

Raumkurven, die pseudogeodätische Linien zweier Kegel sind.

Von W. Wunderlich, Wien
Mit 3 Abbildungen.
(Eingelangt am 27. Juli 1949.)

I. Einleitung.

Unter den „pseudogeodätischen“ Linien¹, einer Fläche werden jene Flächenkurven verstanden, deren Schmiegebene unter einem festen Winkel γ gegen die Trägerfläche geneigt sind. Diese Linien vermitteln sozusagen den Übergang von den *echten Geodätischen* ($\gamma = \pi/2$) zu den *Haupttangential-* oder *Asymptodenkurven* ($\gamma = 0$) der Fläche. Sie sind offenbar auch dadurch ausgezeichnet, daß längs ihres ganzen Verlaufes die geodätische und die wahre Torsion übereinstimmen.

Daß das Studium dieser bisher kaum beachteten Flächenkurven durchaus lohnend sein kann, geht aus zwei Abhandlungen des Verfassers hervor, die den pseudogeodätischen Linien von Zylindern¹, bzw. Kegeln² gewidmet sind und speziell bei den Drehflächen unter diesen eine Fülle von bemerkenswerten Beziehungen aufgedeckt haben. —

Sei k die Pseudogeodätische eines *Kegels* mit dem Scheitel O . Transformieren wir ihre Tangenten mittels des Polarsystems einer *Kugel* um O , so erhalten wir die Tangenten einer neuen Kurve l , die die Erzeugenden ihres Verbindungskegels mit O unter konstantem Winkel durchsetzt; der zu einer Tangente t von k gehörigen Schmiegebene σ , bzw. Kegeltangentialebene τ entsprechen nämlich als Pole der Berührungskegel S , bzw. der Fernpunkt T der reziproken Tangente \bar{t} , und es ist $SOT = \not\propto \sigma \tau = \gamma$. Damit haben wir einen für das Folgende

¹ Pseudogeodätische Linien auf Zylinderflächen. Sitz.-Ber. Ak. Wiss., Wien (im Druck). Vorankündigung im Akad. Anzeiger Nr. 7 (1948).

² Pseudogeodätische Linien auf Kegelflächen. Sitz.-Ber. Ak. Wiss., Wien (im Druck). Vorankündigung im Akad. Anzeiger Nr. 9 (1949).

grundlegenden Zusammenhang mit den Kegel- oder Bündelloxodromen hergestellt:

Satz 1. *Wird eine Kegolloxodrome l an einer Kugel um den Kegel-scheitel O polarisiert, so entsteht eine Pseudogeodätische auf einem anderen von O ausstrahlenden Kegel; der Schnittwinkel von l und die Schnieg-ebenenneigung von k stimmen überein. Alle Kegelpseudogeodätischen lassen sich auf diese Weise gewinnen².*

Unter den Kegolloxodromen — von denen man übrigens nicht allzu viel weiß — nehmen nun jene Raumkurven eine besondere Stellung ein, welche Loxodromen zweier Kegel sind. Sie sind von E. Cesáro und neuerdings auch vom Verfasser betrachtet worden und erfreuen sich zahlreicher ausgezeichneter Eigenschaften³. Unter diesen Umständen liegt es nicht allzu fern, analog nach jenen Raumkurven zu fragen, welche Pseudogeodätische zweier Kegel sind. Dieses Problem wird in der vorliegenden Arbeit vollständig gelöst. Den Schlüssel zur Behandlung liefert der vorhin ausgesprochene Satz 1.

Wenn diese „bikonischen Pseudogeodätschen“ auch in keinem unmittelbaren Zusammenhang mit den erwähnten „polykonalen Loxodromen“ stehen, so sind sie doch ebenfalls durch eine Reihe bemerkenswerter geometrischer Eigenschaften auszeichnet, und ebenso die zu ihnen polaren Kegolloxodromen. Als Sonderformen werden unter den in Frage stehenden Kurven die echten Geodätschen auf Drehflächen 2. Grades zu finden sein, die sich als Pseudogeodätische auf den Verbindungskegeln mit den beiden Flächenbrennpunkten erweisen, wie auch schon an anderem Orte bemerkt wurde⁴.

Raumkurven, die gleichzeitig Pseudogeodätische eines Kegels und eines Zylinders sind, lassen sich durch einen Grenzprozeß aus dem

² E. Cesáro, *Analisi intrinseca delle eliche policoniche*. Rend. acc. sci. fis. mat. Napoli, ser. III, **9** (1903).

