

Über die Torsen, deren Erzeugenden zwei Kugeln berühren

von

WALTER WUNDERLICH (Wien).

Am 15. November 1948 von E. J. NYSTRÖM und G. ELFVING vorgelegt.

Herr E. J. NYSTRÖM hat sich wiederholt und eingehend mit jener Strahlkongruenz 4. Grades befasst, die von den gemeinsamen Tangenten zweier Kugeln gebildet wird. Die Ergebnisse seiner schönen Untersuchungen liegen in zwei Berichten¹⁾ vor, von welchen vor allem der zweite den in der Kongruenz enthaltenen *Torsen* (*abwickelbaren Strahlflächen*) gewidmet ist.

Eine solche Torse berührt eine der beiden Kugeln längs einer Kurve und sitzt auf der anderen Kugel mit ihrer Gratlinie auf. Demzufolge sind in der Kongruenz offensichtlich *zwei Kategorien* von Torsen enthalten, die je eine *Drehschar* erfüllen; von den beiden trivialen *Drehkegeln*, die beiden Kugeln umschrieben sind, wird hierbei abgesehen. Auf jeder Kugel bilden die Gratlinien der einen Kategorie und die Berührungskurven der anderen ein *konjugiertes* — also orthogonales — *Netz*. Von den merkwürdigen Beziehungen zwischen den Gratlinien und Berührungskurven untereinander, die NYSTRÖM festgestellt hat, seien folgende hervorgehoben:

Die Kugeln werden durch ihre gemeinsamen Tangenten flächentreu aufeinander bezogen.

¹⁾ E. J. NYSTRÖM: Die gemeinsamen Tangenten zweier Kugeln als Strahlenkongruenz betrachtet. Soc. Scient. Fenn., Comm. Phys.-Math. VII (1933), 1—28. — Die Umhüllungstorsen zweier Kugeln. Ebenda, IX (1936), 1—15. Soc. Scient. Fenn., Comm. Phys.-Math. XIV. 10.

Die Gratlinien verschiedener Kategorien haben in entsprechenden Punkten gleiche Torsion und proportionale Krümmung. Entsprechende Bögen (gezählt von den Spitzen aus) sind gleich lang.

Entsprechende Bögen der Berührungskurven (gezählt von den Scheiteln aus) sind proportional.

Der Verfasser der vorliegenden Mitteilung ist nun von ganz anderer Seite her auf diese Torsen, deren Erzeugenden zwei Kugeln berühren, gestossen. Über die dadurch hergestellten neuen Zusammenhänge mit den sphärischen Bündelloxodromen von G. PRONDINI und mit den geodätischen Linien auf Drehflächen 2. Grades wird nun im folgenden berichtet.

1. Die Gratlinien als Bündelloxodromen.

Den Betrachtungen liegen zwei Kugeln Φ , Ψ mit den Radien a , b zugrunde, deren Mittelpunkte A , B den Abstand h haben mögen (Fig. 1).

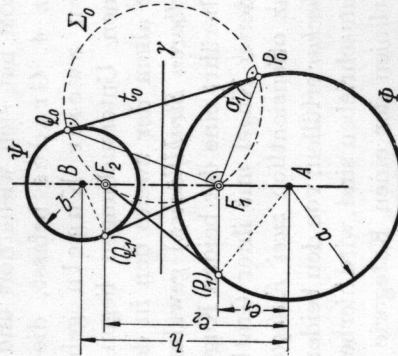


Fig. 1.

Sind P und Q die Berührungspunkte einer gemeinsamen Tangente t , so schneidet die Hilfskugel Σ über dem Durchmesser PQ die Grundkugeln Φ und Ψ unter rechten Winkeln. Alle Orthogonalkugeln eines Kugelpaares gehen aber bekanntlich durch zwei feste Punkte auf der Achse. Dies lässt sich in unserem Fall etwa so einsehen: Σ trifft den Schnittkreis $g = \Phi\Psi$ rechtwinklig, ist daher auch zu jeder g enthaltenden Kugel orthogonal; Σ schneidet mithin insbesondere auch die beiden

durch g gehenden Nullkugeln normal, geht also durch deren Mittelpunkte F_1 , F_2 . Diese liegen aus Symmetriegründen auf der Achse AB und sind spiegelbildlich zur Kreisebene γ — der Potenz- oder Chordalebene von Φ und Ψ — angeordnet. Sie sind nur dann reell und getrennt, wenn einander die Grundkugeln nicht reell schneiden, wenn also

$$a + b < h,$$

was im folgenden vorausgesetzt sein soll.

Der Fall $a + b > h$ unterscheidet sich nur durch die geänderten Realitätsverhältnisse, die jedoch die anschaulichen Deutungsmöglichkeiten stark beeinträchtigen. Dem interessanten Grenzfall $a + b = h$ sind die beiden letzten Abschnitte dieser Arbeit gewidmet.

