Societas Scientiarum Fennica.
Commentationes Physico-Mathematicae. XV. 11.

Über die Nyströmsche Strahlkongruenz und die geodätischen Linien der Flächen 2. Grades

von

Walter Wunderlich (Wien)

Am 21. November von E. J. Nyström und G. Järnefelt vorgelegt.

Als »Nyström sche Strahlkongruenz» wird hier die Mannigfaltigkeit der *gemeinsamen Tangenten zweier Kugeln* bezeichnet, der E. J. Nyström eingehende Untersuchungen gewidmet hat.[1]) Über den Zusammenhang der in dieser Strahlkongruenz enthaltenen *Torsen* (abwickelbaren Flächen) mit den *geodätischen Linien auf Drehflächen 2. Grades* habe ich erst kürzlich berichtet.[2]) Diesbezüglich gilt: Eine aus gemeinsamen Tangenten zweier getrennt liegenden Kugeln gebildete Torse (die kein Kegel ist) geht in eine geodätische Linie auf einem verlängerten Drehellipsoid oder zweischaligen Drehhyperboloid über, wenn man sie an einer *Kugel polarisiert,* die konzentrisch zu einer der beiden Nullkugeln des von den beiden Grundkugeln aufgespannten Büschels ist. Die Kurve, längs der die Torse die eine der Grundkugeln berührt, ist kollinear zu der genannten Geodätischen; die *Gratlinie* hingegen,

[1]) E. J. Nyström: Die gemeinsamen Tangenten zweier Kugeln als Strahlenkongruenz betrachtet. Soc. Scient. Fenn., Comm. Phys.-Math. VII (1933), 1—28. — Die Umhüllungstorsen zweier Kugeln. Ebenda, IX (1936), 1—15.

[2]) W. Wunderlich: Über die Torsen, deren Erzeugenden zwei Kugeln berühren. Soc. Scient. Fenn., Comm. Phys. Math. XIV (1949), 1—16.

mit der sich die Torse auf die andere Grundkugel stützt, erweist sich als *mehrfache Bündelloxodrome*, indem sie jedes der von den beiden Nullkugelzentren ausgehenden Strahlbündel unter einem konstanten Winkel durchsetzt.

Eine aus der letztgenannten Tatsache folgende, anscheinend noch nirgends erwähnte Eigenschaft der geodätischen Linien auf Drehflächen 2. Grades, derzufolge dieselben (sogar auf zweifache Weise) als »*pseudo-geodätische Linien*« von *Kegelflächen* anzusprechen sind, wird in der vorliegenden Note aufgezeigt. Eine damit zusammenhängende Verallgemeinerung beinhaltet einerseits eine bisher nicht beachtete hübsche Eigenschaft der NYSTRÖMschen Strahlkongruenz und führt anderseits zu einer bereits von R. BRICARD bemerkten, jedoch wenig bekannten Eigenschaft der Geodätischen auf beliebigen Flächen 2. Grades. Diese Eigenschaft ergibt sich im Falle der oben genannten Drehflächen ganz elementar, während für den dem allgemeinen Fall zugrundeliegenden projektiven Sachverhalt ein einfacher synthetischer Beweis mitgeteilt wird.

1. Eine neue Eigenschaft der Nyströmschen Strahlkongruenz.

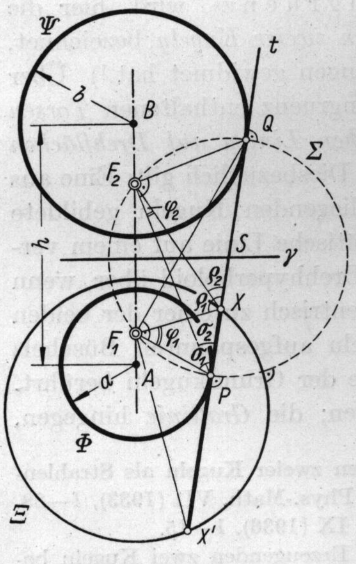

Fig. 1.

