

**Ein geometrisches Fertigungsproblem**

Von **W. Wunderlich**, Wien

Mit 4 Textabbildungen

Professor H. E. Grant vom Departement of Engineering Drawing der Washington University in Saint Louis (USA.) machte mich vor kurzem mit einem geometrischen Problem bekannt, das aus Industriekreisen an ihn herangetragen worden war. Im Vergleich zur Einfachheit der Fragestellung ist der mathematische Kern der Aufgabe recht schwierig, da ihre exakte Lösung auf eine Gleichung 24. Grades hinausläuft. Sie läßt sich indes mittels darstellend-geometrischer Methoden mit einer für den praktischen Zweck vollkommen ausreichenden Genauigkeit verhältnismäßig rasch erledigen. Abgesehen von dem Interesse, das die Aufgabe an sich beanspruchen darf, scheint sie mir demnach geeignet, den gelegentlichen Vorteil zeichnerischer Verfahren und den Nutzen der Darstellenden Geometrie wieder einmal ins rechte Licht zu rücken. Dies war für mich der Anlaß zu der vorliegenden Mitteilung, die mit freundlicher Genehmigung Prof. Grants erfolgt.

**I. Problemstellung**

Zwei ebene Wände  $\alpha$  und  $\beta$ , die unter rechtem Winkel zusammenstoßen, sind durch ein zweifach geknicktes Blechband zu verbinden, dessen Befestigungspunkte  $A$  und  $B$  in  $\alpha$  und  $\beta$  vorgegeben sind, und das zwecks rationeller Fertigung aus einem einfachen Rechteckstreifen hergestellt werden soll (Abb. 1). Mit Rücksicht auf Nietköpfe oder Beilagscheiben sollen die beiden Biegelinien einen bestimmten Abstand  $r$  von  $A$  und  $B$  besitzen. Zusätzlich wird noch gefordert, daß die Anfangsrichtung

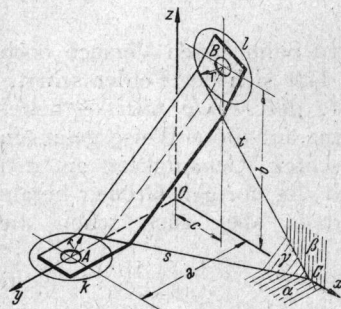


Abb. 1

des Bandes in  $\alpha$  normal zu  $\beta$  sein soll.

Gefragt wird nach der Länge des Streifens, also vor allem nach der Zentralentfernung  $e$  der für die Niet- oder Schraubbolzen dienenden Löcher, ferner nach den Winkeln  $\sigma$  und  $\tau$  der beiden Biegelinien gegen die Streifenränder und schließlich nach den Biegewinkeln  $\zeta$  und  $\psi$ .

Zur zahlenmäßigen Festlegung der Angabe bedienen wir uns eines räumlichen Normalkoordinatensystems  $Oxyz$ , dessen  $x$ -Achse mit der Schnittlinie der Grundebenen  $\alpha$  und  $\beta$  zusammenfallen soll und dessen  $y$ -Achse durch  $A$  geht, so daß  $z$  in die Ebene  $\beta$  zu liegen kommt, ohne jedoch den Punkt  $B$  enthalten zu müssen. Die Anordnung der Punkte  $A$

und  $B$  ist dann im wesentlichen durch drei Abmessungen  $a$ ,  $b$ ,  $c$  gekennzeichnet, die die Koordinatentripel von  $A$  ( $0, a, 0$ ) und  $B$  ( $c, 0, b$ ) bestimmen.

Unseren Abbildungen liegen — nach geringfügiger Abrundung der von Prof. Grant in Zoll mitgeteilten Originaldaten — die speziellen Werte

$$a = 90, \quad b = 120, \quad c = 40, \quad r = 25 \text{ mm}$$

zugrunde. Die mit 30 mm angenommene Bandbreite ist für das eigentliche Problem unwesentlich. Die Blechstärke wird vernachlässigt.

**II. Zeichnerische Lösung**

Wir betrachten die Ebene  $\alpha$  als Grundrißebene und die Ebene  $\beta$  als Aufrißebene, verzichten jedoch in der Zeichnung im allgemeinen auf eine besondere Kennzeichnung der Risse durch Akzente. Die in den Ebenen  $\alpha$  und  $\beta$  gelegenen Kreise um  $A$  bzw.  $B$  mit dem gemeinsamen Radius  $r$  seien mit  $k$  bzw.  $l$  bezeichnet.