Die Inversion bezüglich Φ (Transformation durch reziproke Radien) führt jede Orthogonalkugel Σ in sich über und vertauscht die Punkte F_1 und F_2 . Die Kugel Φ kann nun in bezug auf das inverse Punktepaar F_1 , F_2 als »Apollonische Kugel« aufgefasst werden, d. h. als Ort aller Punkte P , deren Entfernungen von den Fixpunkten F_1 und F_2 ein gewisses konstantes Verhältnis λ haben. Entsprechendes gilt für die Kugel Ψ :

$$(1) \quad F_1P : F_2P = \lambda, \quad F_1Q : F_2Q = \mu.$$

Bezeichnen wir in den rechtwinkligen Dreiecken PQF_1 und PQF_2 die zur Ecke P gehörigen Winkel mit σ_1 und σ_2 , so folgt aus den Beziehungen (1) das Gleichungspaar

$$(2) \quad \cos \sigma_1 : \cos \sigma_2 = \lambda, \quad \sin \sigma_1 : \sin \sigma_2 = \mu,$$

das zur Berechnung der Winkel ausreicht: Die Winkel σ_1 und σ_2 sind konstant, die Gestalten der Dreiecke PQF_1 und PQF_2 demnach unveränderlich.

Fassen wir nunmehr eine aus gemeinsamen Kugeltangenten t gebildete Torse Θ ins Auge, deren Gratlinie k auf Φ verlaufen möge. Jeder nach einem Gratpunkt P zielende Strahl des Bündels F_1 wird nach dem Gesagten von t — und damit auch von k — unter dem festen Winkel σ_1 getroffen. Die Gratlinie durchsetzt das Strahlbündel F_1 unter konstantem Schnittwinkel, gehört also zu den Bündel- oder Kegelloxodromen. Entsprechendes gilt auch für das Bündel F_2 , und natürlich ebenso für die auf der Kugel Ψ verlaufenden Gratlinien der zweiten Kategorie.

Satz 1. Die Gratlinien der Torsen, die in der Kongruenz der gemeinsamen Tangenten zweier Kugeln enthalten sind, sind sphärische Bündel-

loxodromen. Die Bündelscheitel werden durch die Nullkugeln des von den Grundkugeln aufgespannten Büschels geliefert.

Auf diese Kurven war schon G. PIRONI¹⁾ gestossen, als er die Frage behandelte, ob es Raumkurven gäbe, die gleichzeitig Loxodromen zweier Bündel F_1, F_2 sind. Die allgemeinsten derartigen Kurven verlaufen auf einer gewissen *Drehfläche 4. Ordnung*, deren Meridian E. CÉSARO²⁾ als *Cartesisches Oval* mit F_1 und F_2 als ordentlichen Brennpunkten erkannte; es entging ihm hierbei nicht, dass der dritte Brennpunkt F_3 eines solchen Ovals eine gleichberechtigte Rolle spielt und ein drittes Strahlbündel liefert, das von der Kurve ebenfalls unter einem konstanten Schnittwinkel σ_3 durchsetzt wird. Für $\sigma_3 = \pi/2$ ergeben sich offensichtlich *sphärische Bündelloxodromen*, für die die Trägerfläche 4. Ordnung zu einer doppelt überdeckten Kugel ausgeartet ist; in unserem Fall ist $F_3 = A$. Wir werden gleich einsehen, dass wir mit unseren Gratlinien alle sphärischen Kegelloxodromen erhalten.

Zunächst ist noch die zahlenmässige Bestimmung der Lage der Bündelzentren F_1 und F_2 , sowie der zugehörigen Schnittwinkel σ_1 und σ_2 ausständig. Auf Grund der inversen Lage von F_1 und F_2 bezüglich Φ und Ψ gelten für die Entfernungen $AF_1 = e_1$ und $AF_2 = e_2$ die Bedingungen

$$(3) \quad e_1 e_2 = a^2, (h - e_1)(h - e_2) = b^2,$$

die zur Berechnung genügen. — Der Mittelpunkt der Tangentenstrecke PQ liegt als Zentrum der Kugel Σ immer in der Ebene γ . Eine spezielle Tangente, deren Berührungspunkte P_1 und Q_1 auf den Parallelkreisen mit den Zentren F_1 und F_2 liegen, eignet sich nun in besonderer Masse zur Ermittlung von σ_1 und σ_2 : Wir lesen nämlich aus rechtwinkligen Dreiecken in Fig. 1 die Beziehungen

$$F_1 P_1^2 = e_1(e_2 - e_1) \text{ und } F_1 Q_1^2 = (h - e_1)(e_2 - e_1)$$

ab, deren Division den Wert von $\tan^2 \sigma_1$ liefert. Zusammen mit dem analogen Wert für $\tan^2 \sigma_2$ gewinnen wir so die Formeln

$$(4) \quad \cos^2 \sigma_1 = \frac{e_1}{h}, \quad \cos^2 \sigma_2 = \frac{e_2}{h}.$$

¹⁾ G. PIRONI: Sur les trajectoires isogonales des génératrices d'une surface développable. Crelles J. 118. (1897), 61—73.

²⁾ E. CÉSARO: Analisi intrinseca delle eliche policoniche. Rend. dell'acc. sci. fis. mat. Napoli (III) 9 (1902), 73—89.

Eine beliebige sphärische Bündelloxodrome ist vollständig durch die Stücke a, e_1 und σ_1 gekennzeichnet, die die Grundkugel, das Bündelzentrum und den Schnittwinkel festlegen. Aus diesen Stücken lassen sich aber mittels (3) und (4) der Reihe nach e_2, h und b berechnen, womit sich bestätigt, dass die Loxodrome als Gratlinie einer Umhüllungstorse zweier Kugeln erhalten werden kann.

