

Ein Spiegelproblem.

Von

Walter Wunderlich, Wien.

Mit 3 Abbildungen.

(Eingelangt am 10. Juni 1948.)

1. Problemstellung.

Eine als spiegelnd vorausgesetzte Ellipse hat bekanntlich die Eigenschaft, das von einem Brennpunkt ausstrahlende Büschel von Lichtstrahlen nach einer ungeraden (bzw. geraden) Anzahl von Reflexionen wieder im anderen (bzw. im selben) Brennpunkt zu vereinigen. Diese Tatsache kann zum Anlaß der folgenden verallgemeinerten Aufgabenstellung genommen werden:

In der Ebene sind zwei feste Punkte A und B gegeben. Es sind analytische Spiegelkurven zu suchen, die das Büschel der aus A kommenden Lichtstrahlen nach n -maliger Reflexion nach B werfen.

Für $n=1$ wird man im wesentlichen auf Kegelschnitte mit A und B als Brennpunkten geführt, und zwar auf durchaus elementarem Wege. Für $n > 1$ sind meines Wissens außer dem eingangs angeführten trivialen Beispiel keine Lösungen bekannt. Es muß betont werden, daß nur analytische — also einheitliche — Spiegelkurven interessieren; andernfalls ließen sich leicht Kurven mit der verlangten Eigenschaft aus mehreren Stücken zusammensetzen: Man könnte z. B. die Bögen für die ersten $n-1$ Reflexionen innerhalb gewisser Grenzen beliebig wählen und das Kurvenstück für die letzte Spiegelung dann so konstruieren, daß die Vereinigung des Strahlensystems in B herbeigeführt wird.

Schon für den Fall $n = 2$ sind die Schwierigkeiten der gestellten Aufgabe anscheinend nicht gering. Im vorliegenden Aufsatz werden zwei Teillösungen dieses speziellen Problems gegeben, die sich mit elementaren Mitteln erledigen lassen, nämlich für die Annahme zusammenfallender Zentren $A = B$, ferner für unendlich-ferne Zentren.

Die Erweiterung der Fragestellung auf den Raum liegt auf der Hand, doch soll hierauf nicht eingegangen werden. Es sei nur auf eine nicht-triviale Lösung des Falles $n = 3$ für die besondere Annahme zusammenfallender Fernzentren hingewiesen, die den eigentlichen Anstoß zu der vorliegenden Untersuchung gab: Ein parallel zur Achse eines elliptischen Paraboloides ins Innere einfallendes Strahlbündel tritt nach dreimaliger Reflexion wieder parallel zur Achse aus¹.

2. Spiegelkurven, die ein eigentliches Strahlbündel nach zweimaliger Reflexion in den Ausgangspunkt zurückwerfen.

Sei $n = 2$ und $A = B$ ein endlicher Punkt. Ein von A ausgehender Lichtstrahl treffe die Spiegelkurve k zum erstenmal im Punkt S , nach Reflexion an der Tangente s daselbst zum zweitenmal in T , und gelange nach neuerlicher Spiegelung an der zugehörigen Tangente t nach A zurück (Abb. 1). Der Strahl ST ist eine Normale jenes Zweiges der

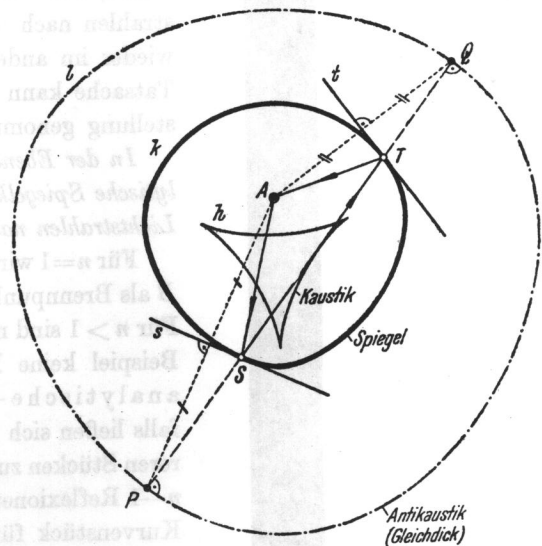


Abb. 1. Spiegelkurve mit der Eigenschaft, das Strahlbündel A nach zweimaliger Reflexion wieder in A zu sammeln.

