

ÖSTERREICHISCHES INGENIEUR-ARCHIV

Schriftleiter: Prof. Dr. F. Magyar, Technische Hochschule Wien

Springer-Verlag, Wien I, Mölkerbastei 5

Alle Rechte vorbehalten

Höhere Radlinien als Näherungskurven.

Von W. Wunderlich, Wien.

Mit 2 Textabbildungen.

Zusammenfassung. Im Anschluß an eine frühere Arbeit¹, in der die Theorie der „Höheren Radlinien“ entwickelt wurde, weist der Verfasser auf die Bedeutung dieser Kurven für die Approximation vorgelegter geschlossener Linien in der Ebene hin. Als erstes Beispiel wird der Rand eines Quadrates auf verschiedene Arten, entsprechend den Prinzipien von Fourier, Gauß, Taylor und Tschebyscheff angenähert. Ein zweites Beispiel zeigt die Wiedergabe einer Hysteresisschleife durch höhere Radlinien, die gewisse Singularitäten besitzen.

Summary. Having developed, in a former paper¹, the theory of „Higher Cycloids“, the author shows now how to use these curves for the approximate representation of closed curves, given in the plane. As a first example, the shape of a square is represented approximately by various manners, according to the principles of Fourier, Gauß, Taylor and Tschebysheff. Another example shows the representation of hysteresis curve by means of higher cycloids, having certain singularities.

¹ Höhere Radlinien. Österr. Ingenieur-Arch. I, 277—296 (1947); im folgenden zitiert mit „H. R.“.

Résumé. Ayant développé la théorie des «Cycloïdes Supérieures» dans un travail précédent¹, l'auteur indique maintenant le rôle de ces courbes pour la représentation approximative de courbes fermées, données dans le plan. Comme premier exemple, le contour d'un carré est représenté de diverses manières, suivant les principes de Fourier, Gauß, Taylor et Tchébycheff. Un autre exemple montre la représentation d'une courbe d'hystérésis par des cycloïdes supérieures, présentant certaines singularités.

1. Einleitung.

In einer früheren Arbeit¹ wurde die grundlegende Theorie der „höheren Radlinien“ entwickelt, einer umfassenden Familie von ebenen Kurven, die als Verallgemeinerungen der Trochoiden und Zykloiden angesehen werden können. Als „Radlinie s -ter Stufe“ wurde die Bahnkurve des Endpunktes P eines s -gliedrigen Gelenkpolygons bezeichnet, dessen Anfangspunkt O fest ist und dessen Glieder sich mit den konstanten (absoluten) Winkelgeschwindigkeiten $\omega_1, \omega_2 \dots \omega_s$ drehen.

Macht man O zum Nullpunkt eines Normalkoordinatensystems x, y und faßt man die Koordinatenpaare zu komplexen Größen $z = x + i y$ zusammen, so läßt sich die von P durchlaufene Radlinie mittels des reellen Zeitparameters t durch die einfache Gleichung

$$z = \sum_{v=1}^s a_v e^{i \omega_v t} \quad (1)$$

beschreiben. Die komplexen Konstanten a_v stellen — als Vektoren aufgefaßt — die Anfangslagen der Glieder des erzeugenden Gelenkpolygons (für $t = 0$) dar.

Für rationale Geschwindigkeitsverhältnisse — die ω_v können in diesem Fall als ganzzahlig vorausgesetzt werden — ergeben sich geschlossene, rational-algebraische Kurven, deren kinematische Erzeugung durch Zahnradgetriebe verwirklicht werden kann.² Im Hinblick darauf kommt den höheren Radlinien eine ähnliche technische Bedeutung zu wie etwa den Koppelkurven. Da ihre Mannigfaltigkeit aber weit größer ist, sind sie wohl noch besser als die in vielen Fällen erfolgreich herangezogenen Koppelkurven geeignet, bestimmte gewünschte Bahnen näherungsweise zu ersetzen.