Üben wir auf die Loxodrome k eine Inversion mit dem Zentrum F_1 oder F_2 aus, die die Grundkugel Φ in sich transformiert, so wird aus k auf Grund der Winkeltreue wieder eine Loxodrome k^* desselben Bündels und gleichen Schnittwinkels auf derselben Kugel; k^* ist daher kongruent zur Urkurve k , die in diesem Sinn als *anallagmatisch* angesprochen werden kann.

Satz 2. Die Gratlinien der Torsen, deren Erzeugenden zwei Kugeln berühren, sind im allgemeinen zweifach anallagmatisch.

Ausnahmen ist nur der Fall berührender Grundkugeln (Abschnitt 4).

Auf die analytische Darstellung des allgemeinen Falles, die auf elliptische Integrale III. Gattung führt, soll hier verzichtet werden.

2. Verebnungen.

Die Tangentialebenen τ unserer Torse Θ sind gleichzeitig die *Schmiegebenen* der Gratlinie k . Deren *rektilifizierende Ebenen* fallen mit den Normalebenen ν von Θ längs der Erzeugenden t zusammen; da die Torse der Kugel Ψ umschrieben ist, gehen sämtliche Normalebenen durch den Mittelpunkt B , und ihr Hüllgebilde — die *rektilifizierende Torse Γ* von k — ist der *Kegel Bk* . Umgekehrt steht nun in jedem Punkt von k die Schmiegeebene τ senkrecht auf Γ ; k ist also eine *geodätische Linie* auf diesem Kegel und geht bei dessen Verebnung (Abwicklung) in eine *Gerade* über.¹⁾

Breiten wir hingegen den Kegel Ak in die Ebene aus, so wird k zu einem *Kreisbogen*.²⁾

¹⁾ Die Tatsache, dass k eine sphärische Kurve ist, spielt bei dieser Überlegung keine Rolle. Es gilt daher allgemein: *Ist eine Torse einer Kugel umschrieben, so ist ihre Gratlinie eine Kegelgeodätische*, und umgekehrt: *Die Tangenten und Schmiegebenen einer Kegelgeodätischen haben von der Kegelspitze konstanten Abstand*. Vgl. etwa SCHELL-SALKOWSKI: Allgemeine Theorie der Kurven doppelter Krümmung, (Leipzig u. Berlin 1914); 34, 67, 188.

²⁾ Dies ermöglicht in einfachster Weise die Herstellung eines Modells einer sphärischen Bündelloxodrome: Wir heften einen *Kreisbogen* $AP_1 P_2$ und ein *Dreieck* $BP_1 P_2$ aus Karton mit den gleich langen Kanten $P_1 P_2$

Da die Kurve k die Erzeugenden der Kegel $F_1 k$ und $F_2 k$ unter konstanten Winkeln durchsetzt, wird sie bei deren Abwicklung in *logarithmische Spiralen* mit den Schnittwinkeln σ_1 und σ_2 verwandelt.

PRONDI hat schliesslich bemerkt, dass jede Doppelloxodrome bei der Verebnung des achsenparallelen *Zylinders*, auf dem sie liegt, in eine *gemeine Zykloide* übergeht.

Nachdem so insgesamt fünf Kegel- bzw. Zylinderflächen festgelegt sind, durch deren Verebnung die Gratlinie k in bekannte Linien übergeführt wird, liegt es nahe, die Abwicklung des Verbindungskegels mit einem beliebigen Achsenpunkt F zu untersuchen.

Wir machen A zum Ursprung und AB zur z -Achse eines räumlichen Normalkoordinatensystems x, y, z und legen F durch $AF = e$ fest. Als Erstes wollen wir den Abstand $FP = r$ eines Gratzpunktes $P(x, y, z)$ aus den Abständen $AP = a$ und $BP = \sqrt{b^2 + t^2}$ berechnen. Wir haben zu diesem Zweck bloss aus den Abstandsformeln

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= a^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2hz + h^2 &= b^2 + t^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2ez + e^2 &= r^2 \end{aligned}$$

die Koordinaten zu eliminieren, und erhalten so unter Verwendung von (3)

$$(5) \quad r^2 = \frac{e}{h} s^2 + D \text{ mit } D = e^2 - \frac{e}{h} (h^2 + a^2 - b^2) + a^2 = (e - e_1)(e - e_2).$$

Hierbei wurde gleichzeitig berücksichtigt, dass die *Bogenlänge* s der Kegelgeodätischen k der Tangentenstrecke $t = PQ$ gleichgesetzt werden kann; dass der Anfangspunkt der Bogenzählung, der auf dem Kreis $g = \Phi\Psi$ liegt, nicht immer reell ist, braucht uns nicht zu stören.

Gleichung (5) stellt uns in einem Polarkoordinatensystem r, φ die gesuchte Verebnung k^v der Raumkurve k dar, und zwar durch die Abhängigkeit des Radiusvektors r von der Bogenlänge s . Zwecks

zusammen, nachdem wir durch Einritzen genügend vieler Strahlen durch A und B dafür vorgesorgt haben, dass sich die Flächen nur zu Kegeln verbiegen können. Das Modell ist beweglich, weil der Spitzenabstand $AB = h$ noch verändert werden kann, stellt aber in jedem Zustand eine Kegelloxodrome auf einer Kugel vom Radius $AP = a$ dar; auch der Radius b der zweiten Kugel ist konstant, da er ja mit der Dreieckshöhe identisch ist.