Antikaustik l , der den zu A bezüglich s spiegelbildlichen Punkt P enthält, ebenso aber auch eine Normale jenes Zweiges, auf welchem

¹ W. Wunderlich, Spiegelung am elliptischen Paraboloid. Mh. Math. 52 (1948), 13—37.

das Spiegelbild Q von A bezüglich t liegt². Da s und t Tangenten ein und derselben Spiegelkurve k sein sollen, hat deren Gegenpunktskurve l die Eigenschaft, jede Normale als Doppelnormale zu besitzen. Sie ist dann eine Kurve konstanter Breite (ein „Gleichdick“) und die Spiegelkurve kann als ihre negative Gegenpunktskurve für das Zentrum A erhalten werden, d. h. sie wird von der Symmetrale s der Strecke AP eingehüllt, wenn P die Kurve l durchläuft.

Eine Spiegelkurve, die ein eigentliches Strahlbüschel nach zweimaliger Reflexion in den Ausgangspunkt zurückwirft, ist negative Gegenpunktskurve (oder negative Fußpunktskurve) einer Kurve konstanter Breite.

Damit ist dieser Sonderfall grundsätzlich erledigt, denn die Herstellung von Kurven konstanter Breite — etwa durch Annahme ihrer Evolute, d. h. der Kautik — ist hinlänglich bekannt³. Die konstante Breite PQ gibt übrigens die Länge des konstanten Lichtweges $ASTA$ an.

Die einfachste Annahme für eine Kurve konstanter Breite ist natürlich der Kreis. Da das Zentrum A im Innern liegen muß, ergibt sich dann als Spiegelkurve zwangsläufig eine Ellipse mit dem Brennpunkt A , also das Ausgangsbeispiel.

Die bekanntesten nichttrivialen analytischen Gleichdicks sind vielleicht die Evoluten der Steinerzykloide (der dreispitzigen Hypozykloide⁴). Auf Grundlage dieser Annahme gelangt man i. a. zu Spiegelkurven 14. Ordnung und 12. Klasse, die 6 Spitzen auf der Zykloide besitzen, nämlich in den Mittelpunkten jener Krümmungskreise der Evolute, die durch das Zentrum A gehen. Wählt man den Durchmesser des Gleichdicks hinreichend groß, so wird es sich wenig vom Kreis unterscheiden und man kann erreichen, daß A im Innern sämtlicher Krümmungskreise liegt; dann fällt der reelle Zug der Spiegelkurve singularitätenfrei aus (Abb. 1).

² Wird ein Strahlbüschel A an einer Kurve k reflektiert, so entsteht eine Strahlenschar, deren Hüllkurve h als Kautik, und deren Orthogonaltrajektorien als Antikaustiken bezeichnet werden. Unter den letzteren befindet sich die Gegenpunktskurve l von k bezüglich A , d. h. der Ort der Spiegelbilder von A bezüglich der Tangenten von k ; l kann als Rollkurve erhalten werden, wenn nämlich auf der Grundkurve k eine kongruente Kurve k' rollt und einen Punkt A' mitnimmt, derart, daß k und k' sowie A und A' stets spiegelbildlich zur Wälztangente liegen. Die Kautik h ist die Evolute von l .

³ Vgl. z. B. *F. Schilling*, Die Theorie und Konstruktion der Kurven konstanter Breite. *Z. Math. Phys.* **63** (1915), 67—136.

Vom algebraischen Standpunkt aus etwas einfachere Verhältnisse würden an sich bei Annahme der Kardioiden (der einspitzigen Epizykloide⁴) als Kaustik auftreten, doch sind die daraus abgeleiteten Spiegelkurven (i. a. 10. Ordnung und 8. Klasse) niemals ohne reelle Singularitäten.

3. Spiegelkurven, die ein Parallelenbündel nach zweimaliger Reflexion wieder als Parallelenbündel zurückwerfen.

Seien A und B Fernpunkte und $n = 2$. Ein aus A kommender Lichtstrahl werde durch zweimalige Reflexion an der Spiegelkurve k in den Punkten S und T um den Winkel 2ω in die Richtung B umgelenkt (Abb. 2). Bezeichnen σ und τ die Einfallswinkel gegen die Tangenten s in S und t in T , so erscheint die konstante Gesamtablenkung 2ω aus den veränderlichen Bestandteilen 2σ und 2τ zusammengesetzt, und man erkennt:

Zusammengehörige Spiegeltangenten schließen einen unveränderlichen Winkel $\sphericalangle st = \sigma + \tau = \omega$ ein.