In der vorliegenden Arbeit wird nun dargelegt, wie eine vorgelegte geschlossene Linie mit zeitlich vorgeschriebener Durchlaufung durch Radlinien hinreichend hoher Stufe mit beliebiger Genauigkeit angenähert werden kann. Die betreffenden Näherungskurven ergeben sich einfach durch Abbrechen der Fourierschen Entwicklung der komplexen Bahngleichung. An einem Beispiel wird ferner gezeigt, wie bei freistehender Durchlaufung der vorgelegten Bahn durch Anwendung bekannter Näherungsprinzipien von Gauß, Taylor und Tschébytscheff schon mittels Radlinien 3. Stufe hervorragende Näherungen zu erzielen sind. Schließlich wird an einem weiteren Beispiel illustriert, wie eine vorgelegte Kurve mit bestimmten Singularitäten durch eine Radlinie wiedergegeben werden kann.

2. Annäherung einer Bahn mit vorgeschriebener Durchlaufung.

Sei eine ebene geschlossene Linie l durch ihre komplexe Parametergleichung

$$z = Z(\varphi), [0 \leq \varphi \leq 2\pi, Z(0) = Z(2\pi)] \quad (2)$$

vorgegeben. Deutet man den reellen Parameter φ als Zeitfaktor, so ist durch (2)

² H. R., Abschn. 3.

nicht bloß die Gestalt der Linie, sondern auch ihre zeitliche Durchlaufung festgelegt, die wir uns periodisch wiederkehrend vorstellen wollen.

Denken wir uns die Komponenten X und Y von Z nach Fourier entwickelt und die beiden Reihen wieder zusammengefaßt, so erhalten wir eine Entwicklung von der Bauart

$$z = \sum_{v=-\infty}^{+\infty} a_v \cdot e^{v i \varphi} \quad (3)$$

mit den komplexen Koeffizienten

$$a_v = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Z \cdot e^{-v i \varphi} d\varphi. \quad (4)$$

Ohne auf Konvergenzfragen eingehen zu wollen, können wir annehmen, daß bei den in der technischen Praxis auftretenden Fällen die unendliche Reihe (3) gegen die gegebene Funktion (2) strebt, so daß ihre endlichen Abschnitte mehr oder weniger gute Näherungen abgeben. Jeder solche Abschnitt stellt dann aber die Gleichung einer höheren Radlinie k dar, die die gegebene Bahn l approximiert, und zwar im allgemeinen um so besser, je mehr Glieder der Reihe Berücksichtigung finden. Möbius³ nahm diese Tatsache zum Anlaß, zur Ehrenrettung der verachteten Theorie der Epizykeln anzutreten, da dieselbe — als Vorläuferin Fourierscher Ideen — bei Heranziehung genügend vieler Glieder durchaus imstande war, die Bahnen der Himmelskörper mit hinreichender Genauigkeit zu beschreiben.

Es ist seit Bessel geläufig, daß ein trigonometrisches Polynom, das einer Fourier-Entwicklung entnommen ist, stets unter allen Polynomen mit den gleichen Frequenzen die beste Annäherung im Gaußschen Sinne darstellt, d. h. die kleinste Quadratsumme der Abweichungen von der Ausgangsfunktion aufweist.⁴ Dies gilt auch im Komplexen, wie man sofort einsieht. Sei $z = \sum a_v e^{v i \varphi}$ ein endliches Polynom mit beliebig ausgewählten (aber ganzen) v ; zwecks Approximation von (2) sollen die a_v so bestimmt werden, daß das Fehlerintegral

$$F = \int_0^{2\pi} |Z - z|^2 d\varphi = \int_0^{2\pi} (Z - z)(\bar{Z} - \bar{z}) d\varphi \quad (5)$$

ein Minimum wird.

Wir fassen die Unbekannten a_v und $\bar{a}_v$ in F vorläufig als voneinander unabhängige Größen auf, verlangen also zunächst gar nicht, daß zusammengehörige Paare konjugiert sein sollen. Die partielle Ableitung nach $\bar{a}_v$ führt dann auf die Bestimmungsgleichung

$$\int_0^{2\pi} \left(Z - \sum_{\mu} a_{\mu} e^{\mu i \varphi} \right) e^{-v i \varphi} d\varphi = 0. \quad (6)$$

Da in der Summe nur das Glied $\mu = v$ einen nicht verschwindenden Beitrag liefert, und zwar $2\pi a_v$, erhalten wir für a_v genau den Wert (4). Die analoge Bestimmung von $\bar{a}_v$ ergibt den konjugierten Wert, womit die Brauchbarkeit der gefundenen Lösung gewährleistet und die Übereinstimmung mit den Fourier-Koeffizienten bestätigt ist.