Identifizierung von k^v gehen wir zur *natürlichen Gleichung*, d. h. zur Abhängigkeit zwischen Krümmungsradius ϱ und Bogen s über. Bilden wir die Ableitung nach s und führen wir den Winkel ϑ zwischen Radiusvektor und Tangente gemäss $dr/ds = \cos \vartheta$ ein, so erhalten wir

$$(6) \quad r \cos \vartheta = \frac{e}{h} s.$$

Neuerliche Differentiation liefert dann

$$\cos^2 \vartheta - r \sin \vartheta \frac{d\vartheta}{ds} = \frac{e}{h},$$

und eliminieren wir nun $d\vartheta/ds$ durch Einführung der *Krümmung* $1/\varrho = d(\varphi + \vartheta)/ds$ mit Benützung der Beziehung $r d\varphi/ds = \sin \vartheta$, so gelangen wir zu

$$(7) \quad r \sin \vartheta = \frac{h-e}{h} \varrho.$$

Bildung der Quadratsumme von (6) und (7) und Vergleich mit (5) führt dann auf die gewünschte *natürliche Gleichung* von k^v :

$$(8) \quad (h-e) \varrho^2 = e s^2 + \frac{h^2}{h-e} D.$$

Durch eine Gleichung dieser Bauart wird aber bekanntlich im allgemeinen eine *zyklische Kurve* gekennzeichnet, d. h. die Bahn eines Umfangspunktes eines Kreises, der auf einem festen Kreis rollt.¹⁾ Wir haben damit einen die eingangs aufgezählten Sonderfälle umfassenden allgemeinen Satz gefunden²⁾:

Satz 3. Verbindet man die sphärische Bündelloxodrome k mit einem beliebigen Achsenpunkt, und verebnnet man den so entstehenden Kegel, so geht k hierbei in eine zyklische Linie oder einen Grenzfall einer solchen über.

¹⁾ Die genaueste Diskussion findet sich bei H. WIELEITNER: Spezielle ebene Kurven (Sammlung SCHUBERT, Bd. 56, Leipzig 1908), 197, 211, 219.

²⁾ Ein ähnlicher Satz lässt sich mit gleichen Mitteln auch für die in Abschn. 1 erwähnten allgemeinsten polykonischen Loxodromen beweisen. Eine diesbezügliche Arbeit »Über die polykonischen Loxodromen« wird demnächst in den *Annali di Matematica* erscheinen.

Um über die Art der betreffenden zyklischen Linie Aufschluss zu bekommen, bestimmen wir mittels (6) und (5) die Halbmesser r' , r'' des Scheitel- bzw. Spitzenkreises.

$$\text{Scheitel:} \quad \vartheta' = \frac{\pi}{2}, \quad s' = 0, \quad r' = \sqrt{D}, \quad \varrho' = \frac{h}{h-e} r'$$

$$\text{Spitze:} \quad \vartheta'' = 0, \quad s'' = \frac{h}{e} r'', \quad r'' = \sqrt{\frac{eD}{e-h}}, \quad \varrho'' = 0.$$

Aus dem Realitäts- und Grössenverhältnis von r' und r'' können wir dann sofort auf die Gattung der zyklischen Kurve schliessen. Wir gelangen damit für den Fall $a+b < h$ (getrennte Grundkugeln) zu folgenden Zusammenstellungen:

$e < 0 : r' > r'', \text{ reell}$	Epizykloide
$e = 0 : r' = a, r'' = 0$	Kreis
$0 < e < e_1 : r' \text{ reell}, r'' \text{ imaginär}$	Hyperzykloide
$e = e_1 : r' = r'' = 0$	log. Spirale
$e_1 < e < e_2 : r' \text{ imaginär}, r'' \text{ reell}$	Parazykloide
$e = e_2 : r' = r'' = 0$	log. Spirale
$e_2 < e < h : r' \text{ reell}, r'' \text{ imaginär}$	Hyperzykloide
$e = h : r' = \infty$	Gerade
$e > h : r' < r'', \text{ reell}$	Hypozykloide
$e = \infty : r' = r'' = \infty, r'' - r' = h/2$	gemeine Zykloide

Für den Fall $a+b > h$ (reell schneidende Grundkugeln) sind e_1 und e_2 konjugiert-komplex; in der Tabelle ist demgemäss in Zeile 3 e_1 durch h zu ersetzen, während die Zeilen 4–7 ganz zu streichen sind. — Die Verhältnisse im Falle $a+b=h$ berührender Grundkugeln liegen auf der Hand.

3. Polarisation an einer Kugel.

Wir denken uns eine Kugel Ω_1 mit beliebigem Radius um F_1 als Mittelpunkt gelegt und betrachten die den Grundkugeln Φ und Ψ vermöge des Polarsystems von Ω_1 zugeordneten Flächen 2. Grades $\bar{\Phi}$ und $\bar{\Psi}$. Wegen der Rotationssymmetrie und weil F_1 innerhalb von Φ und ausserhalb von Ψ liegt, ist $\bar{\Phi}$ ein *eiförmiges Drehellipsoid* und $\bar{\Psi}$ ein *zweischaliges*

Drehhyperboloid. Φ , Ψ und der von F_1 ausstrahlende *Minimalkegel* Φ_1 haben den absoluten Kugelkreis f und den in der Potenzebene γ gelegenen endlichen Kreis g gemein; die Polargebilde $\bar{\Phi}$, $\bar{\Psi}$ und $\bar{\Phi}_1$ sind daher den f und g entsprechenden Kegeln Φ_1 und Γ_1 eingeschrieben; diese sind beide Minimalkegel, da $\bar{\Phi}_1$ mit dem absoluten Kugelkreis f identisch ist. Die Drehflächen $\bar{\Phi}$ und $\bar{\Psi}$ sind daher *konfokal*; ihre gemeinsamen Brennpunkte sind F_1 und der Pol G_1 von γ bezüglich Ω_1 .