Wir betrachten — unter Beibehaltung der in der vorangehenden Mitteilung[2]) benützten Bezeichnungen — zwei getrennt liegende *Kugeln* Φ, Ψ mit den Radien a, b, deren Mittelpunkte A, B den Abstand $h > a+b$, haben mögen (Fig. 1). Sind P und Q die Berührungspunkte der beiden Kugeln mit einer gemeinsamen *Tangente* t, so schneidet die Hilfskugel Σ über dem Durchmesser PQ die Grundkugeln Φ und Ψ unter rechten Winkeln, ebenso aber auch jede weitere Kugel des von Φ und Ψ aufgespannten *Flächenbüschels*. Insbesondere enthalten mithin alle diese Orthogonalkugeln Σ die Zentren F_1, F_2 der beiden *Nullkugeln* des Büschels; diese Zentren liegen aus Symmetriegründen auf der Achse AB und sind spiegelbildlich zur gemeinsamen Potenzebene γ aller Kugeln angeordnet; sie sind in unserem Fall wegen der Voraussetzung $a+b<h$ stets reell und getrennt und liessen sich leicht näher bestimmen.[2]) Hervorgehoben sei nur noch, dass das Punktepaar F_1, F_2 bezüglich jeder der Büschelkugeln *invers* liegt — weil das für jede der Orthogonalkugeln Σ zutrifft —, sodass sich jede der Büschelflächen als »*Apollonische Kugel*» bezüglich des Punktepaares auffassen lässt, d.h. als Ort aller Punkte, deren Entfernungen von F_1 und F_2 ein gewisses konstantes Verhältnis haben.

Ist also Ξ eine beliebige weitere Kugel des Büschels $\Phi\Psi$, und bezeichnet X irgend einen ihrer beiden Schnittpunkte mit der betrachteten Tangente t, so gelten die Beziehungen

$$F_1P : F_2P = \lambda,\ F_1Q : F_2Q = \mu,\ F_1X : F_2X = \nu, \tag{1}$$

wobei λ, μ, ν gewisse Konstante bedeuten, die von der Lage von t unabhängig sind.[3]) Führen wir ferner die Winkel σ_i und φ_i ($i = 1, 2$) ein, die in den Dreiecken PXF_i bei P und F_i auftreten, und beachten wir die rechten Winkel PF_iQ, dann haben wir in den Dreiecken QXF bei Q und F_i Winkel, die sich von σ_i und φ_i nur um je einen Rechten unterscheiden. Elementare Formeln der Trigonometrie liefern uns dann die Darstellungen

$$F_iP = PQ \cdot \cos\sigma_i,\ F_iQ = PQ \cdot \sin\sigma_i,\ F_iX = PX\frac{\sin\sigma_i}{\sin\varphi_i} = XQ\ \frac{\cos\sigma_i}{\cos\varphi_i} \tag{2}$$

und damit nehmen die Beziehungen (1) folgende Gestalt an:

$$\begin{cases}\cos\sigma_1 : \cos\sigma_2 = \lambda, \\ \sin\sigma_1 : \sin\sigma_2 = \mu,\end{cases} \begin{cases}\cos\varphi_1 : \cos\varphi_2 = \lambda : \nu, \\ \sin\varphi_1 : \sin\varphi_2 = \mu : \nu.\end{cases} \tag{3}$$

Jedes der beiden Gleichungspaare reicht zur Berechnung der darin auftretenden Winkel aus, die Winkel σ_i und φ_i sind mithin k o n s t a n t.

Hieraus folgt zunächst

Satz 1. *Die auf den Strahlen einer N y s t r ö m schen Kongruenz von einer beliebigen, dem durch die Brennkugeln bestimmten Büschel angehörigen*

---

[3]) In Fig. 1 wurde der Anschaulichkeit zuliebe eine spezielle Tangente dargestellt, doch gelten die Überlegungen des Textes natürlich für gemeinsame Kugeltangenten ganz allgemeiner (zu AB windschiefer) Lage.

Kugel abgeschnittenen Strecken erscheinen aus den Zentren der beiden dem Büschel angehörenden Nullkugeln unter festen Gesichtswinkeln. Die beiden Brennpunkte (Berührungspunkte) eines Kongruenzstrahls liegen auf den Halbierenden der zugehörigen Gesichtswinkel.

Ferner ergibt sich auf Grund der Konstanz der Winkel $QXF_i = = \sigma_i + \varphi_i = \varrho_i$ die folgende Erzeugung:

Satz 2. *Bringt man in den Punkten einer Kugel Geraden an, die feste Winkel mit den Halbstrahlen bilden, welche von den betreffenden Kugelpunkten nach zwei bezüglich der Kugel inversen Fixpunkten zielen, so erhält man die Geraden einer* N y s t r ö m *schen Kongruenz mit getrennten Brennkugeln.*