³ A. F. Möbius: Die Elemente der Mechanik des Himmels. Leipzig. 1843.

⁴ Vgl. etwa F. Klein: Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus, Bd. III: Präzisions- und Approximationsmathematik.

3. Annäherung regelmäßiger Vielecke.

Als Beispiel wollen wir nun die Approximation eines regelmäßigen Vieleckes betrachten

a) Fourier: Harmonische Analyse einer bestimmten Durchlaufung.

Weist ein beliebiges Profil q -zählige Drehsymmetrie auf, so besitzt die definierende Funktion $Z(\varphi)$ die Eigenschaft, sich bei Vermehrung des Parameters φ um $\sigma = 2\pi/q$ mit dem Faktor $e^{\sigma i}$ zu vervielfachen, oder allgemeiner mit $e^{p\sigma i}$, wobei p zu q teilerfremd ist. Unterteilt man dementsprechend in (4) das Integrationsintervall 2π in q Abschnitte von der Länge σ , so erhält man für den Beitrag eines Teiles:

$$\int_{\lambda\sigma}^{(\lambda+1)\sigma} Z(\varphi) \cdot e^{-\nu i \varphi} d\varphi = \int_0^{\sigma} Z(\psi + \lambda\sigma) \cdot e^{-\nu i (\psi + \lambda\sigma)} d\psi = e^{\lambda(p-\nu)i\sigma} \int_0^{\sigma} Z(\psi) \cdot e^{-\nu i \psi} d\psi.$$

Summation von $\lambda = 0$ bis $q-1$ liefert dann eine q -gliedrige geometrische Reihe, deren Summe nur dann von Null verschieden ist, wenn $p-\nu$ durch q teilbar ist. Man findet so für die Fourier-Koeffizienten die Darstellung

$$a_\nu = \begin{cases} \frac{q}{2\pi} \int_0^{\sigma} Z \cdot e^{-\nu i \varphi} d\varphi & \text{für } \nu \equiv p \pmod{q}, \\ 0 & \text{für } \nu \not\equiv p \pmod{q}. \end{cases} \quad (7)$$

Die Fourier-Entwicklung eines drehsymmetrischen Profils enthält mithin nur Frequenzen einer arithmetischen Reihe.⁵

Liegt nun im besonderen ein regelmäßiges, nichtüberschlagenes q -Eck mit geradlinigen Seiten vor, so wird man den Mittelpunkt zum Ursprung und den Inkreisradius als Längeneinheit des Koordinatensystems wählen, also $X = 1$ für $|\varphi| \leq \sigma/2 = \alpha$ setzen. Durch die zweite Komponente $Y(\varphi)$, die im gleichen Intervall definiert sein muß, wird die Eigenart der Durchlaufung einer Vieleckseite geregelt. Liegt hierüber keine bestimmte Forderung vor, so wird man $Y(\varphi)$ wohl als monotone und ungerade Funktion mit den Randwerten $Y(\pm\alpha) = \pm \operatorname{tg} \alpha$ annehmen. Unter diesen Voraussetzungen läßt sich die Formel (7) für die nichtverschwindenden (und jetzt reellen) Fourier-Koeffizienten weiterentwickeln zu

$$a_\nu = \frac{\sin \nu \alpha}{\nu \alpha} + \frac{1}{\alpha} \int_0^{\alpha} Y \cdot \sin \nu \varphi d\varphi \quad (\nu = 1 + \lambda q, \quad \alpha = \pi/q). \quad (8)$$

Der nächstliegende Ansatz wäre vielleicht $Y = \operatorname{tg} \varphi$ oder $k\varphi$, konstanter Winkel- oder Bahngeschwindigkeit entsprechend; abgesehen von den unhandlichen Ausdrücken für die a_ν im ersten Fall ist aber auch die Konvergenz der zugehörigen Fourier-Entwicklungen keine besonders gute, weil bei der Durchlaufung des Vielecks der Richtungswechsel in den Ecken mit voller Geschwindigkeit erfolgt. Ein günstigerer Ansatz, der dieser unstetigen Richtungsänderung durch Herabminderung der Geschwindigkeit auf Null entgegenkommt, lautet:

$$Y = \operatorname{tg} \alpha \cdot \sin \frac{q\varphi}{2}. \quad (9)$$

Hier wird jede Polygonseite nach Art einer harmonischen Halbschwingung durchlaufen. Auswertung von (8) liefert die Fourier-Koeffizienten

$$a_\nu = \frac{\sin \alpha}{\alpha} \cdot \frac{2q^2 \cdot (-1)^{\lambda+1}}{(2\nu-q) \cdot 2\nu \cdot (2\nu+q)} \quad \text{für } \nu = 1 + \lambda q. \quad (10)$$

⁵ Vgl. H. R., Satz 6.