Jede gemeinsame Tangente t der Kugeln Φ und Ψ geht durch die Polarität an Ω_1 in eine gemeinsame Tangente $\bar{t}$ von $\bar{\Phi}$ und $\bar{\Psi}$ über, wobei die beiden durch $\bar{t}$ gehenden Tangentialebenen $\bar{\pi}$ und $\bar{\vartheta}$ den Berührungspunkten P und Q von t entsprechen. Wegen $F_1P \perp F_1Q$ (Abschn. 1) sind auch die Tangentialebenen $\bar{\pi}$ und $\bar{\vartheta}$ *normal*; dies ist eine bekannte Eigenschaft der gemeinsamen Tangenten konfokaler Flächen 2. Grades.

Unsere aus gemeinsamen Kugeltangenten gebildete, Ψ umschriebene Torse Θ wird durch die Polarität an Ω_1 in eine auf dem Hyperboloid $\bar{\Psi}$ verlaufende Raumkurve $\bar{l}$ verwandelt, deren Tangenten $\bar{t}$ das konfokale Ellipsoid $\bar{\Phi}$ berühren; ihre Schmiegeebenen $\bar{\pi}$ sind wegen $\bar{\pi} \perp \bar{\vartheta}$ Normalebenen des Hyperboloids, mithin ist $\bar{l}$ eine *geodätische Linie* desselben.¹⁾

Hätten wir an einer Kugel Ω_2 um F_2 polarisiert, so wäre die Torse Θ in eine Geodätische auf einem Drehellipsoid verwandelt worden.

Satz 4. Die aus gemeinsamen Tangenten zweier getrennt liegenden Kugeln gebildeten Torsen hängen durch Kugelpolarität mit Drehscharen von geodätischen Linien auf eiförmigen Drehellipsoiden oder zweischaligen Drehhyperboloiden zusammen.

Die Berührungskurven dieser Torsen sind kollinear zu den genannten Geodätischen.

Der zweite Teil dieses Satzes ergibt sich aus der Überlegung, dass zwei zu einem dritten System *polare* Systeme stets untereinander *kollinear* sind. Polarisieren wir die Torse Θ einmal an $\bar{\Psi}$ und einmal an Ω_1 , so erhalten wir aber die *Berührungskurve* l und die *Geodätische* $\bar{l}$. Natürlich ist auch die durch Polarisation an Ω_2 erhaltene Geodätische zu l und $\bar{l}$ kollinear.

Eine Darstellung der geodätischen Linien auf Mittelpunktdrehflächen 2. Grades mittels *elliptischer Funktionen* gab HALPHEN.²⁾ Die Berechnung der Geodätischen auf den allgemeinen Flächen 2. Grades führt bekanntlich auf hyperelliptische Integrale. — HALPHEN bewies

¹⁾ M. CHASLES: Sur les lignes géodésiques et les lignes de courbure des surfaces du second degré. Liouv. J. math. II (1846), 5–20.

²⁾ G. A. HALPHEN: Traité des fonctions elliptiques II (Paris 1888), 237–285.

auch, dass die geodätischen Linien (abgesehen von trivialen Grenzfällen) *niemals abgekräuscht* ausfallen, was wir hiermit auf die Torsen Θ übertragen können, auch wenn diese geschlossen sind; die Existenz geschlossener Formen hat NYSTRÖM hervorgehoben.¹⁾

4. Der Grenzfall berührender Grundkugeln.

Dieser Abschnitt soll dem bisher zurückgestellten Fall *berührender Grundkugeln* $\Phi(A, a)$, $\Psi(B, b)$, gekennzeichnet durch

$$(9) \quad a + b = h,$$

gewidmet sein. Hier sind die Bündelzentren F_1 und F_2 im Berührungspunkt O der Grundkugeln zusammengedrückt und alle Orthogonalen Σ berühren die Achse AB in O .

Die *Gratlinien* der aus gemeinsamen Kugeltangenten t gebildeten Torsen sind *Loxodromen* des Bündels O , und zwar gelten für den konstanten Schnittwinkel σ einer auf Φ verlaufenden Gratlinie k wegen $e_1 = e_2 = a$ gemäss (4) und (9) die Formeln

$$(10) \quad \cos^2 \sigma = \frac{a}{h} \quad \text{oder} \quad \operatorname{ctg} \sigma = \sqrt{\frac{a}{b}} = p.$$

Eine solche Loxodrome besitzt O als *asymptotischen Punkt* und nähert sich diesem — wenn wir die Umgebung von O in I.Näherung als eben ansehen — nach Art einer logarithmischen Spirale mit dem Schnittwinkel σ .

Denken wir uns um O eine Kugel Ω von beliebigem Halbmesser c geschlagen. Die *Inversion* bezüglich Ω macht aus den Grundkugeln zwei *parallele Ebenen* Φ^* , Ψ^* und verwandelt die sphärische Loxodrome k auf Grund der Winkeltreue in eine ebene Loxodrome k^* .