Die Angabe der Kugel und des inversen Punktepaares ist nämlich äquivalent der Angabe des Betrages von ν in dem Gleichungssystem (3), das zusammen mit dem Gleichungspaar $\sigma_i + \varphi_i = \varrho_i$ zur Bestimmung der 6 unbekannten Grössen λ, μ, σ_i und φ_i geeignet ist. Man findet etwa für die Winkel σ_i die Formeln

$$\text{(4)} \qquad \operatorname{ctg} \sigma_1 = \frac{\cos(\varrho_1 - \varrho_2) - (1/\nu)}{\sin(\varrho_1 - \varrho_2)}, \quad \operatorname{ctg} \sigma_2 = \frac{\nu - \cos(\varrho_1 - \varrho_2)}{\sin(\varrho_1 - \varrho_2)}.$$

Da das Vorzeichen von ν nicht von vornherein feststeht, gelangt man eigentlich zu zwei Lösungssystemen. Nur eine der beiden NYSTRÖM-Kongruenzen genügt jedoch der Forderung, dass ihre Strahlen die vorgeschriebenen Winkel ϱ_1 und ϱ_2 mit den H a l b strahlen nach F_1 und F_2 einschliessen; die Strahlen des zweiten Systems bilden nämlich mit den genannten Halbstrahlen die Winkel ϱ_1 und $180° - \varrho_2$.[4]) Die NYSTRÖMsche Kongruenz wird bei dieser Erzeugung übrigens nur einfach erhalten, da ihre Strahlen in den zweiten Schnittpunkten mit der Ausgangskugel unter den Winkeln $\sigma_i - \varphi_i \neq \varrho_i$ gegen die Leitstrahlen geneigt sind. — Liegt speziell einer der inversen Fixpunkte im Unendlichen, so kann $\nu = 0$ gesetzt werden und die Strahlkongruenz besteht in diesem Grenzfall aus den Tangenten einer Drehschar von *sphärischen Böschungslinien.*

Äquivalent zu Satz 2 ist die folgende kinematische Aussage:

---

[4]) Konstruktiv kann man so vorgehen, dass man durch die Fixpunkte F_1 und F_2 einen Kreisbogen legt, der $\varrho_1 - \varrho_2$ oder $\varrho_1 + \varrho_2$ als zu F_1F_2 gehörigen Umfangswinkel fasst. Ein solcher Bogen hat mit der gegebenen Kugel Ξ genau einen reellen Punkt X gemeinsam; der zugehörige Kongruenzstrahl t ergibt sich eindeutig und trifft die Achse F_1F_2. Um den Schnittpunkt S von t mit der Mittelebene γ von F_1F_2 schlägt man dann die durch F_1 und F_2 gehende Kugel Σ, die aus t die Brennpunkte P und Q herausschneidet (Fig. 1). Hiermit sind aber auch die t in P und Q berührenden Brennkugeln Φ und Ψ hinreichend bestimmt.

Satz 3. *Sind zwei starre Winkel mit gemeinsamem Scheitel und einem gemeinsamen Schenkel längs des letzteren gelenkig verbunden und führt man die beiden freien Schenkel ständig durch zwei feste Punkte, während sich der Scheitel auf einer Apollonischen Kugel (im Grenzfall der Symmetrieebene) der beiden Punkte bewegt, so berührt der gemeinsame Winkelschenkel ständig zwei weitere feste, getrennt liegende Apollonische Kugeln des Fixpunktpaares.*

2. Dualisierung.

Transformieren wir das von Φ und Ψ aufgespannte Kugelbüschel mittels des *Polarsystems* einer *Kugel* Ω_1, die ihre Mitte in F_1 hat, so wird der von F_1 ausstrahlende, dem Büschel angehörende Minimalkegel in den absoluten Kreis verwandelt und wir erhalten eine *Schar konfokaler Drehflächen 2. Grades*, die F_1 und den Pol G_1 der Potenzebene γ zu gemeinsamen Brennpunkten haben. Den F_1 umschliessenden Kugeln (darunter Φ) entsprechen hierbei *eiförmige Ellipsoide*, den F_1 ausschliessenden Kugeln (darunter Ψ) hingegen *zweischalige Hyperboloide*. — Analoge Verhältnisse würden bei Polarisation an einer Kugel Ω_2 um F_2 festzustellen sein.