Die beiden Biegelinien  $s$  und  $t$  des Bandes sollen laut Forderung Tangenten dieser Kreise sein. Da sie die Spuren der das Mittelstück des Bandes enthaltenden Ebene  $\gamma$  darstellen, müssen sie einander in einem Punkt  $C$  der  $Ri\beta$ achse  $x$  schneiden.

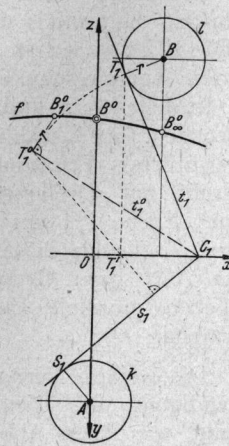


Abb. 2

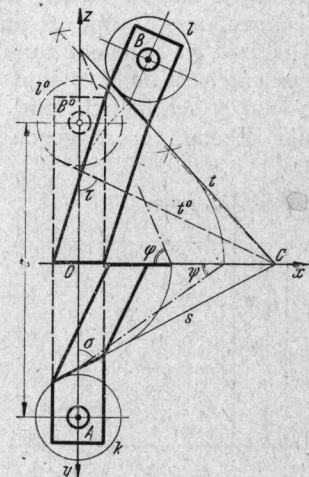


Abb. 3

Wir wählen für diesen Knotenpunkt  $C$  — sozusagen probeweise — zunächst einen beliebigen Punkt  $C_1$  auf  $x$  und legen von dort aus die inneren Tangenten  $s_1$  und  $t_1$  an die Kreise  $k$  und  $l$ , deren Berührungspunkte wir  $S_1$  und  $T_1$  nennen (Abb. 2). Diese Tangenten bestimmen zusammen mit der  $x$ -Achse ein Dreikant (eine dreiseitige Pyramide) mit der Spitze  $C_1$  und den Seitenflächen  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma_1 = s_1 t_1$ . Den Mantel dieser Pyramide breiten

wir nun in die Grundebene  $\alpha$  aus. Zu diesem Zwecke drehen wir zunächst die Ebene  $\gamma_1$  um ihre Spur  $s_1$ , bis der Punkt  $T_1$  nach  $T_1^0$  in  $\alpha$  gelangt; wegen  $C_1T_1 = C_0T_1^0$  erhalten wir  $T_1^0$  im Schnitt eines Kreisbogens um  $C_1$  durch  $T_1$  mit dem Lot, das aus dem der Rißachse angehörenden Grundriß  $T_1'$  von  $T_1$  auf die Drehachse  $s_1$  zu fallen ist (Grundriß des Drehkreises von  $T_1$ ). Errichten wir anschließend in  $T_1^0$  auf  $C_1T_1'$  eine Normale von der Länge  $r$ , so gibt deren Endpunkt  $B_1^0$  die Stelle des Punktes  $B$  in der Abwicklung (Verebnung) des Dreikantes an, d. h. die Stelle der zu  $B$  gehörigen Bohrung in jenem verebneten Blechstreifen, der die Verbindung der Punkte  $A$  und  $B$  bei Benützung der Biegelinien  $s_1$  und  $t_1$  herstellt.

Entsprechend der Zusatzforderung, die verlangt, daß die Anfangsrichtung des Bandes zur Ebene  $\beta$  normal sein soll, müßte die Gerade  $AB_1^0$  mit der  $y$ -Achse zusammenfallen. Da dies im allgemeinen nicht der Fall sein wird, so wiederholen wir die Konstruktion für andere Punkte  $C_2, C_3, \dots$  auf  $x$ , insbesondere auch für den unendlich fernen Punkt  $C_\infty$  (Stechzirkelkonstruktion!). Der Ort der so gewonnenen Punkte  $B_i^0$  ist eine Kurve  $f$ , die die verlängerte  $y$ -Achse in einem Punkt  $B^0$  schneidet.  $AB^0 = e$  gibt dann bereits den gesuchten Lochabstand für den verebneten Blechstreifen.

