

Über abwickelbare Zahnflanken und eine neue Kegelradverzahnung

Von W. Wunderlich, Wien

Mit 6 Textabbildungen

Die Frage nach Räderpaaren, deren Zahnflanken von abwickelbaren Regelflächen gebildet werden, wird zunächst für Stirn- und Kegelräder grundsätzlich beantwortet. Es zeigt sich, daß die Flankenfläche des einen Rades innerhalb gewisser Bedingungen frei gewählt werden kann: Die Gratlinie muß eine Geodätische auf einem beliebigen achsenparallelen Zylinder bei den Stirnrädern, bzw. auf einem beliebigen vom Achsenschnittpunkt ausstrahlenden Kegel bei den Kegelrädern sein.

Bei den Kegelrädern führt eine einfache Spezialisierung auf eine neuartige Schrägverzahnung, die neben den auf der Abwickelbarkeit der Zahnflanken beruhenden Vorteilen auch noch die der Evolventenverzahnung eigenen Vorzüge konstanten Eingriffswinkels und veränderbaren Achsenwinkels aufweist. Die Flanken sind dabei die Tangentenflächen von geodätischen Linien auf Drehkegeln und können einfach als Parallelflächen jener Kegel erklärt werden, die bei der Evolventenverzahnung die Flanken der geraden (radialen) Zähne bilden. Der „Teilriß“ (die Verebnung des Wälzkegels) ist durch das Auftreten sogenannter „Ährenkurven“ gekennzeichnet.

Entsprechende Untersuchungen für Hyperboloidräder sollen einer späteren Gelegenheit vorbehalten bleiben.

I. Stirnräder mit abwickelbaren Zahnflanken

Es ist bekannt, daß die üblichen Schräg Zahn-Stirnräder auf der Grundlage der Evolventenverzahnung abwickelbare Zahnflanken haben. Dieselben sind nämlich Teile von Schraubtorse, also jener abwickelbaren Flächen, die von den Tangenten gewöhnlicher Schraublinien gebildet werden; ihre ebenen Schnitte senkrecht zur Achse sind jeweils untereinander kongruente Kreisevolventen, die die Stirnprofile der Zähne abgeben.¹

Die Schraubtorse hat wie alle abwickelbaren Flächen die Eigenschaft, von jeder Tangentialebene nicht bloß in einem Punkt, sondern längs einer ganzen geradlinigen Erzeugenden berührt zu werden. Dieser Tatsache kommt im Hinblick auf die technische Herstellung besondere Bedeutung zu, weil solche Zähne z. B. die Nachbearbeitung mit ebenen Schleifscheiben gestatten.

Man stößt nun gelegentlich auf die Ansicht, daß es sich bei der angeführten Evolventen-Schrägverzahnung um die einzig mögliche Art von abwickel-

baren Zahnflanken handelt, abgesehen natürlich von dem trivialen Fall der geraden Zähne. Grundsätzliche Klärung der herrschenden Sachlage bei den Stirn- und Kegelrädern soll die Aufgabe des vorliegenden Aufsatzes sein. — Im Hinblick darauf, daß die Zahnflanke auf einem Rad (innerhalb gewisser Grenzen) beliebig angenommen werden kann, die zugehörige Gegenflanke auf dem anderen Rad dann jedoch bereits festgelegt ist, ist das Problem der Bestimmung abwickelbarer Zahnflanken natürlich so zu verstehen, daß beide Flanken als Torsen auszubilden sind.

Seien a_1 und a_2 die beiden zueinander parallelen Radachsen und $i = \omega_1/\omega_2$ das Übersetzungsverhältnis. Grundlegend für die Verzahnung der Stirnräder sind die beiden Wälzzylinder Ω_1 und Ω_2 um a_1 und a_2 , die einander längs eines Mantelstrahls m berühren und beim Arbeiten der Räder aufeinander abrollen (Abb. 1); die Radien r_1 und r_2 bestimmen sich aus der Wälzbedingung

$$r_1 \omega_1 = r_2 \omega_2. \quad (1)$$

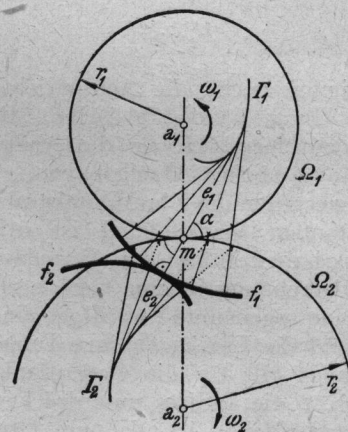


Abb. 1

Für einen Beobachter auf dem zweiten Rad erscheint Ω_2 fest und Ω_1 rollt auf dem Mantel ab; die mit Ω_1 starr verbundene Zahnflanke Φ_1 hüllt hierbei die Gegenflanke Φ_2 ein und beide Flächen berühren einander jeweils längs einer Linie $e_1 = e_2$.² Da die Rollbewegung in jedem Augenblick als (infinitesimale) Drehung um die Momentanachse m angesehen wer-

¹ Z. B. A. Schiebel: Zahnäder, II. Teil (Berlin 1923). Im Grunde genommen, allerdings unter der Voraussetzung windschiefer Achsen abgeleitet, finden sich derartige Räder schon bei Th. Olivier: Théorie géométrique des engrenages (Paris 1842).