Diese *ebenen Bündel* (*Kegel-Loxodromen*) wurden bis jetzt anscheinend nicht beachtet. Sei O' der Normalriss des Bündelscheitels O auf die Grundebene und T ein laufender Kurvenpunkt; wir setzen $OO' = d$, $OT = R$ und $O'T = r$. Die Bogenlänge s ändert sich wegen der Loxodromeneigenschaft proportional zum Radiusvektor R , daher gilt bei geeigneter Zählung $R = s \cos \sigma$; für die Polarkoordinate r folgt daraus die Beziehung

$$(11) \quad r^2 = s^2 \cos^2 \sigma - d^2,$$

aus welcher nach dem Vorgang in Abschn. 2 die *natürliche Gleichung*

$$(12) \quad \varrho^2 \sin^2 \sigma = s^2 \cos^2 \sigma - \frac{d^2}{\sin^2 \sigma}$$

abgeleitet werden kann. Die Loxodrome erweist sich damit als identisch mit einer *Parazykloide*, deren Spitzenradius $r_0 = d \operatorname{ctg} \sigma$ beträgt und deren Tangentenwinkel asymptotisch dem Grenzwert σ zustrebt. Ihre Parameterdarstellung in Normalkoordinaten lautet bei Verwendung hyperbolischer Funktionen⁶⁾:

$$(13) \quad \begin{aligned} \frac{X}{r_0} &= \operatorname{ch} p\tau \cos \tau + \frac{1}{p} \operatorname{sh} p\tau \sin \tau \\ \frac{Y}{r_0} &= \operatorname{ch} p\tau \sin \tau - \frac{1}{p} \operatorname{sh} p\tau \cos \tau. \end{aligned}$$

Damit haben wir eine hübsche und, wie es scheint, bisher unbekannte Deutung dieser merkwürdigen Rollkurve gefunden, die einen reellen Zug besitzt, obwohl der Rollkreis komplex ist:

Satz 5. Die Parazykloiden sind mit den ebenen Kegelloxodromen identisch.¹⁾

Gleichzeitig gilt für unser Ausgangsproblem der

Satz 6. Die Gratlinien der Torsen, die aus gemeinsamen Tangenzen zweier einander berührender Kugeln gebildet sind, sind spezielle sphärische Bündelloxodromen. Sie sind invers zu Parazykloiden.

Durch Anwendung der *Inversionsformeln*

$$(14) \quad x = \frac{c^2 X}{N}, \quad y = \frac{c^2 Y}{N}, \quad z = \frac{c^2 Z}{N} \quad \text{mit} \quad N = X^2 + Y^2 + Z^2,$$

wobei $Z = c^2/2a$ und $r_0 = pc^2/2a$ zu setzen ist, erhalten wir als Gleichungen der Gratlinie k auf der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$:

¹⁾ Wir können wieder sehr einfach ein Kartonmodell herstellen, indem wir zwei kongruente, von *logarithmischen Spiralen* begrenzte und längs der Radien vorgeritzte Sektoren längs der krummen Ränder zusammenheften. Die Spirale nimmt die Gestalt einer *Parazykloide* an, sobald das Sektorpaar zu einem Doppelkegel deformiert wird.

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{2a}{p^2+1} \cdot \frac{p \operatorname{ch} p\tau \cos \tau + \operatorname{sh} p\tau \sin \tau}{\operatorname{ch}^2 p\tau} \\
 y &= \frac{2a}{p^2+1} \cdot \frac{p \operatorname{ch} p\tau \sin \tau - \operatorname{sh} p\tau \cos \tau}{\operatorname{ch}^2 p\tau} \\
 z &= \frac{2a}{p^2+1} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch}^2 p\tau}
 \end{aligned}
 \quad (15)$$

Betrachten wir nunmehr die *Berührungskurve* l unserer Torse Θ mit der Kugel Ψ . Sie wird von jeder Erzeugenden $t = PQ$ unter rechtem Winkel geschnitten; die über der Berührungsstrecke PQ als Durchmesser errichtete Orthogonalkugel Σ berührt mithin l in Q , während die Gratlínie k in P senkrecht geschnitten wird. Die *Inversion* an Ω macht nun aus k und l ebene Kurven k^* und l^* in den parallelen Ebenen Φ^* und Ψ^* , und Σ wird in eine Ebene Σ^* verwandelt, die k^* normal schneidet und l^* berührt (Fig. 2): l^* ist demnach kongruent zur *Evolvente* der Parazykloide k^* , also eine *Hyperzykloide*:

$$\begin{aligned}
 \frac{X}{r_0} &= \operatorname{ch} p\tau \cos \tau - p \operatorname{sh} p\tau \sin \tau \\
 \frac{Y}{r_0} &= \operatorname{ch} p\tau \sin \tau + p \operatorname{sh} p\tau \cos \tau
 \end{aligned}
 \quad (16)$$

Satz 7. Die *Berührungskurven* der Torsen, die aus gemeinsamen Tangenten zweier einander berührenden Kugeln gebildet sind, sind inverse Hyperzykloiden.

Die Gleichungen der Berührungskurve l auf der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = 2bz = 0$ ergeben sich aus (16) wieder mittels der Inversionsformeln (14), wobei diesmal $Z = -c^2/2b$ zu setzen ist, während r_0 seinen Wert behält.