Kennen wir erst einmal den Punkt  $B^0$ , dann ist es leicht, den zugehörigen Knotenpunkt  $C$  auf  $x$  zu ermitteln: Da die Entfernungen  $CB$  und  $CB^0$  gleich sein müssen, so erhalten wir  $C$ , wenn wir in der Zeichnung die Symmetrale von  $BB^0$  mit  $x$  zum Schnitt bringen (Abb. 3). Nachdem wir in der Verebnung noch den zu  $l$  kongruenten Kreis  $l^0$  um  $B^0$  eingetragen haben, ziehen wir aus  $C$  die zugehörigen Tangenten  $s, t$  und  $t^0$  an die Kreise  $k, l$  und  $l^0$ . Die Biegelinien  $s$  und  $t^0$  bilden dann mit  $y$  die gesuchten Winkel  $\sigma$  und  $\tau$ . Die Biegewinkel  $\varphi$  und  $\psi$  schließlich sind mit den Neigungswinkeln der Ebene  $\gamma = st$  gegen die Bildebenen  $\alpha$  und  $\beta$  identisch. Ihre aus Abb. 3 ersichtliche Ermittlung beruht auf Drehungen der Ebene  $\gamma$  um  $z$  bzw.  $y$ , die sie in eine zur Auf- bzw. Grundrißebene normale Lage bringen.

Die weitere Vervollständigung der Zeichnung, wie sie in Abb. 3 vorgenommen wurde, bereitet keinerlei Mühe, wäre jedoch zur Beantwortung der in der Aufgabe gestellten Fragen gar nicht notwendig.

Für die unter I angegebenen speziellen Abmessungen lieferte eine Zeichnung in natürlichem Maßstab die folgenden Lösungswerte:  $e = 172.5$  mm;  $\sigma = 61.8^\circ$ ,  $\tau = 64.5^\circ$ ;  $\varphi = 66.8^\circ$ ,  $\psi = 35.9^\circ$ .

### III. Rechnerische Behandlung

Aus der geschilderten darstellend-geometrischen Behandlung des vorliegenden Problems läßt sich unschwer ein rechnerisches Lösungsverfahren ableiten. Wir führen zu diesem Zwecke außer den bereits in I erklärten Größen noch die folgenden ein (Abb. 4):

$$\begin{aligned} OC &= x, & OB^0 &= y; \\ \sphericalangle OCA &= \xi, & \sphericalangle OCB &= \eta, & \sphericalangle OCB^0 &= \zeta; \\ \sphericalangle SCA &= \mu, & \sphericalangle TCB &= T^0CB^0 = \nu; \\ \sphericalangle SCT &= SCT^0 = \omega. \end{aligned}$$

Ausgehend von einem passenden Näherungswert für die Koordinate  $x$  des Knotenpunktes  $C$  berechnen wir zunächst den Ursprungsabstand  $y$  des zugehörigen Punktes  $B^0$  auf der  $y$ -Achse; aus  $CB = CB^0$  folgt

$$y^2 = b^2 + c^2 - 2cx. \quad (1)$$

Dann bestimmen wir die Hilfswinkel  $\xi, \eta$  und  $\zeta$  aus

$$\operatorname{tg} \xi = \frac{a}{x}, \quad \operatorname{tg} \eta = \frac{b}{x-c}, \quad \operatorname{tg} \zeta = \frac{y}{x}, \quad (2)$$

ferner  $\mu$  und  $\nu$  aus

$$\sin \mu = \frac{r}{a} \sin \xi, \quad \sin \nu = \frac{r}{b} \sin \eta. \quad (3)$$

Den Spurenwinkel  $\omega$  der Ebene  $\gamma = SCT$  finden wir als Hypotenuse des rechtwinkligen sphärischen Dreieckes mit den Katheten  $\xi - \mu$  und  $\eta - \nu$ , das zu unserem Dreikant  $\alpha \beta \gamma$  gehört; die zugehörige Formel

$$\cos \omega = \cos (\xi - \mu) \cos (\eta - \nu) \quad (4)$$

kann jedoch auch unmittelbar aus Abb. 2 abgelesen werden. Da derselbe Winkel  $\omega$  aber auch in der Verebnung auftreten muß, so erscheint die richtige Lage von  $C$  durch die Bedingung

$$\omega = (\xi - \mu) + (\zeta - \nu) \quad (5)$$

gekennzeichnet.

Diese Bedingung wird beim ersten Versuch noch nicht erfüllt sein, doch läßt sich der Fehler schrittweise — etwa mit Hilfe der *regula falsi* — beliebig weit herunterdrücken; auf diese Weise gelangen wir mit jeder gewünschten Genauigkeit an den wahren Wert von  $x$  und die übrigen Größen heran.