² Die „Punktverzahnung“, bei welcher die Flankenpaare einander stets nur in einem Punkt berühren — wie z. B. bei den Schraubenrädern — ist für die Übertragung größerer Kräfte nicht geeignet und bleibt ganz außer Betracht.

den kann, müssen die Flankennormalen in allen Punkten der Berührungslinie die Momentanachse treffen (Grundgesetz der Verzahnung).

Sollen nun Φ_1 und Φ_2 Torsen (abwickelbare Flächen) sein, so kann die Berührung nur längs einer Erzeugenden $e_1 = e_2$ stattfinden, da andernfalls die Flächen identisch wären. Die beiden Normalebenen ε_1 und ε_2 von Φ_1 und Φ_2 längs e_1 und e_2 gelangen in der Eingriffslage zur Deckung und gehen durch m . Beide Torsen haben demnach lauter zu a_1 und a_2 parallele Normalebenen; dieselben hüllen zwei „Grundzylinder“ Γ_1 und Γ_2 ein, die die Evolutenflächen von Φ_1 und Φ_2 darstellen (Abb. 1). Φ_1 entsteht mithin umgekehrt beim Abwickeln des Zylinders Γ_1 , beschrieben von der in der abrollenden Ebene ε_1 liegenden Geraden e_1 (Abb. 2). Da e_1 stets die

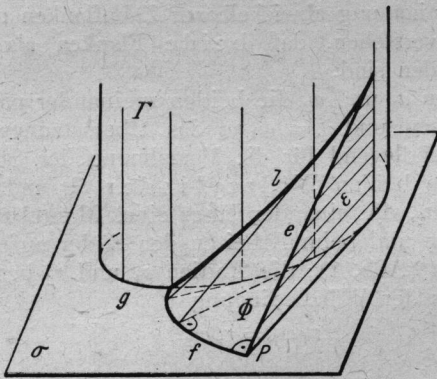


Abb. 2

gleiche Neigung gegen die Achsenrichtung behält, ist Φ_1 eine Böschungsfläche. Ihre Gratlinie l_1 kann man sich als die Abdruckspur der Erzeugenden e_1 beim Abrollen von ε_1 auf Φ_1 vorstellen; sie schneidet die Mantelstrahlen von Γ_1 unter konstantem Winkel und ist offenbar eine geodätische Linie des Grundzylinders, da sie bei der Verebnung in eine Gerade übergeht. Sie ist mithin eine sogenannte „verallgemeinerte Schraubenlinie“³ und die Flanke Φ_1 ihre Tangentenfläche. Entsprechendes gilt für die Gegenflanke Φ_2 , weshalb in Abb. 2 die Indizes unterdrückt wurden.

Das Entscheidende ist, daß ein Grundzylinder, etwa Γ_1 , samt einer ihn berührenden Erzeugenden e_1 beliebig gewählt werden kann; hierdurch ist zunächst einmal die Flankentorse Φ_1 festgelegt. Die Gegenflanke Φ_2 ist als Hüllfläche ebenfalls bestimmt und berührt Φ_1 jeweils längs jener Erzeugenden $e_1 = e_2$, die die Momentanachse m trifft, denn deren Punkte befriedigen das Verzahnungsgesetz. Φ_2 ist demnach eine Regelfläche, da sie unendlich viele Geraden enthält, und sie ist abwickelbar, da die Tangentialebenen längs der Erzeugenden konstant sind.

Die Stirnprofile der Zähne, d. h. die Schnittkurven f_1 , f_2 der Flanken Φ_1 , Φ_2 mit einer achsennormalen „Schichtenebene“ σ sind

Evoluten der Grundzylinder-Spuren g_1 , g_2 , mithin Fadenevoluten der Gratlinien l_1 , l_2 (Abb. 2); sie stellen Paare zusammengehöriger Profile der ebenen Verzahnung dar (Abb. 1). Diese Profile ändern sich jedoch im allgemeinen bei Verschiebung der Schichtenebene, da sie zwei Scharen von Parallelkurven durchlaufen. Ebenso ändert sich im allgemeinen der Eingriffswinkel α , den die Ebene $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ mit der gemeinsamen Berührungsebene der Wälzzylinder einschließt.

Für eine Spezialisierung liegt es nahe, Γ_1 als Drehzylinder mit der Achse a_1 zu wählen. Wegen der durch diese Annahme bedingten Konstanz des Eingriffswinkels α ist dann auch Γ_2 ein Drehzylinder. Die geodätischen Gratlinien l_1 und l_2 sind somit gewöhnliche Schraubenlinien und die Zahnflanken Schraubtorse. Die Schichtenprofile der Zähne eines jeden Rades sind Evoluten desselben Kreises g_1 bzw. g_2 und daher untereinander kongruent. Stellt man übrigens die Forderung kongruenter Profile an die Spitze, so wird man zwangsläufig auf die vorliegende Annahme geführt: Sollen sämtliche Evoluten einer ebenen Grundkurve g untereinander kongruent sein, so können je zwei durch eine Drehung zur Deckung gebracht werden, wobei g in sich übergehen wird; g gestattet somit unendlich viele Drehungen, die jeden Punkt in jeden anderen überzuführen erlauben, muß also ein Kreis sein; die Grundzylinder sind mithin Drehzylinder und müssen aus Symmetriegründen mit den Wälzzylindern gemeinsame Achsen haben.