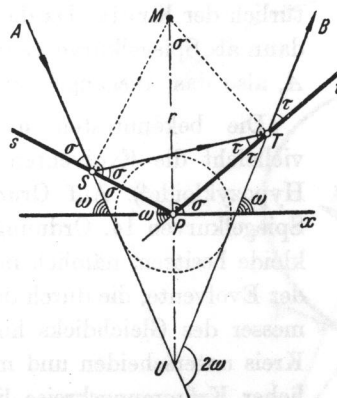


Abb. 2. Zusammenhang der Parallelenbündel A und B , vermittelt durch zweimalige Reflexion.

Die Spiegelkurve k läßt sich also als *Hüllkurve eines starren Winkels* $st = \omega$ erzeugen. Um eine Aussage über die Bahn des Winkelscheitels P zu gewinnen, suchen wir das Momentanzentrum M auf, das sich im Schnitt der Spiegelnormalen von S und T ergibt⁵; die Bahntangente von P ist dann normal zu MP . Nun ist aber, wie aus Abb. 2 ersichtlich, P der Inkreismittelpunkt des Lichtstrahldreiecks STU — wobei U den Schnitt von einfallendem und ausfallendem Lichtstrahl bezeichnet — mithin M ein Ankreismittelpunkt; MP deckt sich also mit der Halbierenden des Winkels TUS , hat demnach konstante Richtung,

⁴ H. Wieleitner, Spezielle ebene Kurven (Sammlg. Schubert 56). G. Loria, Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven (deutsch von F. Schütte).

⁵ Die Elemente der Kinematik lehren, daß sich der Bewegungszustand eines starren ebenen Systems in jedem Augenblick als Drehung um einen bestimmten Punkt M , das „Momentanzentrum“ auffassen läßt. Die Bahnnormalen aller Systempunkte gehen in diesem Augenblick durch M , ebenso auch die Berührungsnormalen aller Gleitkurvenpaare.

und Gleiches gilt für die dazu senkrechte Bewegungsrichtung von P . Hieraus folgt aber unmittelbar:

Die Bahn des Winkelscheitels P ist eine Gerade, die den Winkel 2ω zwischen Einfallrichtung A und Austrittsrichtung B halbiert.

Machen wir jetzt die Bahngerade des Scheitels P zur x -Achse eines Normalkoordinatensystems, so läßt sich die Bewegung des Winkels st durch Angabe der Abhängigkeit der Scheitelabszisse X vom Drehwinkel σ festlegen. Die Spiegelkurve k kann dann als Einhüllende der Tangente t

$$x \sin \sigma - y \cos \sigma = X \sin \sigma \quad (1)$$

bestimmt werden; da wir verlangen, daß auch die Tangente s dieselbe Hüllkurve liefert, muß

$$X(\sigma) = X(\sigma - \omega) \quad (2)$$

eine periodische Funktion mit der Periode ω sein.

Nach dieser Festsetzung ergibt sich dann aus der Tangentengleichung (1) und ihrer Ableitung nach σ

$$x \cos \sigma + y \sin \sigma = X \cos \sigma + X' \sin \sigma \quad (1')$$

die Parameterdarstellung der Spiegelkurve k :

$$x = X + X' \sin \sigma \cos \sigma, \quad y = X' \sin^2 \sigma. \quad (3)$$

Damit ist das vorliegende Teilproblem grundsätzlich erledigt. Einige mit der Aufgabe verknüpfte geometrische Örter, vor allem die Polkurven und die Brennlinien, sollen noch kurz angegeben werden.

Die Rastpolbahn p — d. i. der Ort der Momentanzentren M in der ruhenden Unterlage — ergibt sich mit

$$x = X, \quad y = X'. \quad (4)$$

Die Gangpolbahn q — der Ort der Zentren M im bewegten System⁶ — stellt sich in einem Polarkoordinatensystem r, σ , dessen Nullpunkt im Winkelscheitel P liegt, dar durch

$$r = X'; \quad (5)$$

die Nullrichtung steht dabei senkrecht auf t und die Winkelzählung erfolgt im negativen Sinn.