³ W. Wunderlich, Über die polykonischen Loxodromen. Ann. di mat. (im Druck).

Diese Kurven erweisen sich übrigens als Loxodromen dreier Kegel (von denen einer in einem Zylinder ausarten kann). Zu ihnen zählen als wichtige Sonderfälle die sphärischen Kegolloxodromen und die Böschungslinien auf Drehflächen 2. Grades mit lotrechter Achse.

⁴ Vgl. den Bericht über den Vortrag des Verfassers „Über einen Zusammenhang der sphärischen Bündelloxodromen mit den geodätischen Linien auf Drehflächen 2. Grades“. Nachr. Österr. Math. Ges., Nr. 6 (1949). Eine ausführliche Darstellung wird der demnächst erscheinende Aufsatz „Über die Nyströmische Strahlkongruenz und die geodätischen Linien der Flächen 2. Grades“ (Soc. Sci. Fennica) enthalten.

Ergebnissen der vorliegenden Arbeit ableiten. Aus verschiedenen Gründen erscheint jedoch eine gesonderte Behandlung dieser Grenzformen zweckmäßiger und soll binnen kurzen folgen. Die Frage nach Raumkurven, die pseudogeodätische Linien zweier Zylinder sind, wurde a. a. O.¹ bereits in negativem Sinne beantwortet. — Kombinierte Fragestellungen, wie etwa nach Raumkurven, die Pseudogeodätische eines Kegels und Loxodromen eines anderen sind, sind noch offen und könnten möglicherweise gleicherweise gleichfalls eine Untersuchung lohnen.

II. Perspektiv-kollineare Loxodromenpaare.

Sei k eine *bikonische Pseudogeodätische* — deren Existenz wir vorläufig vorwegnehmen — mit den Schmiegebenenneigungen γ_1 und γ_2 . Schlagen wir um die Kegelscheitel O_1 und O_2 , die Einheitskugeln Q_1 und Q_2 , und suchen wir bezüglich derselben die Pole S_1 und S_2 der Schmiegebenen σ von k auf, so durchlaufen diese Punkte gemäß Satz 1 je eine *Loxodrome* l_1 und l_2 der Strahlbündel O_1 und O_2 mit den konstanten Schnittwinkeln γ_1 , bzw. γ_2 .

Denken wir uns den gesamten Ebenenraum $\Sigma(\sigma)$ einmal durch die Polarität \mathfrak{P}_1 vom Q_1 und ein anderesmal durch die Polarität \mathfrak{P}_2 von Q_2 transformiert, so erhalten wir zwei kollineare Punkträume $\Sigma_1(S_1)$ und $\Sigma_2(S_2)$. In dieser *Kollineation* $\mathfrak{P}_2 \mathfrak{P}_1$ entsprechen einander auch die beiden Loxodromen l_1 und l_2 . Da die Strahlen $O_1 S_1$ und $O_2 S_2$ beide zu σ normal sind, sind sie untereinander parallel und können durch die Parallelverschiebung $\mathcal{E} = O_2 \rightarrow O_1$ zur Deckung gebracht werden (Abb. 1). Denken wir uns wiederum das ganze System $\Sigma_2(S_2)$ um diesen Betrag $O_1 O_2 = h$ verschoben, dann hängt die Neulage $\Sigma'_2(S'_2)$ mit dem ersten System $\Sigma_1(S_1)$ durch eine *perspektive Kollineation* $\mathfrak{F} = \mathfrak{G} \mathfrak{P}_2 \mathfrak{P}_1$ zusammen, weil die Paare entsprechender Punkte S_1, S'_2 durch Strahlen des Bündels $O_1 = O'_2$ gekoppelt sind. Die Kollineationsebene wird von der zu $O_1 O_2$ normalen Durchmesserebene α_1 von Q_1 dargestellt, denn in dieser fallen tatsächlich die von den zu $O_1 O_2$ parallelen Ebenen σ herführenden Punktpaare S_1, S'_2 zusammen.

Die Frage nach der Existenz der Kurven k ist damit zurückgeführt auf die Frage nach Paaren l_1, l_2' von Loxodromen des Bündels O_1 , die

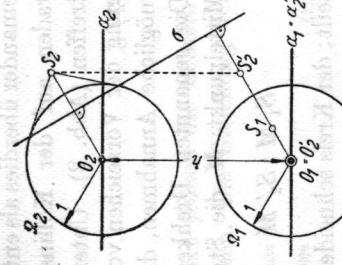


Abbildung 1. perspektive Kollineation von Loxodromenpaaren

einander in einer bestimmten Kollineation \mathfrak{S}_1 mit dem Zentrum O_1 entsprechen.

