit den aus (3.6) über $P^2 = 255, Q = 162, R^2 = 136$ gewonnenen Werten $w_1 = 3,342$ und $w_2 = 4,778$ gelangt man zu *zwei Oktaederformen* (Abb. 2), die zwar recht verschieden sind, aber trotzdem einen kippenden Übergang gestatten.

Zur quantitativen Beurteilung der *Kippfähigkeit* eines Oktaeders der vorliegenden Art denken wir uns die Kantenlängen a, c, d, e konstant, die Kantenlänge b hingegen veränderlich; deren Abhängigkeit vom Parameter w ist durch (3.5) festgelegt. Im Verlauf des Kippvorgangs zwischen den Randwerten w_1 und w_2 nimmt b ein Maximum b_0 an, das durch $db/dw = 0$ oder $R^2 = 0$ gekennzeichnet ist. Es tritt an der Stelle $w_0 = \sqrt{P}$ ein und hat den Betrag

$$b_0 = \sqrt{\left(\frac{Q}{2}\right) - P}. \quad (4.1)$$

Als Qualitätsmaß für den Kippvorgang mag nun die als *Diskrepanz* bezeichnete relative maximale Längenänderung

$$\delta = \frac{b_0 - b}{b} = \frac{b_0}{b} - 1 \quad (4.2)$$

dienen.

Bei dem angeführten Beispiel (Abb. 2) findet man gemäß (4.1) $b_0 = 8,064$; die Diskrepanz beträgt daher $\delta = 0,008 = 0,8\%$, was dem Material — vor allem für ein Stabmodell — noch zuzumuten ist.

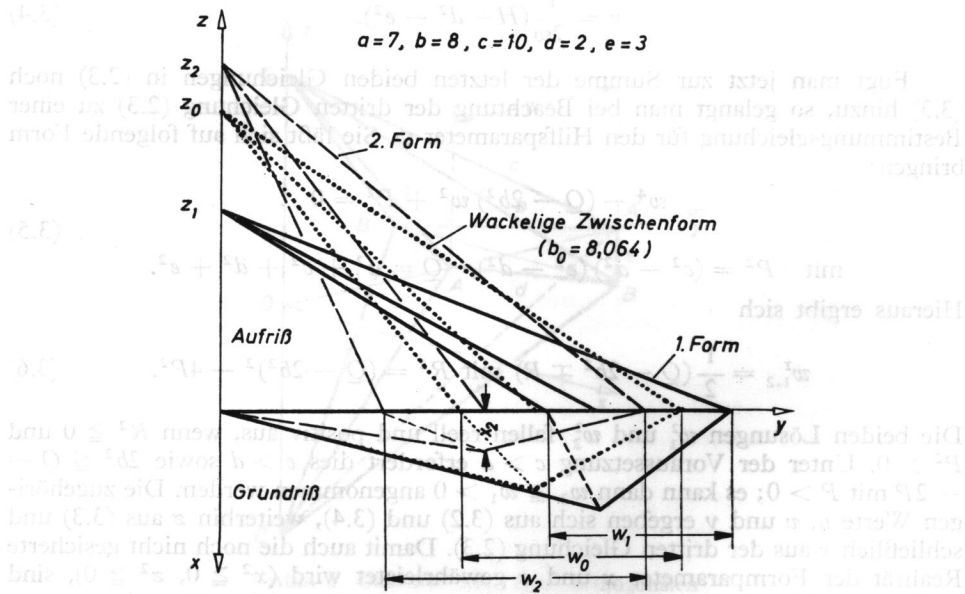


Abb. 2. Kipp-Oktaeder

5. Aus dem Umstand, daß das Verschwinden der Diskriminante R^2 (3.6) ein Zusammenrücken zweier Nachbarformen bedeutet, folgt, daß das als Zwischenform auftretende Oktaeder mit den Kantenlängen a, b_0, c, d, e wackelig ist (vgl. Abb. 2). Drückt man die Bedingung $R^2 = 0$ oder die dazu äquivalente Bedingung $w^2 = P$ vermöge (3.1), (2.3) etc. durch die Formparameter aus, so gelangt man über