Unter den vielen Möglichkeiten abwickelbarer Zahnformen ist demnach die Evolutenverzahnung in geometrischer Hinsicht durch unveränderliche Zahnprofile, konstanten Eingriffswinkel und damit auch durch eine ebene Eingriffsfläche ausgezeichnet. Hierzu kommt noch die bekannte Eigenschaft, daß die Eingriffs- und Übersetzungsverhältnisse durch (beschränkte) Veränderung des Achsenabstandes nicht gestört werden.

II. Kegelräder mit abwickelbaren Zahnflanken

Auf Grund der weitgehenden Analogien zwischen der Kinematik der Ebene und des Bündels läßt sich die entsprechende Frage nach abwickelbaren Zahnflankenpaaren bei Kegelrädern ohne Schwierigkeit ähnlich beantworten.

Die beiden Radachsen a_1 und a_2 schneiden einander jetzt in einem eigentlichen Punkt O und an die Stelle der Wälzzylinder treten nun zwei Wälzkegel Ω_1 und Ω_2 im Bündel O , die einander längs eines Mantelstrahles m berühren und beim Arbeiten der Räder aufeinander abrollen; die halben Öffnungswinkel ϱ_1 und ϱ_2 hängen mit der Übersetzung $i = \omega_1/\omega_2$ durch die Wälzbedingung

$$\omega_1 \cdot \sin \varrho_1 = \omega_2 \cdot \sin \varrho_2 \quad (2)$$

zusammen. Von Ω_2 aus betrachtet ist die Bewegung von Ω_1 eine einfache Rollung und kann in jedem Augenblick als (infinitesimale) Drehung um die Momentanachse m angesehen werden. Demnach gilt wörtlich auch hier das im I. Abschnitt

³ Enz. math. Wiss. III D 4, Nr. 31 und 32.

ausgesprochene Verzahnungsgesetz, wonach die gemeinsamen Flankennormalen längs der Berührungslinie eines Zahnpaars die Momentanachse treffen müssen.

Sollen zusammengehörige Zahnflanken Φ_1 und Φ_2 abwickelbare Flächen sein, dann muß die zur Berührungserzeugenden $e_1 = e_2$ gehörige gemeinsame Normalebene $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ durch m gehen. Beide Torsen haben somit lauter Normalebenen durch den Bündelscheitel O : Dieselben hüllen zwei „Grundkegel“ Γ_1 und Γ_2 im Bündel ein, die die Evolutenflächen von Φ_1 und Φ_2 darstellen. Φ_1 entsteht danach umgekehrt beim Abwickeln des Kegels Γ_1 und wird von der in der abrollenden Ebene ε_1 liegenden Geraden e_1 überstrichen. Die Abdruckspur von e_1 auf Γ_1 ist die Gratlinie l_1 von Φ_1 und offensichtlich wieder eine geodätische Linie des Grundkegels (Abb. 3). Der

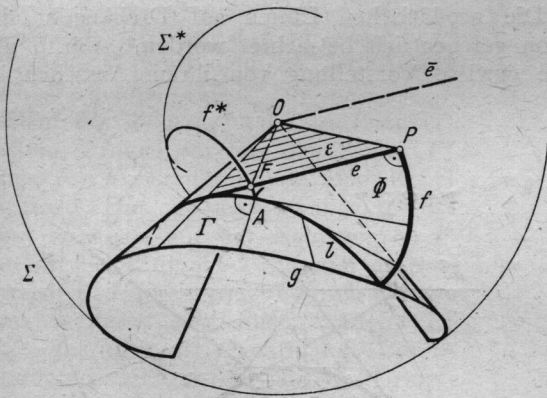


Abb. 3

Schnittwinkel von l_1 mit den Mantelstrahlen von Γ_1 ist aber jetzt — im Gegensatz zu der Sachlage bei den Stirnrädern — nicht mehr konstant.

Entsprechende Verhältnisse liegen auf dem zweiten Rad bei den Gegenflanken Φ_2 vor, weshalb in Abb. 3 die Indizes unterdrückt wurden.

Genau wie im I. Abschnitt beweist man, daß einer der Grundkegel samt einer ihn berührenden Erzeugenden beliebig angenommen werden kann; hierdurch ist zunächst die betreffenden Flankentorse festgelegt und die zugehörige Gegenflanke erweist sich ebenfalls als abwickelbar.

Greift man für eine bestimmte Eingriffsstellung auf der Berührungserzeugenden $e_1 = e_2$ einen beliebigen Punkt $P_1 = P_2$ heraus, so durchläuft er als Mitglied des ersten Systems beim Abrollen der Ebene ε_1 auf dem Grundkegel Γ_1 eine Bahnkurve f_1 , die eine Fadenevolvente der Gratlinie l_1 ist; entsprechend beschreibt derselbe Punkt, als zum zweiten System gehörig betrachtet, beim Rollen von ε_2 auf Γ_2 eine Filarevolvente f_2 von l_2 . Wegen der Unveränderlichkeit der Abstände $OP_1 = OP_2$ liegen die Bahnen f_1 und f_2 auf einer Kugel Σ um O und können auch als sphärische Evoluten der Grundkegelspuren $g_1 = \Gamma_1 \Sigma$ und $g_2 = \Gamma_2 \Sigma$ angesehen werden (Abb. 3); gleichzeitig stellen sie ein Paar zusammengehöriger Profile der sphärischen Verzahnung dar.