Die Darstellung der K a u s t i k, die von den reflektierten Strahlen ST eingehüllt wird, gestaltet sich in Punktkoordinaten ziemlich umständlich; wir begnügen uns daher mit der Angabe der Tangentengleichung. Der Richtungswinkel von ST beträgt

⁶ Während der Bewegung rollt bekanntlich die Gangpolbahn auf der Rastpolbahn gleitungslos ab.

$$\varphi = \sigma - \tau = 2\sigma - \omega, \quad (6)$$

und damit schreibt sich die Tangentengleichung der Brennlinie

$$x \sin \varphi - y \cos \varphi = X(\sigma) \cdot \sin \varphi + \frac{1}{2} X'(\sigma) \cdot (\cos \omega - \cos \varphi); \quad (7)$$

σ ist natürlich gemäß (6) durch $\frac{1}{2}(\varphi + \omega)$ zu ersetzen. Integration von (7) führt unmittelbar auf die Gleichung der Antikaustiken

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi = X(\sigma) \cdot (\cos \varphi - \cos \omega) + C. \quad (8)$$

Für den Ort der Punkte U , in welchen sich ein- und austretende Lichtstrahlen schneiden, findet man die Gleichungen

$$x = X(\sigma), \quad y = X'(\sigma) \cdot \frac{\cos \omega - \cos \varphi}{2 \cos \omega}. \quad (9)$$

4. Eine spezielle Kurvenfamilie.

Wir spezialisieren die periodische Grundfunktion (2) mit der Periode $\omega = \pi/m$ durch die Annahme

$$X(\sigma) \equiv -\operatorname{ctg} m\sigma \quad (m\omega = \pi). \quad (10)$$

Zu der dadurch definierten Familie von Spiegelkurven gehört für $m = 2$ die gewöhnliche Parabel, die sich mit ihrer bekannten Eigenschaft, achsenparallele Lichtstrahlen nach zweimaliger Reflexion wieder parallel zurückzuwerfen, hier einordnet. Die übrigen Mitglieder weisen außer ihrer merkwürdigen Spiegeleigenschaft verschiedene bemerkenswerte Zusammenhänge mit anderen bekannten Kurven auf, wie die nähere Untersuchung zeigt.

Gemäß (3) erhalten wir im vorliegenden Fall als Gleichungen der Spiegelkurve

$$x = \frac{m \sin 2\sigma - \sin 2m\sigma}{1 - \cos 2m\sigma}, \quad y = \frac{m(1 - \cos 2\sigma)}{1 - \cos 2m\sigma}. \quad (11)$$

Dem Parameterbereich $-\omega < \sigma < \omega$ entspricht ein einsinnig gekrümmter, zur y -Achse symmetrischer Ast, der sich nach beiden Seiten parabolisch ins Unendliche erstreckt. Für $m \geq 2$ besitzt er keinen störenden Doppelpunkt und vermag sämtliche auf der linken Hälfte aus der Richtung $\pi - \omega$ auftreffenden Lichtstrahlen noch ein zweites Mal zu reflektieren und in der Richtung ω zurückzuwerfen. Der Scheitelpunkt $\sigma = 0$ hat die Koordinaten $x_0 = 0$ und $y_0 = 1/m$, der zugehörige Krümmungsradius beträgt $\rho_0 = \frac{2}{3}(m - m^{-1})$.

Berechnen wir den Normalabstand p der Spiegeltangente t (1) vom Punkt F (0, 1), so erhalten wir den einfachen Ausdruck

$$p = X \sin \sigma + \cos \sigma = \frac{\sin (m-1) \sigma}{\sin m \sigma}. \quad (12)$$

Deuten wir nun p , bzw. $1/p$ als Polarkoordinate in einem System R , σ mit dem Ursprung F , so erkennen wir:

Die Fußpunktskurve der Spiegellinie für den Pol F ist die Araneide⁷ $R = \sin (m-1) \sigma / \sin m \sigma$.

Die Polarkurve der Spiegellinie bezüglich des Einheitskreises um F ist die Araneide⁷ $R = \sin m \sigma / \sin (m-1) \sigma$.