Speziell für das Quadrat ($q = 4$) ergibt sich die Entwicklung

$$z = \frac{8\sqrt{2}}{\pi} \left(\frac{1}{3} e^{i\varphi} - \frac{1}{15} e^{-3i\varphi} + \frac{1}{105} e^{5i\varphi} + \dots \right). \quad (11)$$

Die durch die drei angeschriebenen Glieder dargestellte Radlinie 3. Stufe liefert eine ganz annehmbare Approximation (vgl. Abb. 1), deren maximale Querabweichung von den Quadratseiten 0.013 beträgt, das ist rund 0.6% der Seitenlänge.

b) Gauß: Kleinste mittlere Querabweichung.

Ist keine bestimmte Durchlaufung des Vielecks vorgeschrieben, hingegen eine bestimmte Stufe s der approximierenden Radlinie gewünscht, so wird man in sinn-gemäßer Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate von Gauß die s reellen Koeffizienten a_ν so bestimmen, daß das Integral über das Quadrat der Querabweichung $x - 1$ von der Vieleckseite im Bereich $|\varphi| \leq \alpha$ einen minimalen Wert annimmt:

$$\frac{\partial}{\partial a_\nu} \int_0^\alpha (x - 1)^2 d\varphi = 0 \quad \text{mit} \quad x = \sum_\mu a_\mu \cos \mu \varphi. \quad (12)$$

Die Frequenzen μ sind aus Symmetriegründen natürlich der arithmetischen Reihe $1 + \lambda q$ zu entnehmen.

Die Differentiation nach den Parametern a_ν darf unter dem Integral ausgeführt werden, und man erhält nach Auswertung der verbleibenden Integrale

$$\int_0^\alpha (x - 1) \cos \nu \varphi d\varphi = 0 \quad (13)$$

für die s Unbekannten a_ν die s linearen Gleichungen:

$$\sum_\nu c_{\mu\nu} a_\nu = C \quad \text{mit} \quad c_{\mu\nu} = \begin{cases} \frac{(-1)^{\mu+\lambda}}{\mu + \nu} & \text{für } \mu \neq \nu, \\ \frac{1}{2\mu} + \frac{\alpha}{\sin 2\alpha} & \text{für } \mu = \nu. \end{cases} \quad (14)$$

($\mu = 1 + \lambda q, \quad \nu = 1 + \lambda q$)

$$C_\mu = \frac{(-1)^\mu}{\mu \cos \alpha} \quad (\alpha = \pi/q).$$

Dieses Gleichungssystem lautet im speziellen Fall des Quadrates ($q = 4$) für eine Näherungsradielinie 3. Stufe ($\mu, \nu = 1, -3, 5$):

$$\begin{aligned} \left(\frac{\pi}{2} + 1\right) a_1 + a_{-3} - \frac{1}{3} a_5 &= 2\sqrt{2}, \\ a_1 + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}\right) a_{-3} + a_5 &= \frac{2}{3}\sqrt{2}, \\ -\frac{1}{3} a_1 + a_{-3} + \left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{5}\right) a_5 &= -\frac{2}{5}\sqrt{2} \end{aligned} \quad (15)$$

und hat die Lösungen

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{2\sqrt{2}}{\Delta} \left(\frac{\pi^2}{4} - \frac{4\pi}{15} - \frac{64}{45} \right), & a_{-3} &= \frac{2\sqrt{2}}{3\Delta} \left(\frac{\pi^2}{4} - \frac{3\pi}{5} - \frac{32}{45} \right), \\ a_5 &= -\frac{2\sqrt{2}}{5\Delta} \left(\frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi}{3} - \frac{32}{9} \right), & \text{mit } \Delta &= \frac{\pi^3}{8} + \frac{13\pi^2}{60} - \frac{52\pi}{45} - \frac{256}{135}. \end{aligned} \quad (16)$$