Die Kugeln Σ um O übernehmen bei den Kegelrädern die Rolle der Schichtenebenen σ der Stirn-

räder (Abschnitt I). Jede solche Kugel schneidet die (vollständige) Flankenfläche Φ — auf den Index kann im folgenden verzichtet werden — nach einem Paar von sphärischen Evoluten f , beschrieben von den beiden Schnittpunkten $P = e \Sigma$. Dieses Kurvenpaar rückt zusammen für die kleinste Kugel Σ^* , die noch reelle Schnitte liefert, also jene, die e berührt. Die Torse Φ ist demnach der Kugel Σ^* umschrieben und berührt sie längs jener sphärischen Evolvente f^* von l , die vom Fußpunkt F des aus O auf e gefällten Lotes durchlaufen wird (Abb. 3). Dies ist der wesentliche Inhalt des bekannten Satzes, wonach die Tangenten und Schmiegeebenen einer Kegelgeodätischen von der Kegelspitze konstanten Abstand haben.⁴ — Der Punkt A , in welchem F auf Γ (mit einer Spitze) aufsetzt, kann als „Scheitel“ der Gratlinie l bezeichnet werden, da er durch eine stationäre Schmiegeebene (verschwindende Torsion) ausgezeichnet ist.⁵

Zu einer besonders einfachen, anscheinend noch nicht vermerkten Auffassung der Tangentenfläche Φ einer Kegelgeodätischen l gelangt man, wenn man bei der Rollung der Ebene ε auf Γ neben der Erzeugenden e noch den parallelen Bündelstrahl $\bar{e}$ durch O mitnimmt: Derselbe überstreicht eine Kegelfläche $\bar{\Phi}$, deren Normalen mit denen von Φ identisch sind, so daß Φ eine Parallelfläche von $\bar{\Phi}$ ist. Die abwickelbaren Zahnflanken von Kegelrädern können mithin als Parallelflächen (Flächen konstanten Abstandes) von gewöhnlichen konischen („geraden“ oder „radialen“) Zähnen gedeutet werden.

III. Eine neue Kegelrad-Schrägverzahnung

Zur Spezialisierung der allgemeinen Entwicklungen des vorigen Abschnittes bietet sich vor allem die Wahl von Γ_1 als Drehkegel mit der Achse a_1 und der Spitze O an. Die Tangentialebenen ε_1 schneiden dann den Wälzkegel Ω_1 unter einem festen Eingriffswinkel α und demzufolge ist auch Γ_2 ein Drehkegel. Da die Räder gleichartig sind, können im folgenden die Indizes meist entbeht werden. Für den halben Öffnungswinkel γ eines Grundkegels gilt die Formel

$$\sin \gamma = \cos \alpha \cdot \sin \varrho. \quad (3)$$

Die Spuren g eines Grundkegels Γ auf beliebigen Kugeln um O sind Kreise, die sphärischen Zahnprofile f mithin sphärische Kreisevolventen, die auf Grund ihrer Entstehung untereinander geometrisch ähnlich sind. Umgekehrt führt die Forderung ähnlicher Zahnprofile zwangsläufig auf die vorliegende Evolutenverzahnung.

⁴ Schell-Salkowski: Allgemeine Theorie der Kurven doppelter Krümmung (Leipzig und Berlin 1914); 34, 67, 188. — G. Loria: Curve sghembe speciali, Bd. II (Bologna 1925); 206 ff.

⁵ Im übrigen gilt für Kegelgeodätische der unschwer einzusehende Satz von Enneper, wonach das Verhältnis von Torsion zu Krümmung proportional der vom Scheitel aus gemessenen Bogenlänge ist.

Eine besonders anschauliche Vorstellung gewinnt man, wenn man sich einen ringförmigen Ausschnitt der Eingriffsebene ε bandartig um die Grundkegel geschlungen denkt (Abb. 4).

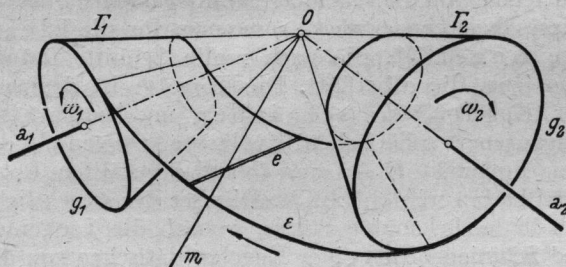


Abb. 4

Beim Arbeiten der Zahnräder wickelt sich dieses Band zwangsläufig von einem Grundkegel ab und auf den anderen auf. Führt man nun auf dem unverbogenen Zwischenstück einen schrägen Schnitt e , so überstreichen die beiden entstehenden Schnittkanten bei der Wickelbewegung die Zahnflanken Φ_1 und Φ_2 .⁶

Vergrößert man den Achsenwinkel $a_1 a_2 = \varrho_1 + \varrho_2$ bei gleichbleibenden Grundkegeln, so verlängert sich das Zwischenstück des Bandes und der Eingriffswinkel α wird größer, Übersetzungsverhältnis und Zahnflanken bleiben aber offensichtlich unverändert; es findet lediglich eine neue Paarung der beim Eingriff zur Berührung gelangenden Erzeugenden e statt. So läßt sich die bekannte Eigenschaft der Evolventenverzahnung, Änderungen des Achsenwinkels (innerhalb gewisser Grenzen) zu gestatten, anschaulich und ohne Rechnung einsehen.