Zu rationalen Werten von m gehören rational-algebraische Spiegelkurven. Wir setzen im folgenden insbesondere $m > 1$ und ganz voraus. Führen wir durch $x = \xi_1 / \xi_0$ und $y = \xi_2 / \xi_0$ homogene Koordinaten ein, so schreibt sich die Spiegelgleichung (11) mit Benützung des komplexen Parameters $z = e^{2i\sigma}$ in der Gestalt

$$\xi_0 : \xi_1 : \xi_2 = (z^m - 1)^2 : -i(z^{2m} - m z^{m+1} + m z^{m-1} - 1) : m z^{m-1} (z - 1)^2. \quad (13)$$

Nach Kürzung durch $(z-1)^2$ erkennt man die Ordnung der Spiegelkurve mit $2(m-1)$, während sich aus der entsprechenden Umformung der Tangentengleichung (1) die Klasse mit m ergibt. Man liest ferner aus (13) die Tatsache ab, daß die Kurve die Ferngerade ($\xi_0 = 0$) in $m-1$ Punkten berührt (deren Richtungen regelmäßig im Abstand ω verteilt sind, wenn man die x -Richtung hinzunimmt), und daß die Leitgerade x ($\xi_2 = 0$) zwei konjugiert-imaginäre $(m-1)$ -fache Punkte $I_{1,2} (\pm i, 0)$ trägt, deren Tangenten in je einem Minimalstrahl zusammenfallen; der vorhin benützte Punkt F (0, 1) ist demnach als (einziger) Brennpunkt anzusehen. Für $m > 2$ treten neben I_1 und I_2 als weitere Singularitäten noch $m-2$ Spitzen auf; man findet diese bekanntlich durch Gleichsetzen der Tangentengleichung (1) mit ihrer 2. Ableitung, was im vorliegenden Fall auf die Parameterbedingung

$$\operatorname{tg} \sigma = -\frac{2 X'}{X''} = \frac{1}{m} \operatorname{tg} m \sigma \neq 0 \quad (14)$$

führt.

⁷ Eine Araneide entsteht als Ort des Schnittpunktes zweier gleichförmig rotierender Zeigerstrahlen mit verschiedenen Drehpunkten. Diese Kurven wurden unter den verschiedensten Bezeichnungen von Plateau, Schoute, Kempe, Heymann u. v. a. als „Sektizen“ zur Winkelteilung herangezogen⁴.

Der Versuch liegt nahe, das Punktepaar $I_{1, 2}$ durch eine Kollineation in die absoluten Kreispunkte zu werfen, was durch Einführung der neuen Normalkoordinaten $\xi = \xi_1/\xi_2$, $\eta = (\xi_0 - \xi_2)/\xi_2$ besorgt werden kann. Da letztere für $|z| = 1$ reell sind, können wir sie zu einer komplexen Größe $\zeta = \xi + i \eta$ zusammenfassen; wir finden zunächst

$$\zeta = \frac{2i}{m} \cdot \frac{(m-1)z^m - mz^{m-1} + 1}{z^{m-1}(z-1)^2}, \quad (15)$$

und erhalten nach Kürzung durch $(z-1)^2$ sowie Einführung des Winkelparameters ψ mittels $z = e^{-i\psi}$ schließlich

$$\zeta = \frac{2i}{m} [(m-1)e^{i\psi} + (m-2)e^{2i\psi} + \dots + 1 \cdot e^{(m-1)i\psi}]. \quad (16)$$

Eine Gleichung dieser Bauart definiert aber eine Radlinie $(m-1)$ -ter Stufe, d. i. die Bahnkurve des Endpunktes eines $(m-1)$ -gliedrigen Gelenkpolygons mit festem Anfangspunkt, dessen starre Glieder sich mit konstanten Geschwindigkeiten drehen⁸. Die vorliegende Radlinie ist insonderheit eine „zykloidale“, d. h. sie kann auch als Hüllkurve einer Geraden entstehen, die mit dem letzten Glied eines derartigen Gelenkpolygons fest verbunden ist⁹.

Die Spiegelkurve ist kollinear zu einer zyklidalen Radlinie $(m-1)$ -ter Stufe, die durch eine $(m-1)$ -fache Tangente ausgezeichnet ist und der Sippe $1:2:\dots:(m-1)$ angehört.

Untersuchung der aus (7), bzw. (8) fließenden Gleichungen der Brennlilien zeigt, daß die Kautik eine Kurve $3(m-2)$ -ter Ordnung und $2(m-1)$ -ter Klasse ist, während die Antikautiken die Ordnung $2(m-1)$ und die Klasse m haben.

Das Erzeugnis (9) der einfallenden und austretenden Lichtstrahlen erweist sich nach Transformation auf die Koordinaten $\xi = \xi_1/\xi_2$ und $\eta = \xi_0/\xi_2$ ebenfalls als kollinear zu einer Radlinie der Sippe $1:2:\dots:(m-1)$, allerdings keiner zyklidalen. Ordnung und Klasse sind beide gleich $2(m-1)$.