Zu jeder gemeinsamen Tangente t der Kugeln Φ und Ψ gehört als reziproke Polare eine gemeinsame Tangente $\bar{t}$ der Polarquadriken $\overline{\Phi}$ und $\overline{\Psi}$, wobei den Berührungspunkten P und Q von t mit Φ und Ψ die durch $\bar{t}$ gehenden Berührungsebenen π und θ von $\overline{\Phi}$ und $\overline{\Psi}$ zugeordnet sind. Die Ebenen π und θ schliessen wegen des rechten Winkels PF_1Q ebenfalls einen r e c h t e n W i n k e l miteinander ein. — Den Schnittpunkten X und X' von t mit einer weiteren Büschelkugel Ξ entsprechen die aus $\bar{t}$ an die Polarfläche $\overline{\Xi}$ legbaren Tangentialebenen ξ und ξ', die zufolge $\measuredangle\ XF_1X' = 2\varphi_1$ (Abschn. 1) den f e s t e n W i n k e l $2\varphi_1$ bilden. Es gilt mithin dual zu Satz 1:

Satz 4. *Die aus den gemeinsamen Tangenten zweier konfokalen Drehflächen 2. Grades (mit reellen Brennpunkten) an irgend eine weitere konfokale Fläche legbaren Paare von Tangentialebenen bilden einen unveränderlichen Winkel, dessen Halbierungsebenen die beiden Ausgangsflächen berühren.*

Fassen wir nunmehr eine in der Nyströmschen Strahlkongruenz enthaltene (nichtkonische) *Torse* Θ ins Auge, also eine aus gemeinsamen Kugeltangenten t gebildete abwickelbare Fläche, deren *Gratlinie* k etwa auf Φ verlaufen möge, während die Kugel Ψ längs einer Kurve l im gewöhnlichen Sinne berührt wird. Dieser Torse Θ — als Hüllgebilde ihrer Tangentialebenen aufgefasst — entspricht in der Polarität bezüglich Ω_1 eine auf dem Hyperboloid $\overline{\Psi}$ verlaufende Kurve $\bar{l}$, deren Tangenten $\bar{t}$ auch das konfokale Ellipsoid $\overline{\Phi}$ berühren. Nach einem bekannten Satz von CHASLES ist $\bar{l}$ daher eine *geodätische Linie* des Hyperboloides, was auch unmittelbar einzusehen ist: Die Schmiegebenen von $\bar{l}$ fallen mit den Tangentialebenen π von $\overline{\Phi}$ zusammen und stehen als solche auf den zugehörigen Tangentialebenen θ von $\overline{\Psi}$ senkrecht, wie vorhin erkannt wurde. — Da ferner dem Fernpunkt U jeder Tangente t die Verbindungsebene von $\bar{t}$ mit F_1 als Polarebene zugewiesen ist und diese Ebene wegen $\measuredangle\, UF_1P = \sigma_1$ mit der Schmiegebene π denselben Winkel σ_1 bildet, so *weisen die Schmiegebenen der geodätischen Linie* $\bar{l}$ *gegen den Fokalkegel* $F_1\bar{l}$ *feste Neigung* σ_1 *auf.* Derselbe Sachverhalt besteht hinsichtlich des gleichberechtigten zweiten Fokalkegels $G_1\bar{l}$, wie auch direkt durch Betrachtung des Punktes $S = t\gamma$ und seiner Polarebene gezeigt werden kann.

Flächenkurven, deren Schmiegebenen gegen die Trägerfläche unter einem konstanten Winkel $\sigma \neq 90°$ geneigt sind, könnte man *»pseudogeodätische Linien«* nennen. Mit den Pseudogeodätischen auf Zylinder- und Kegelflächen habe ich mich an anderer Stelle eingehend beschäftigt[5]) und insbesondere auch die Frage nach jenen Raumkurven geklärt, die Pseudogeodätische zweier Kegelflächen gleichzeitig sind[6]); hierher gehören nach dem Gesagten offenbar auch die geodätischen Linien der Drehflächen 2. Grades mit reellen Brennpunkten.

Satz 5. *Die geodätischen Linien der Drehflächen 2. Grades sind Pseudogeodätische ihrer Verbindungskegel mit den beiden Flächenbrennpunkten, d.h. ihre Schmiegebenen weisen gegen die genannten Kegelflächen feste (und gegengleiche) Neigungen auf. Zwei zusammengehörige Fokalkegel schneiden einander längs der geodätischen Linie unter konstantem Winkel und treffen auch die Quadrik längs dieser Linie unter konstanten (und gegengleichen) Neigungen.*

Wir gelangen sofort zu einer gewissen Verallgemeinerung der festgestellten Eigenschaft unserer geodätischen Linien, wenn wir den Satz 4 heranziehen. Danach gilt offenbar:

---

[5]) W. WUNDERLICH: Pseudogeodätische Linien auf Zylinderflächen. Pseudogeodätische Linien auf Kegelflächen. Sitzungsber. Ak. Wiss. Wien (beide Arbeiten im Druck).

[6]) W. WUNDERLICH: Raumkurven, die pseudogeodätische Linien zweier Kegel sind. Mh. Math. (im Druck).