Die abwickelbaren Zahnflanken Φ sind nach Abschnitt II die Tangentenflächen von geodätischen Linien l auf Drehkegeln I und können als Parallelflächen der gewöhnlichen „geraden“ Evolventenzähne auf Kegeln angesehen werden. Die von ihnen selbst gebildeten Zähne sind aber als Schrägzähne anzusprechen, da ihre Erzeugenden ja nicht durch O gehen.

Trotz der ausgezeichneten Eigenschaften dieser besonderen Verzahnung, auf die wir hier in natürlichster Weise geführt wurden, nämlich konstanten Eingriffswinkel und ebene Eingriffsfläche, abwickelbare Zahnflanken und ähnliche sphärische Profile, ferner zulässige Änderung des Achsenwinkels ohne Störung der Eingriffs- und Übersetzungsverhältnisse, treten derartige Schrägzähne auf Kegeln in der Praxis nicht auf. — Man unterscheidet die üblichen Formen bekanntlich gemäß dem Bild, das sie nach Verebnung des

Wälzkegelmantels Ω bieten, m. a. W. nach dem Charakter des zugehörigen Planrades; die einzelnen Punkte der Zahnflanken hat man sich dabei durch die Flankennormalen mit den zugehörigen Elementen von Ω starr verbunden zu denken.⁷ Die Ausführungen mit sogenannten „Tangenten“- oder „Pfeilzähnen“⁸ sind durch geradlinige Zahnbasen in dieser Verebnung erklärt, kommen also unseren Schrägzähnen am nächsten; sie stimmen jedoch nicht mit diesen überein, wenn sie auch abwickelbar sind (Abschnitt IV). Bei uns treten ja gerade Linien nur bei Abwicklung des Grundkegelmantels I auf, da hierbei die geodätische Gratlinie l gestreckt wird.

Bevor wir über die Art unseres Planrades Aussagen machen können, müssen wir etwas auf die darstellende Geometrie der auftretenden Drehkegelgeodätischen eingehen.

Die geodätischen Linien auf Drehkegeln sind schon gelegentlich betrachtet worden.⁹ Abb. 5 gibt eine gewisse Vorstellung von ihrem Aussehen bei

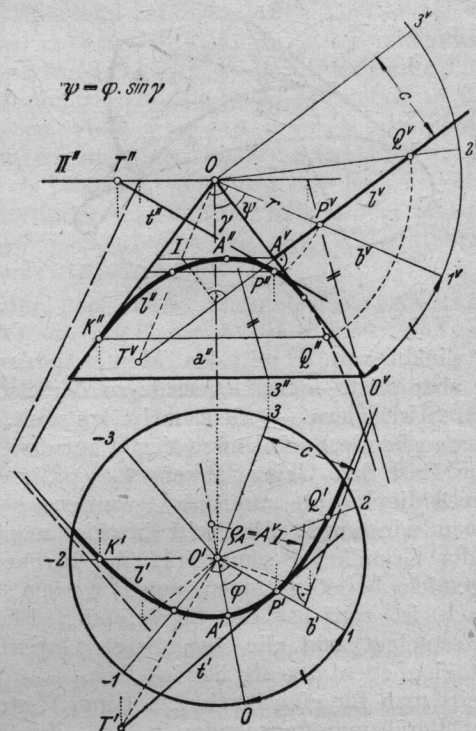


Abb. 5

lotrechter Kegelachse a . Zu dieser Darstellung in Grund- und Aufriß ist zu bemerken: Man beginnt mit der Verebnung des Kegelmantels I , der in

⁶ Ein analoges Gedankenmodell ist auch für den allgemeinen Fall im II. Abschnitt möglich, nur sind die Grundkegel dann keine Drehkegel.

Führt man den Schnitt e übrigens nicht gerade, sondern krumm, so überstreichen die Schnitttränder bei der Wickelbewegung ebenfalls brauchbare Zahnflanken; diese sind jetzt aber nicht abwickelbar, sondern haben die Eigenschaft, längs der Berührungslinien e untereinander kongruente Berührungszylinder zu besitzen. Wird e insbesondere als Kreis angenommen — was für die Herstellung von Vorteil wäre — so sind die Zahnflanken Teile spezieller Rohrflächen.

⁷ Dies erfordert eine gewisse freie Beweglichkeit der Flankenelemente gegeneinander, die jedoch längs der Berührungslinien e , längs welcher beim Eingriff die Berührung mit der Gegenflanke stattfindet, nicht benötigt wird. Die Verbiegung des Wälzkegels erfolgt ja längs der Mantelstrahlen m , und diese werden von den Normalen der Punkte auf e getroffen. Die Berührungslinien bleiben also erhalten und könnten einzeln starr ausgebildet werden.

⁸ Z. B. H. Dubbel: Taschenbuch für den Maschinenbau, Bd. I (8. Aufl., Berlin 1941); 578.