Machen wir O_1 zum Ursprung eines räumlichen Normalkoordinatensystems x, y, z , in welchem dem Punkt O_2 die Koordinaten $(0, 0, h)$ zukommen, so werden die *Polaritäten* \mathfrak{P}_1 und \mathfrak{P}_2 beschrieben durch

$$x_1 x + y_1 y + z_1 z = 1 \text{ und } x_2 x + y_2 y + (z_2 - h)(z - h) = 1. \quad (1)$$

Koeffizientenvergleich liefert die Gleichungen der Kollineation \mathfrak{P}_2 , \mathfrak{P}_1 , aus welchen nach Hinzunahme der Schiebung \mathfrak{S} ($x_2' = x_2$, $y_2' = y_2$, $z_2' = z_2 - h$) die Darstellung der *Zentralkollination* $\mathfrak{F} = \mathfrak{C} \mathfrak{P}_2 \mathfrak{P}_1$ fließt:

$$x_2' = \frac{x_1}{1 - hz_1}, \quad y_2' = \frac{y_1}{1 - hz_1}, \quad z_2' = \frac{z_1}{1 - hz_1}. \quad (2)$$

Wenden wir uns nunmehr wieder dem *Loxodromenpaar* l_1, l_2' zu. Durch Annahme eines Kurvenpunktes $S_1(x_1, y_1, z_1)$ ist sein zugeordneter Punkt $S_2'(x_2', y_2', z_2')$ mitbestimmt. Die zugehörigen Tangenten t_1 und t_2' sind auf Grund der bekannten Loxodromenwinkel γ_1 und γ_2 an zwei Drehkegel mit der gemeinsamen Achse $O_1 S_1 = O_1 S_2'$ gebunden und müssen einander überdies als entsprechende Geraden auf der Kollineationsebene α_1 treffen (Abb. 2). Unter Berücksichtigung der Vorzeichen von γ_1 und γ_2 ergeben sich damit für t_1 nur zwei mögliche Annahmen, die folgendermaßen konstruiert werden können: Die genannten Drehkegel haben einen Parallelkreis gemein, dessen Mittelpunkt M die Strecke $S_1 S_2'$ im Verhältnis

$$S_1 M : S_2' M = \cot \gamma_1 : \cot \gamma_2 = m : n \text{ (mit } m - n = 1) \quad (3)$$

teilt; der Kreis schneidet die Ebene α_1 in zwei Punkten A , durch welche die beiden brauchbaren Lagen von t_1 (und t_2') gehen.

Jeder Raumpunkt S_1 bestimmt demnach mit dem zugehörigen Tangentenpaar t_1 zwei Linienelemente. Die in der so erklärten dreifach ausgedehnten Elementmannigfaltigkeit erhaltenen ∞^2 Elementvereine stellen dann die zu den Angabestücken $O_1, O_2, \gamma_1, \gamma_2$ gehörigen Bündelloxodromen l_1 dar, die über die Kugelpolarität \mathfrak{P}_1 die gesuchten bikonischen Pseudogeodätischen liefern.

Auf Grund der drehsymmetrischen Anordnung bezüglich z lassen sich unsere ∞^3 Linienelemente (S_1, t_1) zu je ∞^2 auf ∞^1 Drehflächen Φ_1 verteilen, deren Bestimmung das erste Ziel sein muß. Beschränken wir uns hierbei auf die Betrachtung des Meridiants in der xz -Ebene, so finden wir über den Kreismittelpunkt $M (mx_2' - nx_1, 0, mz_2' - nz_1)$ als Gleichung der Kreisebene

$$xx_1 + zz_1 = \frac{m(x_1^2 + z_1^2)}{1 - hz_1} - n(x_1^2 + z_1^2). \quad (4)$$

Der Schnitt mit der Kollineationsebene $\alpha_1 (z = 0)$ liefert dann die Abszisse x_0 von A , und damit ergibt sich schließlich die Differentialgleichung der Meridiankurve

$$\frac{dz}{dx} = \frac{z}{x - x_0} = \frac{x(hz - 1)}{z + h(mx^2 + nz^2)}. \quad (5)$$

in welcher der Index 1 fortgelassen wurde.