$$(v - u)^4 = (c^2 - a^2)(e^2 - d^2) = (v^2 - u^2)(v^2 - u^2 - 2vy + 2uy)$$

zu der übersichtlichen *Wackelbedingung*

$$(u + v)y = 2uv, \quad (5.1)$$

die schon in [5] auf anderem Wege hergeleitet worden ist. Man beachte, daß hierin die Formparameter x und z gar nicht vorkommen, also frei gewählt werden dürfen. Geometrisch bedeutet die Bedingung (5.1), daß die Gegenecken A und A' des Oktaeders die Abstandsstrecke zwischen den Diagonalen BB' und CC' har-

monisch teilen (wie in Abb. 1). Diese Wackeloktaeder sind insofern nicht bloß metrisch, sondern auch projektiv speziell, als bei ihnen eine Diagonale die beiden anderen trifft, während im allgemeinen die drei Diagonalen windschief sind (vgl. [1] und [4]).

6. Das Verhalten des in Abb. 2 dargestellten Kipp-Oктаeders verlockt zu dem Versuch, die Randwerte z_1 und x_2 zum Verschwinden zu bringen. Das Modell würde dann *zwei platte Grenzformen* einnehmen: Die erste ($C = C'$) in der xy -Ebene, die zweite ($B = B'$) in der yz -Ebene. Notwendig hierfür ist zunächst, daß die vier in der Ecke C zusammenstoßenden Dreieckswinkel gleich sind (Abb. 3). In der zweiten Grenzposition erscheint dann die Kante B_2C_2 als Winkelsymme-

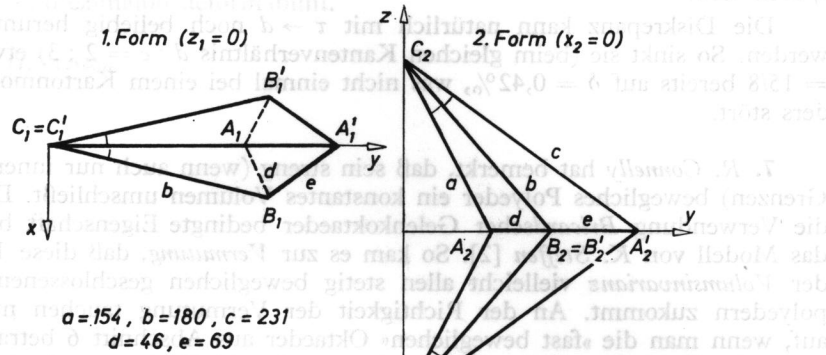


Abb. 3. Kipp-Oктаeder mit zwei platten Grenzformen

trale im Dreieck $A_2A_2'C_2$. Dies bedingt die Proportion $a : c = d : e$ und gestattet daher den Ansatz

$$a = \sigma \cdot d, \quad c = \sigma \cdot e \quad \left(1 < \sigma < \frac{e + d}{e - d} \right). \quad (6.1)$$

Doppelte Anwendung des Kosinussatzes liefert noch

$$a^2e + c^2d = (b^2 + de)(d + e), \quad (6.2)$$

was mit der Substitution (6.1) auf die *Schlüsselgleichung*

$$b^2 = (\sigma^2 - 1) de \quad (6.3)$$

führt. Diese quadratische Relation zwischen σ und b ist rational zu befriedigen durch

$$\sigma = \frac{de + \tau^2}{de - \tau^2}, \quad b = \frac{2d\tau e}{de - \tau^2} \quad (0 < \tau < d). \quad (6.4)$$

Bei rationaler Wahl der Parameterwerte d, e und τ (τ nicht viel kleiner als d) erhält man gemäß (6.1) auch rationale Werte für a und c . Durch Multiplikation

mit einem geeigneten Faktor gelangt man so schließlich zu *ganzzahligen Lösungen*. Im übrigen sind dann auch die zur Formbestimmung benötigten Werte $w_1 = c - a$ und $w_2 = d + e$ ganzzahlig, und demgemäß ebenso die Größen $P = w_1 w_2$ und $Q = w_1^2 + w_2^2 + 2b^2$.