⁹ Z. B. bei G. Scheffers: Lehrbuch der Darstellenden Geometrie I (Berlin 1919); 342 ff.

einen Kreissektor I^v übergeht; auf diesem erscheint die geodätische Linie l als Gerade l^v . Ihr dem Zentrum O am nächsten gelegener Punkt A entspricht aus Symmetriegründen einem Kurvenscheitel A , den wir uns gegeben denken. Um nun einen beliebigen Punkt P aus der Abwicklung auf den Kegel zu übertragen, suchen wir zunächst den ihn tragenden Mantelstrahl $b = OI$ im Grundriß auf; die erforderliche Übertragung des Randkreisbogens $OI = O^vI^v$ kann mittels einer Näherungskonstruktion oder durch Auftragen der Zentriwinkel φ und $\psi = \varphi \cdot \sin \gamma$ geschehen. Ferner zeichnen wir den durch P gehenden Parallelkreis im Aufriß, wo er als Strecke erscheint, die auf den Umrißerzeugenden die bekannte Länge $r = OP^v$ abschneidet. Nunmehr kann der Halbmesser des Parallelkreises abgegriffen und im Grundriß als $r' = O'P'$ auf b' abgetragen werden; der so gewonnene Grundriß P' wird dann in den Aufriß nach P'' gelotet.

Um die Tangente t in P zu ermitteln, denken wir uns den Sektor I^v längs $b = b^v$ berührend an den Kegel angelegt. Die gesuchte Tangente ist dann identisch mit der Neulage von l^v und ihr Schnittpunkt T mit der achsennormalen „Hauptebene“ Π durch O kann ohne weiteres gezeichnet werden: Er liegt auf dem zu b normalen Durchmesser des Sektors (der auch im Grundriß normal zu b' erscheint) und hat die aus der Verebnung zu entnehmende Entfernung $OT = OT^v$.

Wenden wir dieses Verfahren auf einen Fernpunkt von l an, so gelangen wir zur Asymptote und erkennen, daß diese im Grundriß wie im Raum den Zentralabstand $c = OA^v$ hat.

Die Gleichungen der Drehkegelgeodätischen lassen sich auf Grund der erwähnten Proportionalität der Zentriwinkel $\psi/\varphi = p = \sin \gamma$ in Kugelkoordinaten (räumlichen Polarkoordinaten) r, φ, ϑ sofort hinschreiben, wenn man ψ als Parameter verwendet.

$$r = \frac{c}{\cos \psi}, \quad \varphi = \frac{\psi}{p}, \quad \vartheta = \gamma = \text{const.} \quad (4)$$

Die Geodätischen auf einem Drehkegel sind untereinander ähnlich und bestehen im allgemeinen aus unendlich vielen kongruenten und symmetrischen Ästen. Für rationale Werte von $p = \sin \gamma$ fallen die Kurven aber geschlossen aus und sind dann algebraisch¹⁰.

Der Grundriß der Drehkegelgeodätischen — d. h. ihre Normalprojektion in Achsenrichtung — hat auf Grund von (4) die Polargleichung

¹⁰ Schreibt man in diesem Fall $p = \lambda/\mu$ als gekürzten (und echten) Bruch an (λ und μ positiv-ganz und teilerfremd), so lauten die algebraischen Charaktere: Ordnung der Raumkurve 2μ , Rang der Kurve = Ordnung ihrer Tangentenfläche $2(\lambda + \mu)$, gleichzeitig deren Klasse sowie die Ordnung der zugehörigen sphärischen Kreisevolventen.

$$r' = \frac{pc}{\cos p\varphi}, \quad (5)$$

ist demnach eine Ährenkurve von Aubry.¹¹ Dieselbe entsteht durch $1/p$ -fache Winkelstreckung einer Geraden, als Inverse einer Rosenkurve, Polarreziproke einer Epizykloide und schließlich als Ort des Schnittpunktes zweier Kreistangenten, die mit proportionalen Geschwindigkeiten auf ihrem Kreis rollen.

Aus bestimmten Gründen wollen wir die durch (4) erklärten Raumkurven „konische Ähren-