Für die Rastpolbahn p der Winkelbewegung findet man gemäß (4) die Parabel

⁸ W. Wunderlich, Höhere Radlinien. Öst. Ing. Arch. 1 (1947), 277—296. Nach der dort eingeführten Terminologie werden alle Radlinien mit den gleichen Geschwindigkeitsverhältnissen zu einer „Sippe“ zusammengefaßt. — Die Radlinien 2. Stufe sind identisch mit den Epi- und Hypotrochoiden.

⁹ Die zyklidalen Radlinien nehmen unter den allgemeinen Radlinien dieselbe Sonderstellung ein, wie die Zykloiden unter den Trochoiden.

$$y = m(x^2 + 1), \tag{17}$$

für die zugehörige Gangpolbahn q gemäß (5) die Kurve

$$r = \frac{m}{\sin^2 m \sigma}, \tag{18}$$

die durch m -fache Winkelstreckung (Vervielfachung der Polarwinkel σ) in die Kampa des *Eudoxus*⁴ ($m=1$) übergeht; sie ist invers zu einer speziellen Radlinie 3. Stufe der Sippe $1:(1+2m):(1-2m)$, die wiederum als Mittelpunktskonchoide einer Rosenkurve⁴ $r' = \cos 2m\sigma$ aufgefaßt werden kann.

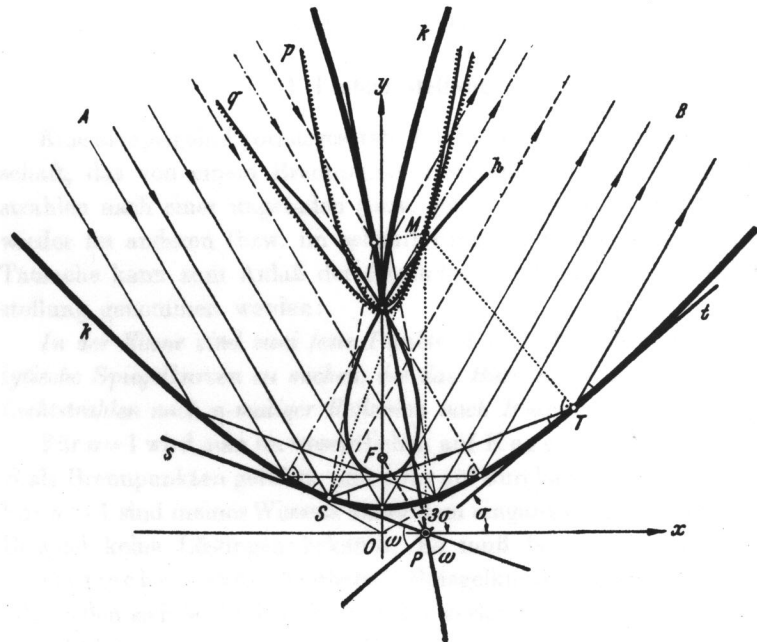


Abb. 3. Spezielle Spiegelkurve 4. Ordnung und 3. Klasse, mit der Eigenschaft, ein Parallelenbüschel um $2\omega = 120^\circ$ umzulenken.

Der nach $m = 2$ — dem parabolischen Spiegel — nächst einfachste Spezialfall $m = 3$ ist in Abb. 3 dargestellt. Es handelt sich um eine Spiegelkurve 4. Ordnung und 3. Klasse mit der kartesischen Gleichung

$$3(3x^2 - y^2 - 6y + 3)^2 = 64y^3. \tag{19}$$

Sie ist eine kollineare Kardioidenkurve (16) und kann als negative Fußpunktskurve der Hyperbel $R = \sin 2\sigma / \sin 3\sigma$ oder als Polarreziproke der

Trisektrix von *Maclaurin*⁴ $R = \sin 3 \sigma / \sin 2 \sigma$ erhalten werden. — Als Kaustik (3. Ordnung und 4. Klasse) tritt eine Tschirnhausen-Kubik⁴ auf, während die symmetrische unter den Antikaustiken (4. Ordnung und 3. Klasse) als Polarkurve der Strophoide⁴ $2 R = -\operatorname{tg} \sigma / 2$ bezüglich des Einheitskreises um den Brennpunkt $F(0, 1)$ aufgefaßt werden kann. Das Erzeugnis (4. Ordnung und 4. Klasse) ein- und austretender Lichtstrahlen ist eine kollineare Pascalschnecke⁴.