Bilden wir das Kurvenpaar k, l *stereographisch*, d. h. mittels Zentralprojektion aus O auf die Ebene Φ^* ab, so fällt das Bild k^c mit k^* zusammen, während l^c aus l^* durch eine zentrische Ähnlichkeit mit dem Faktor $a/b = p^2$ hervorgeht (Fig. 2). Das Tangentenbild l^c berührt k^c in $P^c = P^*$ und schneidet l^c in Q^c orthogonal, weil ja die stereographische Projektion winkeltreu ist; die Hyperzykloide l^c erscheint somit als *Evolvente* der Parazykloide $k^c = k^*$.

Die aufgedeckten Beziehungen erlauben die darstellend-geometrische Behandlung der Torsen Θ im Grenzfall berührender

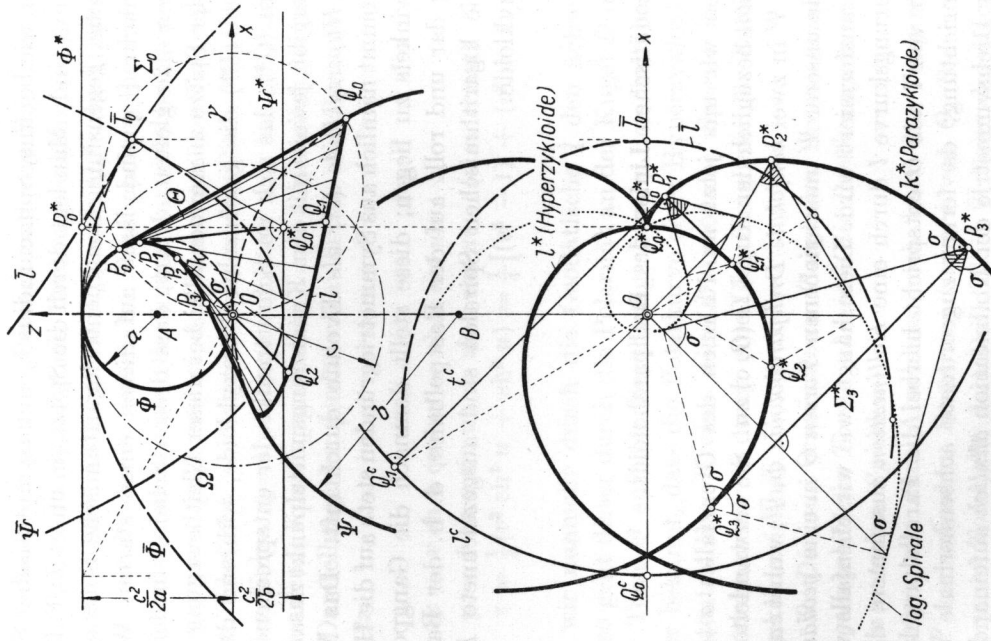


Fig. 2. Der Fall berührender Grundkugeln, dargestellt in Auf- und Grundriss ($a=1$, $b=3$, $h=4$; $\sigma=60^\circ$; $c=2$).

Grundkugeln, wie sie in Fig. 2 zu sehen ist. Hierzu müssen allerdings einige Bemerkungen über die *Konstruktion* von *Pseudocykloiden* gemacht werden, da diesbezüglich konkrete Anleitungen kaum zu finden sind. Brauchbare Vorschriften, die sich auch auf die allgemeineren »Pseudotrochoiden« erstrecken, habe ich in einer früheren Arbeit gelegentlich angedeutet.¹⁾ Zum Zeichnen einer *Parazykloide* empfiehlt sich folgender Vor-

¹⁾ W. WUNDERLICH: Darstellende Geometrie nichteuklidischer Schraubflächen. Monatsh. Math. Phys. 44 (1936), 249–279, insb. 265f.

gang, wenn, wie bei uns, Spitzenradius r_0 und asymptotischer Schnittwinkel σ bekannt sind: Man legt durch die Spitze (in unserem Fall P_0^*) zwei konzentrische, gegenseitig-kongruente logarithmische Spiralen mit den Schnittwinkeln $\pm\sigma$ und lässt auf diesen einen starren Winkel von der Grösse $\pi - 2\sigma$ gleiten, derart, dass dessen Scheitel in der Anfangslage mit der Spitze zusammenfällt; bei dieser Gleitbewegung beschreibt der Scheitel (P^*) die gewünschte Parazykloide, während das Momentanzentrum (Q^*), das sich im Schnittpunkt der entsprechenden Spiralen normalen ergibt, jeweils mit dem Krümmungsmittelpunkt zusammenfällt, also eine *Hyperzykloide* ($\bar{l}^*$) als Evolute durchläuft. Das Momentanzentrum kommt nämlich aus Symmetriegründen stets auf die Halbierende des Gleitwinkels zu liegen; diese stellt demnach die Gangpolbahn der Bewegung dar und rollt auf der Rastpolbahn, d. h. der Bahnevolute, ab. — Die logarithmischen Spiralen sind ausgezeichnete *Evolutoiden* der Parazykloide.

5. Die geodätischen Linien des Drehparaboloids.

Wenden wir uns jetzt im Rahmen des Grenzfalles $a+b=h$ noch der *Polarität* bezüglich der Kugel Ω (O, c) zu. Sie verwandelt die Grundkugeln Φ, Ψ in zwei *konfokale Drehparaboloide* $\bar{\Phi}, \bar{\Psi}$, wobei entsprechend Satz 4 jede unserer Ψ umschriebenen *Torsen* Θ in eine *geodätische Linie* $\bar{l}$ auf $\bar{\Psi}$ transformiert wird. Diese hängt, wie wir ebenfalls wissen, mit der Berührungskurve l durch eine *Kollineation* zusammen; der Zentralprojektion von l aus O entspricht hierbei die Parallelprojektion von $\bar{l}$ in Achsenrichtung; da ferner zugeordnete achsennormale Bildebenen wegen der Drehsymmetrie der Kollineation *ähnlich* aufeinander bezogen sind, ist der »Grundriss« $\bar{l}'$ der Geodätischen ähnlich zum Zentralriss l' der Berührungskurve, also gemäss Satz 7 eine *Hyperzykloide*.