Wie aus Abb. 1 ersichtlich ist, bedeutet die mit diesen Koeffizienten erzielte Näherung gegenüber a) einen beachtlichen Fortschritt. Die maximale Abweichung

von der Quadratseite tritt in der Ecke auf und beträgt etwa 0·007. Der mittlere Fehler f — der bei dieser Annäherung das Minimum annimmt — ergibt sich aus

$$\alpha f^2 = \int_0^\alpha (x-1)^2 d\varphi = \int_0^\alpha (1-x) d\varphi \quad (17)$$

zu rund $\pm 0\cdot0018$.

c) Taylor: Stärkste Anschmiegung.

Ein anderes beliebtes Näherungsprinzip besteht darin, über die freien Parameter der approximierenden Funktion so zu verfügen, daß dieselbe mit der gegebenen Funktion an einer bestimmten Stelle den Wert und möglichst viele Ableitungen gemein hat; anders ausgedrückt, die Taylorsche Potenzreihen sollen in möglichst vielen Anfangsgliedern übereinstimmen. Eine so gewonnene Näherungskurve wird sich der vorgelegten Linie vor allem in der Umgebung der Ausgangsstelle sehr innig anschmiegen, doch kann sich die praktische Übereinstimmung auf einen beträchtlichen Bereich erstrecken.

In unserem Fall — $Y(\varphi)$ wie immer als ungerade Funktion vorausgesetzt — handelt es sich um die Approximation von $X=1$ durch ein trigonometrisches Polynom $x = \sum a_\nu \cos \nu \varphi$ mit reellen Koeffizienten in der Umgebung der Stelle $\varphi = 0$. Da die Ableitungen ungerader Ordnung von selbst verschwinden, läuft die Aufgabe auf die Erfüllung der linearen Gleichungen

$$\sum_\nu a_\nu = 1, \quad \sum_\nu \nu^2 a_\nu = 0, \quad \sum_\nu \nu^4 a_\nu = 0, \dots \quad (18)$$

hinaus, wobei die Frequenzen wieder der arithmetischen Reihe $\nu = 1 + \lambda q$ zu entnehmen sind.

Für eine Näherungsradielinie s -ter Stufe können s Bedingungen (18) herangezogen, also die ersten $2s-1$ Ableitungen zum Verschwinden gebracht werden. Die so gewonnene Radlinie berührt jede Vieleckseite in der Mitte und hat daselbst mit ihr $2s$ zusammengedrückte Punkte gemein.⁶

Meyer zur Capellen⁷ hat gelegentlich die Ergebnisse für den Fall $s=2$ zusammengestellt, also die Annäherung regelmäßiger Vielecke durch gewöhnliche Radlinien mit Flachpunkten erledigt; wie von vornherein zu erwarten ist, erweisen sich hierbei die Hypotrochoiden ($\lambda=0, -1$) als den Epitrochoiden ($\lambda=0, +1$) überlegen, doch ist auch bei jenen die Abrundung der Polygonecken noch sehr stark. — Schon der bloße Fortschritt zu Näherungsradielinien 3. Stufe ($\lambda=0, -1, +1$) bringt nun eine außerordentliche Verbesserung mit sich. Man findet aus den entsprechenden Gl. (18) allgemein die Koeffizienten

$$a_1 = \frac{(q^2-1)^2}{q^2(q^2-4)}, \quad a_{1-q} = -\frac{(q+1)^2}{4q^2(q-2)}, \quad a_{1+q} = \frac{(q-1)^2}{4q^2(q+2)}, \quad (19)$$

und für den Fall $q=4$ des Quadrates die speziellen Werte

$$a_1 = \frac{75}{64}, \quad a_{-3} = -\frac{25}{128}, \quad a_5 = \frac{3}{128}. \quad (20)$$

Wie aus Abb. 1 ersichtlich ist, ist die Anschmiegung längs etwa 50% der Quadratseite hervorragend (Abweichung weniger als 0·0002), jedoch die Ausrundung der

⁶ Es läßt sich leicht zeigen, daß die nächste nicht verschwindende Ableitung $x^{(2s)}$ an der Stelle $\varphi=0$ den Wert $-11\nu^2$ hat, also negativ ist, so daß die Radlinie in der Umgebung der Schmiegestellen — wahrscheinlich aber überhaupt — konvex ist.