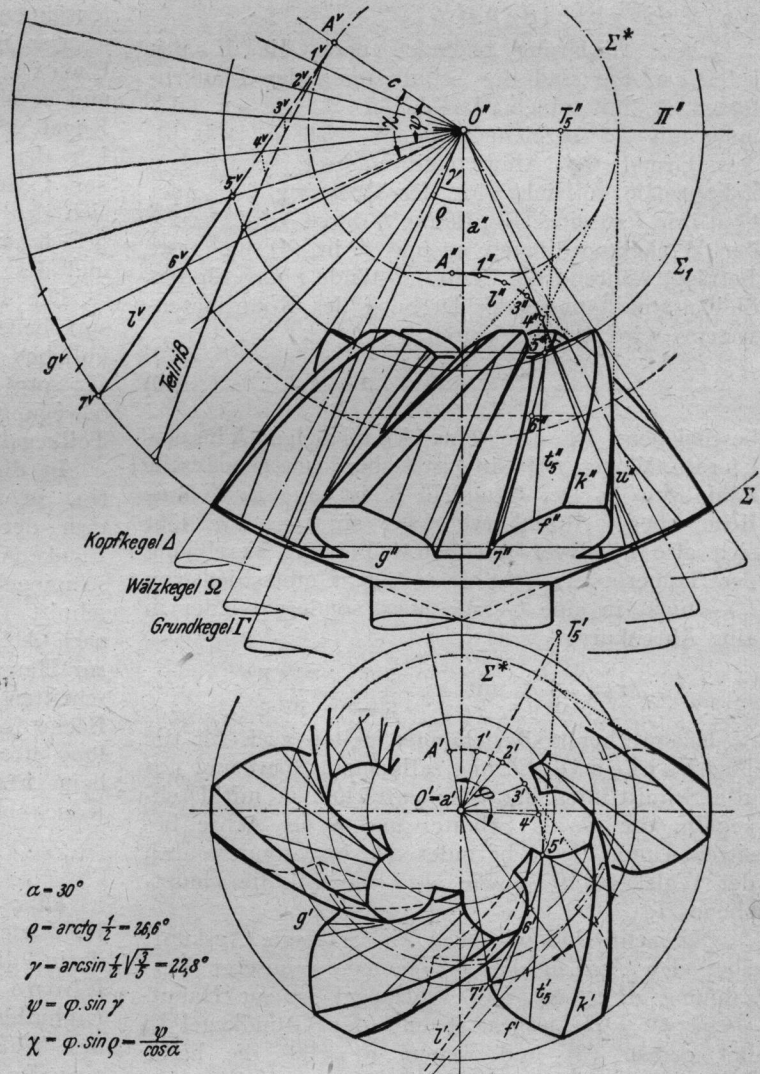


Abb. 6

kurven“ nennen, gleichgültig, welche Werte die Konstanten p und γ besitzen. Für $p = \sin \gamma$ sind es Kegelgeodätische, sonst Affine hiervon.

Abb. 6 stellt nun ein kleines Kegelrad mit sechs Zähnen dar, die nach dem auseinandergesetzten Prinzip ausgebildet sind. Der Deutlichkeit zuliebe wurden etwas übertriebene Abmessungen zugrundegelegt; so beträgt der Eingriffswinkel $\alpha = 30^\circ$, so daß zu einem Wälzkegel Ω mit der halben

¹¹ H. Wieleitner: Spezielle Ebene Kurven (Samml. Schubert, Bd. 56); 82, 124, 241. — G. Loria: a. a. O. 215.

Öffnung $\varrho = 26^\circ 34'$ ($= \arctg 0.5$; Übersetzung 1:2 bei rechtwinkligen Achsen) gemäß (3) ein Grundkegel I' mit $\gamma = 22^\circ 47'$ gehört. Von der Gratlinie l der Zahnflanken wurde jenes Stück verwendet, dessen Schnittwinkel mit den Mantelstrahlen von I' zwischen 20° und 40° liegt. Die Darstellung der Kegelgeodätischen l und ihrer Tangenten t ($=$ Flankenerzeugenden e) geschah gemäß Abb. 5. Die Darstellung der sphärischen Zahnprofile f , durch welche die Zähne begrenzt wurden, darf wohl als hinreichend bekannt angesehen werden;¹² sie erscheinen im Grundriß als Bögen von Epizykloiden.¹³

Einer Erklärung bedürfen noch die Kopfkanten. Sie sind die Schnittlinien der Flankentorsen ϕ mit einem Drehkegel Δ , dessen Öffnung mit 2δ bezeichnet sei ($\delta \approx 34^\circ$ in Abb. 6). Auf Grund der Ähnlichkeit unserer sphärischen Zahnprofile vollzieht sich der Übergang von einer Gratlinie l zu einer Kopfkante k durch Veränderung der Winkelkoordinaten φ und θ in (4) um feste Beträge, während die Zentralabstände r unverändert bleiben; nach passender Drehung des Koordinatensystems wird k daher durch

$$r = \frac{c}{\cos \varphi}, \varphi = \frac{\psi}{\phi}, \theta = \delta \quad (6)$$

beschrieben, ist also eine konische Ährenkurve. Wegen $\phi \neq \sin \delta$ ist k aber keine geodätische Linie von Δ . Der Grundriß k' ist eine zu l' ähnliche ebene Ährenkurve $r' = c \sin \delta / \cos \phi \varphi$, läßt sich also unschwer zeichnen.¹⁴ Bei der Verebnung des Trägerkegels geht k — zum Unterschied von l — nicht in eine Gerade über, sondern wieder in eine Ährenkurve

$$r = \frac{c}{\cos q\chi} \text{ mit } q = \frac{\phi}{\sin \delta} = \frac{\sin \gamma}{\sin \delta} \quad (7)$$

Entsprechende Beziehungen gelten auch für die Fußkanten der Zähne, allgemein überhaupt für alle Schnittlinien der Flankenflächen ϕ mit Drehkegeln, die O als Scheitel und a als Achse besitzen. Unter diesen befindet sich insbesondere auch der Wälzkegel Ω , sowie als Grenzfall die Hauptebene Π .

Nunmehr sind wir auch in der Lage, Auskunft über den Aufbau des Planrades unserer Verzahnung zu geben: Der Wälzkegel ist zur Hauptebene $\Omega = \Pi$ ausgeartet und der Grundkegel I_0 hat gemäß (3) und wegen $\varrho_0 = 90^\circ$ die halbe Öffnung $\gamma_0 = 90^\circ - \gamma$. Da der letztere nicht ausgeartet ist, treten keine grundsätzlichen Verein-

fachungen auf. Insbesondere sind die Zahnflanken Φ_0 nicht etwa eben, sondern genau so die Tangentenflächen von Drehkegelgeodätischen, wie im allgemeinen Fall. Die auf ihnen verlaufenden konischen Ährenkurven werden durch Gleichung (6) dargestellt, in welcher $\phi = \sin \gamma_0 = \cos \alpha$ zu setzen ist. Ihre Normalrisse auf die Hauptebene Π sind untereinander ähnliche Ährenkurven mit der Polargleichung $r' \cdot \cos \phi \varphi = \text{const}$, unter welchen auch die Spurlinie $\Phi_0 \Pi$ auftritt. Diese Ährenkurven geben dem Planrad sein Gepräge und unterscheiden es von dem bekannten Planrad mit ebenen Tangentenzähnen.