Satz 6. *Wird mit dem begleitenden Dreibein einer geodätischen Linie auf einer Drehfläche 2. Grades eine Ebene starr verbunden, die die Tangente enthält, so berührt sie während der Bewegung des Dreibeins ständig eine zur Trägerfläche konfokale Fläche 2. Grades.*

Damit sind wir auf durchaus elementarem Wege zu einem Sonderfall eines noch allgemeineren Ergebnisses von R. BRICARD[7]) gelangt, der den Satz 6 für ganz beliebige Flächen 2. Grades ausgesprochen hat (ohne jedoch den in Satz 5 enthaltenen speziellen Sachverhalt hervorzuheben). Die von BRICARD auf analytischem Wege abgeleiteten Beziehungen sind kaum bekannt geworden, weshalb hier noch ein kurzer und einfacher synthetischer Beweis derselben folgen mag.

3, Ein Satz von Bricard.

R. BRICARD[7]) beweist zunächst folgende p r o j e k t i v e Beziehung, um sie nach Dualisierung metrisch zu spezialisieren:

Satz 7. *Auf zwei gemeinsamen Tangenten zweier Flächen 2. Ordnung Φ, Ψ werden von den übrigen Flächen des durch Φ und Ψ bestimmten Büschels projektive Punktreihen ausgeschnitten.*

Bedenken wir jedoch, dass die auf den beiden Tangenten von den Büschelflächen ausgeschnittenen Punktepaare je einer *Involution* angehören und eineindeutig aufeinander bezogen erscheinen, wobei die in den Berührungspunkten zusammengerückten Paare nur gleichzeitig auftreten, so illustriert der Satz 7 offenbar nur die folgende allgemeine Tatsache:

Satz 8. *Werden die Elementenpaare zweier quadratischen Involutionen derart projektiv aufeinander bezogen, dass die Doppelelemente einander entsprechen, dann zerfällt die so erklärte zweizweideutige Korrespondenz in zwei Projektivitäten.*

Zum Beweis dieses Satzes denken wir uns jede der beiden Involutionen etwa durch die Punktepaare $X_i X_i'$ eines *Kegelschnittes* c_i $(i = 1,2)$ repräsentiert, die jeweils auf den Strahlen eines Büschels S_i liegen. Diese Strahlbüschel sind laut Voraussetzung projektiv, wobei den Tangenten

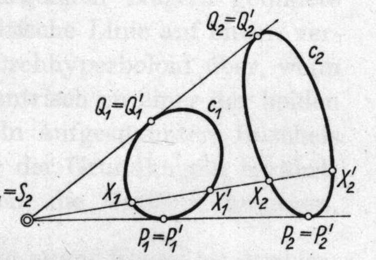

Fig. 2.

[7]) R. BRICARD: Sur une propriété des quadriques homofocales. Nouv. Ann. Math. 67 (1908), 21—25.

aus S_1 an c_1, welche ja die Doppelpunkte $P_1 = P_1'$ und $Q_1 = Q_1'$ liefern, die Tangenten aus S_2 an c_2 zugeordnet sind. Wir können nun den zweiten Kegelschnitt kollinear so verlagern, dass das zugehörige Strahlbüschel S_2 mit dem ersten Strahlbüschel S_1 identisch wird, und wir dürfen ohne Einschränkung voraussetzen, dass diese Lage von vornherein besteht (Fig. 2). Dann sind aber die Kegelschnitte c_1 und c_2 vom Zentrum $S_1 = S_2$ aus *perspektiv-kollinear* aufeinander bezogen, woraus die behauptete Projektivität der Punktreihen unmittelbar folgt. Es existieren hierbei zwei Zentralkollineationen, von welchen die eine die Punkte X_1 und X_2 (und gleichzeitig X_1' und X_2') zuordnet, während die andere X_1 und X_2' (und gleichzeitig X_1' und X_2) koppelt.

Der gleiche Sachverhalt liegt natürlich auch dem zu Satz 7 dualen Satz zugrunde:

Satz 9. *Die aus zwei gemeinsamen Tangenten zweier Flächen 2. Klasse Φ, Ψ an die übrigen Flächen der durch Φ und Ψ bestimmten Schar legbaren Tangentialebenen bilden projektive Ebenenbüschel.*

Enthält diese Schar im besonderen den *absoluten Kugelkreis*, dann sind die Flächen *konfokal* und die Tangentialebenenbüschel kongruent. Damit ergibt sich die Ausdehnung von Satz 4 auf allgemeine konfokale Quadriken und schliesslich der von der Einschränkung auf Drehflächen befreite Satz 6.

Gedruckt Februar 1950