Damit haben wir dann aber auch schon die Lochdistanz

$$e = a + y \quad (6)$$

und die Biegelinienwinkel

$$\sigma = 90^\circ - (\xi - \mu), \quad \tau = 90^\circ - (\zeta - \nu). \quad (7)$$

Die Biegewinkel  $\varphi$  und  $\psi$  ergeben sich aus dem schon erwähnten rechtwinkligen Kugeldreieck oder gemäß Abb. 3 mittels der Formeln

$$\begin{aligned} \cot \varphi &= \sin (\xi - \mu) \cot (\eta - \nu), \\ \cot \psi &= \sin (\eta - \nu) \cot (\xi - \mu). \end{aligned} \quad (8)$$

Für praktische Zwecke reicht die Genauigkeit des Rechenschiebers vollkommen aus, liefert aber natürlich keine besseren Werte als eine Zeichnung. Mit Hilfe fünfstelliger Logarithmentafeln wurden für die in Abschnitt I angegebenen speziellen Abmessungen die folgenden Lösungswerte berechnet:

$$\begin{aligned} x &= 114.75 \text{ mm}, & e &= 172.58 \text{ mm}; \\ \sigma &= 61^\circ 45' 48'', & \tau &= 64^\circ 26' 36''; & \varphi &= 66^\circ 51' 00'', \\ & & & & \psi &= 35^\circ 53' 51''. \end{aligned}$$

#### IV. Grad des Problems

Würden wir aus den Gleichungen (1) bis (5) alle Winkelgrößen und die Entfernung  $y$  eliminieren, so würden wir zu einer algebraischen Gleichung in  $x$  allein gelangen, deren Grad von einem gewissen mathematischen Interesse für die Beurteilung der Aufgabe ist.

In Umgehung dieses etwas beschwerlichen Weges führen wir zunächst weitere Hilfsgrößen

$$CA = m, CB = CB^0 = n, CS = s, CT = CT^0 = t$$

ein, mit deren Hilfe sich alle auftretenden Winkel-funktionen rational ausdrücken lassen. Setzen wir dann in Gleichung (4) für  $\omega$  den Wert aus (5) ein und wenden wir die erforderlichen Additionstheoreme an, so erhalten wir die algebraische Beziehung

$$(sx + ar)(tx + ry) - (as - rx)(ty - rx) = (sx + ar)[t(x - c) + br]. \quad (9)$$

Hierzu treten neben (1) noch die Definitionsgleichungen für die neueingeführten Größen  $s$  und  $t$ :

$$s^2 = x^2 + a^2 - r^2, t^2 = (x - c)^2 + b^2 - r^2. \quad (10)$$

Wir haben nun in (1), (9) und (10) vier Gleichungen für die vier Unbekannten  $x, y, s, t$ ; die Anzahl der Lösungssysteme stellt ebenfalls den gesuchten Grad dar. Beachten wir, daß (9) nur scheinbar von viertem, in Wirklichkeit (nach gehöriger Reduktion) jedoch von drittem Grade ist, während die übrigen drei Gleichungen quadratisch sind, so sind nach dem Theorem von Bézout  $3 \cdot 2^3 = 24$  Lösungen zu erwarten. Durch eine ge-

nauere Untersuchung müßte man sich dann noch überzeugen, daß sich keine uneigentlichen Lösungen abspalten; hierbei sind geometrische Vorstellungen in einem durch die Koordinaten  $x, y, s, t$  beschriebenen vierdimensionalen Raum sehr förderlich.

Für ein Problem 24. Grades besteht jedenfalls wenig Aussicht, die geschilderten Lösungsverfahren wesentlich zu vereinfachen!

#### V. Varianten

Abschließend mag noch erwähnt werden, daß mit wesentlich den gleichen Mitteln wie unter II auch die konstruktive Lösung einer etwas verallgemeinerten Aufgabe gefunden werden kann, bei welcher die Wände  $\alpha$  und  $\beta$  keinen rechten Winkel einschließen, die Kreise  $k$  und  $l$  verschiedene Größe haben und der Anfang des Bandes eine beliebig vorgeschriebene Richtung haben soll. Die beiden ersten Abänderungen haben keinen Einfluß auf den Grad des Problems, die dritte erhöht ihn um 8.

Eine andere Variante schreibt überhaupt keine Anfangsrichtung vor, verlangt dafür aber eine minimale Bandlänge. Nach Konstruktion der Fehlerkurve  $f$  gemäß Abb. 2 hätten wir dann jenen ihrer Punkte  $B_i^0$  zu bestimmen, der den kleinsten Abstand von  $A$  hat. Läßt sich derselbe — etwa durch einfaches Abgreifen mit dem in  $A$  eingesetzten Zirkel — auch nicht mit voller Sicherheit ermitteln, so hat dies doch keinen merklichen Einfluß auf die zugehörige Bandlänge, da sich diese in der Umgebung eines Extremums praktisch kaum ändert.