Satz 8. Die geodätischen Linien des Drehparaboloides bilden sich bei Normalprojektion in Achsenrichtung als Hyperzykloiden ab.

Diese anscheinend bisher unbemerkte gebliebene Tatsache gestattet nicht nur eine einfache konstruktive Behandlung der Geodätischen des Drehparaboloides, sondern erlaubt auch sofort deren Gleichungen explizit hinzuschreiben. — Die die Achse treffende Anfangslage $t_0 = P_0 Q_0$ der Kugeltangente liefert als reziproke Polare die Tangente $\bar{t}_0$ der Geodätischen $\bar{l}$ im Scheitel $\bar{T}_0$; $\bar{t}_0$ ist der Schnitt der Polarebenen von P_0

und Q_0 , und man erkennt bei Betrachtung von Fig. 2 unschwer, dass die Punkte $O, P_0^*, \bar{T}_0$ und Q_0^* ein Rechteck bilden, sodass $\bar{T}_0$ von der Achse doppelt so weit absteht wie P_0^* oder Q_0^* ; die Hyperzykloide $\bar{l}'$ geht daher aus l^* durch zentrische Verdoppelung hervor. Sie kann demnach ebenfalls durch das Gleichungspaar (16) beschrieben werden, wenn man r_0 durch pc^2/a ersetzt; der Parameter des Trägerparaboloides $\bar{\Psi}$ beträgt dabei c^2/b . — Setzen wir nun der Einfachheit halber $c^2 = b$ und in der Folge $r_0 = 1/p = v$, so erhalten wir bei gleichzeitiger Einführung des neuen Kurvenparameters $u = pr$ schliesslich die nachstehende einfache Darstellung der *geodätischen Linien* auf dem *Drehparaboloid* $x^2 + y^2 = 2z$:

$$\begin{aligned} (17) \quad x &= v \operatorname{ch} u \cos uv - sh \operatorname{sh} u \sin uv \\ y &= v \operatorname{ch} u \sin uv + sh \operatorname{sh} u \cos uv \quad (v = \text{const}) \\ z &= \frac{1}{4}(v^2 \operatorname{ch}^2 u + \operatorname{sh}^2 u) = \frac{1}{4}[(v^2 - 1) + (v^2 + 1) \operatorname{ch} 2u] \end{aligned}$$

Legen wir nunmehr durch die Geodätische $\bar{l}$ den achsenparallelen *Zylinder*, so geht dieser durch die Polarität an der Kugel Ω in die *Spurkurve* der Torse Θ auf der Berührungsebene γ der Grundkugeln über. Es ist aber bekannt, dass die Polarkurve einer Hyperzykloide bezüglich eines konzentrischen Kreises eine *Poinso'sche Spirale* ist; sie wird in Polarkoordinaten r, φ durch eine Gleichung von der Bauart $r \operatorname{ch} p \varphi = \text{const}$ gekennzeichnet.

Satz 9. Die aus gemeinsamen Tangenten zweier einander berührenden Kugeln gebildeten Torsen schneiden die Berührungsebene der Kugeln nach Poinso'schen Spiralen.¹⁾

Betrachten wir zum Abschluss noch kurz die *Tangentenfläche* Λ der auf Ψ verlaufenden *Berührungskurve* l von Θ . Sie ist polar zur *Gratlinie* q jener Torse, die dem Paraboloid $\bar{\Psi}$ längs der Geodätischen $\bar{l}$ umschrieben ist; da konjugierte Tangenten eines Drehparaboloides aber im Grundriss normal erscheinen, bildet sich q daselbst auf die Evolute der Hyperzykloide $\bar{l}'$, d. h. als *Parazykloide* ab. Dem projizierenden Zylinder durch q ist vermöge der Polarität die *Spurkurve* von Λ zugeordnet; diese ist demnach die Polare der Parazykloide q' bezüglich eines konzentrischen Kreises, also eine Kurve mit der Polargleichung $r \operatorname{sh} p \varphi = \text{const}$. Sie trägt bisher keinen eigenen Namen, kann aber

¹⁾ Die Poinso'sche Spirale tritt auch als Normalprojektion der *Kugelloxodrome* (Kurve konstanten Kurses) auf die Äquatorebene auf.

als Inverse der »Differenzspirale« $r=k \operatorname{sh} p$ bezeichnet werden, so wie die Poinsoische Spirale invers zur »Summenspirale« $r=k \operatorname{ch} p$ ist. — Da die Spurkurve $\Delta\gamma$ kollinear und perspektiv zur *Fernkurve* der Tangentenfläche von $\bar{l}$ ist, stellt sie auch die Basis eines Richtkegels dieser Tangentenfläche dar:

Satz 10. Der Richtkegel der Tangentenfläche einer gedächlichen Linie des Drehparaboloides wird von jeder achsennormalen Ebene nach einer inversen Differenzspirale geschnitten.

Gedruckt April 1949.