⁷ W. Meyer zur Capellen: Erzeugung des n -Ecks mit abgerundeten Ecken. Maschinenbau, RM—AfG 4, 44—47 (1936).

Quadratseiten noch immer deutlich merkbar (Querabweichung daselbst 0·05, also 2·5% der Quadratseite; Krümmungsradius $\varrho_{\min} = 1/8 - 1/2q^2 = 3/32$).

d) Tschebyscheff: Kleinste Maximalabweichung.

Betrachtung von Abb. 1 lehrt, daß die bisher abgeleiteten Näherungen im mittleren Bereich der Quadratseite wesentlich besser approximieren als gegen die Ecken zu, wo die maximalen Abweichungen zu beobachten sind. Man kann sich nun bemühen, dieses Fehlermaximum herunterzudrücken, was natürlich im allgemeinen nur auf Kosten der Näherungsgüte im Mittelbereich möglich sein wird; selbstverständlich darf dabei kein an anderer Stelle neu entstehender Größtfehler das herabgesetzte Maximum übertreffen, sondern höchstens gleichen Betrag annehmen.

Es leuchtet ein, daß dieser (gemeinsame) Maximalbetrag dann am kleinsten ausfällt, wenn er von der Näherungskurve so oft wie möglich angenommen wird, d. h. so oft es die freien Parameter der Näherung erlauben. Das ist das „Prinzip der besten Ausnützung“, das Tschebyscheff bei der ihm eigenen Behandlung von Approximationsproblemen leitete.⁴

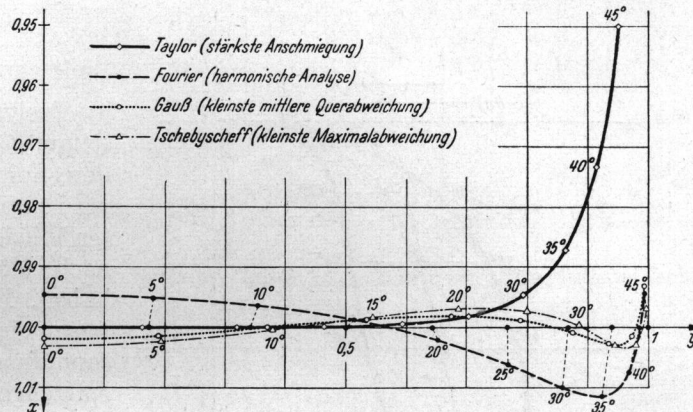


Abb. 1. Vier Annäherungen eines Quadrats durch Radlinien 3. Stufe 1:—3:5. Diagramm der zehnfach überhöhten Abweichungen.

Dieses Prinzip ist meist nicht leicht anzuwenden und im Falle der Annäherung durch Radlinien wohl kaum durch eine allgemeine Vorschrift zu beschreiben.

Bei unserer Aufgabe der Approximation eines regelmäßigen Vieleckes durch eine Radlinie s -ter Stufe handelt es sich um die Annäherung der konstanten Funktion $X = 1$ im Intervall $0 \leq \varphi \leq \alpha$ durch ein s -gliedriges Cosinuspolynom $\sum a_\nu \cos \nu \varphi$ mit bekannten Frequenzen. Den s Koeffizienten a_ν (als freien Parametern) entsprechend, kann verlangt werden, daß die Maximalabweichung in dem genannten Intervall $(s+1)$ mal angenommen wird, hiervon je einmal an den beiden Rändern.

Die für das Quadrat und eine Näherungsrادlinie 3. Stufe mit den Frequenzen $\nu = 1, -3, 5$ durchgeführte Rechnung ergab die Koeffizienten

$$a_1 = 1.206447, \quad a_{-3} = -0.255474, \quad a_5 = 0.052215.$$

Auf die Wiedergabe der langwierigen Rechnung soll in Ermangelung der wünschenswerten Allgemeinheit verzichtet werden. Dies um so eher, als die erzielte Verbesserung kaum die angewandte Mühe lohnte: Die Maximalabweichung wurde bloß auf $\Delta x_{\max} = \pm 0.0032$ herabgedrückt, das ist rund die Hälfte des Größtfehlers der Gaußschen Näherung b) in der Quadratecke; gleichzeitig wurden jedoch, wie aus Abb. 1 entnommen werden kann, die Fehler im Mittelbereich nahezu verdoppelt.

e) Vergleich.