Der in einer beliebigen Projektion auftretende Umriß einer Zahnflanke ϕ ist natürlich gerade und berührt den scheinbaren Umrißkegelschnitt der Kugel $\Sigma^* (O, c)$, der die Torse ja umschrieben ist. Für den Grundriß fällt die Umrißerzeugende mit der Gratasymptote zusammen; im Aufriß ergibt sich der Umriß u'' meistens hinreichend genau als gemeinsame Tangente der Projektionen k'' , l'' und des Umrißkreises von Σ^* .¹⁵

Die Herstellung von Kegelrädern der besprochenen Art ist durch leichte Abwandlung des üblichen Wälzverfahrens möglich, indem man dafür sorgt, daß ein geeignetes Werkzeug eine Wälzbewegung auf dem Grundkegel I' statt auf dem Teilkegel Ω vollführt.

In diesem Zusammenhang ist es nicht unwichtig, zu erwähnen, daß die Scheiteltangenten der Gratlinien Wendeerzeugende der Flankentorsen sind, da die berührenden Gratschniegebenen für die Scheitel stationär sind (Abschnitt II). Diese Erzeugenden verlaufen bei uns nach Abb. 5 im gleichen Abstand $c \cos \gamma$ parallel zur Hauptebene Π und sollen möglichst nicht überschritten werden, da hierbei die konvexe Zahnoberfläche in eine konkave übergeht, was die Herstellung stört. Bei sehr flachen Rädern und vor allem beim Planrad lassen sich diese Wendeerzeugenden jedoch nicht vermeiden.

IV. Ebene Zahnflanken

Eine andere naheliegende und besonders bei Hohlrädern zweckmäßige Spezialisierung besteht darin, die eine Flankenfläche — etwa $\pm \phi$ — als Ebene anzunehmen. Die Gegenflanke ϕ_2 ist als Einhüllende der Lagen, die ϕ_1 bei der Rollung des Wälzkegels Ω_1 auf Ω_2 einnimmt, sicherlich eine Torse.

Fällen wir aus dem Bündelzentrum O das Lot auf die Ebene ϕ_1 , so erhalten wir einen Fußpunkt F ; seine Rollbahn ist eine sphärische Radlinie f^* auf einer Kugel Σ^* , und die Torse ϕ_2 ist die der Kugel längs f^* umschriebene abwickelbare Fläche. Auf der ebenen Flanke ϕ_1 bildet die Schar der Erzeugenden (Berührungslinien) e_1 das Strahlbüschel F . Der Grundkegel I_1 ist mithin in die Lotgerade OF ausgeartet, womit die Einordnung in die allgemeinen Entwicklungen des

¹² W. Hartmann: Die Maschinengetriebe, Bd. I (Stuttgart u. Berlin 1913); 425 ff. — K. Mack: Geometrie der Getriebe (Berlin u. Wien 1931); 73 ff. — J. Krames: Darstellende und Kinematische Geometrie für Maschinenbauer (Wien 1947); 207 ff.

¹³ A. Enneper: Zur Theorie der Curven doppelter Krümmung. Math. Ann. 19 (1882). — In die Lehrbücher der Kinematik hat diese Tatsache allerdings bis jetzt noch keinen Eingang gefunden. Ein einfacher Beweis findet sich in der Abhandlung des Verfassers: Über die Böschungslinien auf Flächen 2. Ordnung, Sitzber. Ak. Wiss. Wien 155 (1947), 109.

¹⁴ Bei ökonomischem Vorgehen und geschickter Verwendung von Pauspapier und Stechzirkel ist der zur Herstellung eines Bildpaares wie Abb. 6 erforderliche Zeichenaufwand durchaus mäßig.

¹⁵ Der Gratpunkt U auf u läßt sich dann nachträglich folgendermaßen hinzufügen: Sein Aufriß U'' wird vom Fußpunkt des aus O'' auf u'' gefällten Lotes durch die Umrißerzeugenden des Grundkegels I' harmonisch getrennt.

II. Abschnittes hinreichend klargestellt ist. Der Grundkegel Γ_2 kann als Evolutenkegel der Radlinie γ^* gekennzeichnet werden.

Derartige ebene Zahnflanken liegen bekanntlich beim Planrad mit Tangentenzähnen (oder den durch Kombination hervorgehenden Pfeilzähnen) vor.⁸ Entsprechend der Tatsache, daß hier der Wälzkegel Ω_1 zu einer Ebene verflacht ist, ist die obengenannte auf der Kugel Σ^* verlaufende

Berührungslinie γ^* der Gegenflanke ϕ_2 jetzt als verallgemeinerte sphärische Kreisevolvente anzusprechen. Damit ist nun auch die einzige abwickelbare Kegelrad-Schrägzahnflanke der Praxis vom geometrischen Standpunkt aus hinreichend gekennzeichnet. Ihre sphärischen Profile sind natürlich keine Kreisevolventen, daher gestatten solche Kegelräder auch keine Änderung des Achsenwinkels.