Als *Beispiel* mag die von $d = 2$, $e = 3$ mit $\tau = 9/5$ ($\sigma = 77/23$) ausgehende, der Abb. 3 zugrundeliegende Annahme

$$a = 154, \quad b = 180, \quad c = 231, \quad d = 46, \quad e = 69$$

dienen. Hierzu gehören $w_1 = 77$, $w_2 = 115$, $P = 885$ und $Q = 83954$. Für die gemäß (4.1) und (4.2) zu berechnende Diskrepanz findet man $\delta = 0,0111 = 1,11\%$, was bei einem Kartonmodell noch einen gewissen Kippwiderstand spüren läßt.

Die Diskrepanz kann natürlich mit $\tau \rightarrow d$ noch beliebig heruntergedrückt werden. So sinkt sie (beim gleichen Kantenverhältnis $d : e = 2 : 3$) etwa für $\tau = 15/8$ bereits auf $\delta = 0,42\%$, was nicht einmal bei einem Kartonmodell besonders stört.

7. R. Connelly hat bemerkt, daß sein streng (wenn auch nur innerhalb enger Grenzen) bewegliches Polyeder ein konstantes Volumen umschließt. Diese durch die Verwendung *Bricardscher Gelenkottaeder* bedingte Eigenschaft besitzt auch das Modell von K. Steffen [2]. So kam es zur *Vermutung*, daß diese Eigenschaft der *Volumsinvarianz* vielleicht allen stetig beweglichen geschlossenen Dreieckspolyedern zukommt. An der Richtigkeit der Vermutung tauchen nun Zweifel auf, wenn man die »fast beweglichen« Oктаeder aus Abschnitt 6 betrachtet, oder ein verblüffendes, noch besser funktionierendes 16-Flach von C. Schwabe, das mit bereits nicht mehr wahrnehmbarer Diskrepanz zwischen drei Formen kippt, von denen zwei ebenfalls vollkommen platt sind [6].

LITERATUR:

- [1] W. Blaschke, Wackelige Achteckfläche, Math. Z. **6** (1920), 85—93.
- [2] R. Connelly, An immersed polyhedral surface which flexes, Indiana Univ. Math. J. **25** (1976), 965—972. — A flexible sphere, Math. Intelligencer **3** (1978), 130—131.
- [3] E. Steinitz, Polyeder und Raumeinteilungen, Encykl. Math. Wiss. III AB 12 (§ 15).
- [4] W. Wunderlich, Starre, kippende, wackelige und bewegliche Achteckfläche, Elem. Math. **20** (1965), 25—32.
- [5] W. Wunderlich, Wackelige Doppelpyramiden, Anz. Österr. Akad. Wiss. **117** (1980), 82—87.
- [6] W. Wunderlich und C. Schwabe, Eine Familie von geschlossenen gleichflächigen Polyedern, die fast beweglich sind, Elem. Math. (im Druck).

Angenommen in II. Abteilung

10. 6. 1986.

Skokovito deformabilan oktaedar sa dvije ravnine simetrije

Walter Wunderlich, Wien

Sadržaj

Promatraju se nekonveksni oktaedri sa dvije ravnine simetrije (sl. 1). Uz pogodno odabrane mjere i elastičan materijal, ovakav oktaedar dozvoljava skokovitu deformaciju iz jednog mogućeg oblika u drugi. Posebno se konstruira takav oktaedar, čija dva granična položaja su ravninska (sl. 3). Za kvantitativno mjerenje otpora deformaciji uvodi se odgovarajuća mjera (diskrepancija δ). Oktaedri sa $\delta = 0$ su infinitezimalno deformabilni.

Primljeno u II. razredu

10. 6. 1986.