In der folgenden Tabelle sind für die behandelten Näherungen des Quadrates durch Radlinien 3. Stufe die numerischen Werte der Koeffiziententripel der Größe nach zusammengestellt:

	a_1	a_3	a_5
Taylor	1·171 875	— 0·195 312	0·023 437
Fourier	1·200 422	— 0·240 084	0·034 298
Gauß	1·203 145	— 0·248 775	0·047 514
Tschebyscheff	1·206 447	— 0·255 474	0·052 215

Die Art und Güte der Näherungen geht am besten aus der graphischen Darstellung in Abb. 1 hervor, welche die Abweichungen von der Quadratseite in zehnfacher Überhöhung zeigt. Die markierten Kurvenpunkte entsprechen Werten des Zeitparameters φ von 5 zu 5°.

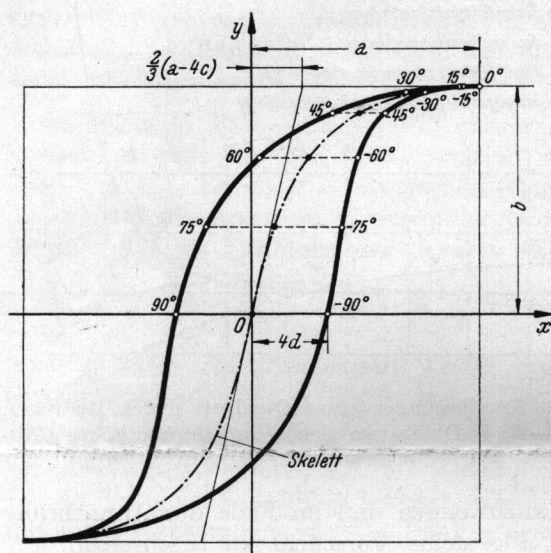


Abb. 2. Wiedergabe einer Hysteresisschleife durch eine Radlinie 4. Stufe 1:— 1:3:— 3.

Wir verlegen den Koordinatenursprung in die Kurvenmitte und können uns auf Grund der zweizähligen Drehsymmetrie auf ungerade Frequenzen beschränken.⁵ Da es Durchmesser gibt, welche die Hysteresis sechsmal schneiden, müssen wir von vornherein mindestens mit einer Sextik rechnen und daher Exponenten bis zum Betrag 3 vorsehen. Als Ansatz bietet sich demnach vorläufig:

$$z = a_1 \cdot e^{i\varphi} + a_2 \cdot e^{-i\varphi} + a_3 \cdot e^{3i\varphi} + a_4 \cdot e^{-3i\varphi}. \quad (21)$$

Den beiden Schnabelspitzen mögen die Parameterwerte $\varphi = 0$ und π zugeordnet werden. Sie seien durch die komplexen Koordinaten $\pm (a + bi)$ festgelegt, wobei die reelle Achse parallel zu den Spitzentangenten vorausgesetzt werden soll. — An Stelle der den Singularitäten entsprechenden Forderungen an die Ableitungen ist

⁵ Nach Angabe von G. Loria: Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven, 2. Aufl., Bd. I, Nr. 138, Leipzig, 1910, hat sich B. Habenicht wiederholt mit der Aufgabe beschäftigt, die Umrisse von Pflanzenblättern durch analytische Kurven zu beschreiben; er bediente sich hierbei meist gewisser Polargleichungen, die höhere Radlinien, und zwar „rosenartige“ (H. R., Abschn. 9) darstellen.

4. Radlinien mit vorgeschriebenen Singularitäten.

Besitzt die vorgelegte Linie bestimmte Singularitäten — insbesondere Spitzen, Flachpunkte usw. —, so wird man dieselben bei der angenäherten Wiedergabe durch höhere Radlinien nach Möglichkeit zu berücksichtigen haben. Bestimmte Vorschriften hierzu lassen sich allerdings kaum entwickeln, sondern es wird eines gewissen Fingerspitzengefühls zur Erledigung der Aufgabe bedürfen.⁸

Als Beispiel soll das Aufsuchen einer Radlinie von der charakteristischen Gestalt der Hysteresis gezeigt werden.

Es handelt sich hierbei bekanntlich um eine geschlossene, zentrisch-symmetrische Kurve mit zwei Schnabelspitzen und zwei Wendepunkten als sichtbaren Besonderheiten (Abb. 2).

es vielleicht durchsichtiger und bequemer, die Potenzreihenentwicklung heranzuziehen; diese beginnt an der Stelle $\varphi = 0$ mit

$$z = (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) + i \varphi (a_1 - a_2 + 3 a_3 - 3 a_4) - \\ - \frac{1}{2} \varphi^2 (a_1 + a_2 + 9 a_3 + 9 a_4) - \frac{i}{6} \varphi^3 (a_1 - a_2 + 27 a_3 - 27 a_4) + \dots \quad (22)$$

Mit Rücksicht auf die Schnabelspitze darf diese Entwicklung — abgesehen von dem konstanten Glied — tatsächlich erst mit φ^2 beginnen und imaginäre Bestandteile erst ab φ^4 enthalten. Dies liefert folgende sechs Gleichungen für die acht Komponenten der Koeffizienten $a_v = a_v' + i a_v''$:

$$\left. \begin{aligned} a_1' + a_2' + a_3' + a_4' &= a, & a_1'' + a_2'' + a_3'' + a_4'' &= b, \\ a_1' - a_2' + 3 a_3' - 3 a_4' &= 0, & a_1'' - a_2'' + 3 a_3'' - 3 a_4'' &= 0, \\ a_1' - a_2' + 27 a_3' - 27 a_4' &= 0, & a_1'' + a_2'' + 9 a_3'' + 9 a_4'' &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Nach Einführung der reellen Hilfsparameter $c/2 = a_3' = a_4'$ und $d = a_4'' - a_3''$ lassen sich die gesuchten Koeffizienten dann darstellen durch

$$a_{1,2} = \frac{1}{2} (a - c) + \frac{3i}{16} (3b \pm 8d), \quad a_{3,4} = \frac{1}{2} c - \frac{i}{16} (b \pm 8d). \quad (24)$$

Sie führen nach Aufspaltung von (21) in Real- und Imaginärbestandteil schließlich auf die folgenden Parametergleichungen der Kurve:

$$x = (a - c) \cos \varphi + c \cos 3 \varphi - d (3 \sin \varphi - \sin 3 \varphi), \\ y = \frac{b}{8} (9 \cos \varphi - \cos 3 \varphi). \quad (25)$$

Vor der zahlenmäßigen Festlegung der Systemparameter muß deren Bedeutung geklärt werden: a und b fixieren laut Annahme als Koordinaten die Schnabelspitzen und können als positiv vorausgesetzt werden. Die Größe c beeinflusst die Form des „Skeletts“ der Kurve, denn für $d = 0$ liegt eine Doppelkurve vor, und zwar eine kubische Parabel, deren Wendepunkt im Ursprung liegt ($\varphi = \pm \pi/2$); die Steigung der Wendetangente beträgt $3b/2(a - 4c)$ und man wird verlangen, daß sie zwischen b/a und ∞ liegt; dies ergibt für c die Einschränkung

$$-a/8 < c < a/4,$$

wodurch gleichzeitig gewährleistet ist, daß die Spitze $\varphi = 0$ in Richtung der positiven x -Achse weist. — Der Parameter d schließlich regelt die Dicke der Hysteresis, gibt also das „Fleisch“; zu $\varphi = \pm \pi/2$ gehören die Punkte $(\mp 4d, 0)$ auf der x -Achse; da diese im Intervall $\pm a$ liegen sollen, wird man auf jeden Fall

$$0 < d < a/4$$

verlangen.

Unter diesen Voraussetzungen stellt (25) wirklich eine Kurve mit dem charakteristischen Gepräge der Hysteresis dar. Es handelt sich gemäß H. R., Abschn. 5, um eine elliptische Innenradlinie 6. Ordnung und 6. Klasse, die außer den beiden Schnabelspitzen noch zwei imaginäre Spitzen im Unendlichen mit der Ferngerade als gemeinsamer Tangente besitzt. Abb. 2 zeigt ihr Aussehen für die spezielle Konstantenwahl $a : b : c : d = 12 : 12 : 2 : 1$.

(Eingegangen am 4. Mai 1948.)