Die Integration dieser Gleichung gelingt nach Einführung des Radiusvektors R mittels $R^2 = x^2 + z^2$, weil sie dann die einfache Gestalt mit getrennten Variablen

$$\frac{dR}{R} = \frac{m \frac{dz}{dx}}{z + h(1/h)} \quad (6)$$

annimmt. Die Lösung lautet

$$R = C \cdot (z - \frac{1}{h})^m. \quad (7)$$

Es bedeutet keine Einschränkung, erleichtert jedoch die Schreibweise, wenn wir im folgenden stets $h = 1$ setzen. Die Gleichung der Drehflächen Φ_1 lautet dann

$$x^2 + y^2 + z^2 = C^2 (z - 1)^{2m} \quad (8)$$

$$\text{mit } m = \frac{\cot \gamma_1}{\cot \gamma_1 - \cot \gamma_2} = \frac{\cos \gamma_1 \sin \gamma_2}{\sin(\gamma_2 - \gamma_1)}.$$

Hierin sind für C unter Umständen auch imaginäre Werte zugelassen.⁵

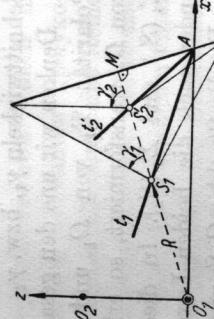


Abb. 2.

⁵ Die zu Φ_1 kollinearen Trägerflächen Φ_2' der Loxdromen l_1' sind natürlich von analoger Bauart. Ihre Gleichung läßt sich aus (8) mittels der Transformation (2) ableiten; statt $2m$ erscheint dann der Exponent $-2n$.

Das Aussehen solcher Flächen wird durch Abb. 3 für den Fall $m = -1/2$ illustriert. Abschnitt V geht auch noch auf andere besondere Annahmen ein.

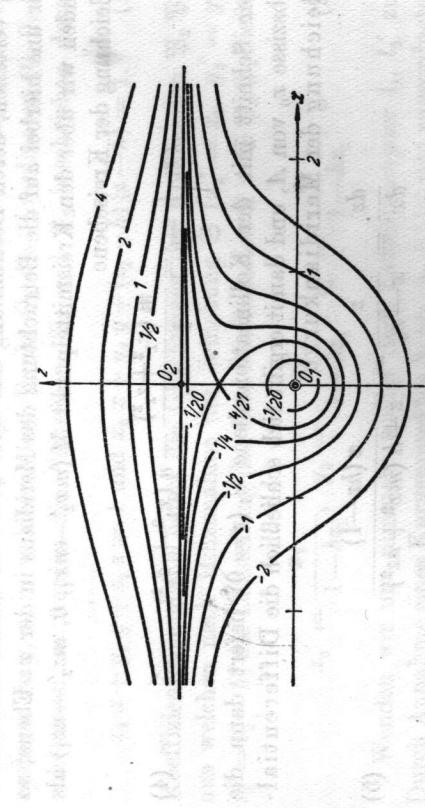


Abb. 3. Büschel von kubischen Drehflächen Φ_1 für die Annahme $m = -1/2$, dargestellt durch $(x^2 + y^2 + z^2)(z - 1) = \text{const.}$ Die Bezeichnung erfolgte nach dem Wert der Konstanten.

Der nächste Schritt besteht nun in der Bestimmung der Loxodromen l_1 , was darauf hinauskommt, Isogonaltrajektorien des Strahlbündels O_1 zu finden, die auf einer Drehfläche Φ_1 verlaufen.

Vollziehen wir mittels $x = r \cos \varphi$ und $y = r \sin \varphi$ den Übergang zu Zylinderkoordinaten r, φ, z , so gelten für das Bogenelement ds der gesuchten Bündelloxodrome mit dem vorgeschriebenen Schnittwinkel γ_1 die Beziehungen

$$ds^2 = (r d\varphi)^2 + dr^2 + dz^2, \quad ds = dR / \cos \gamma_1. \quad (9)$$

Drücken wir hierin r und R vermöge

$$r^2 + z^2 = R^2 = C^2 (z - 1)^{2m} \quad (10)$$

durch die als Parameter aufgefaßte Veränderliche z aus, so erfordert die Berechnung von φ nur eine einfache Quadratur. Unter Verzicht auf die etwas umständliche Zwischenrechnung notieren wir gleich das Ergebnis, in welchem wieder stellenweise n für $m - 1$ steht:

$$\varphi = \pm C \int \frac{\sqrt{C^2 m^2 \operatorname{tg}^2 \gamma_1 (z - 1)^{2m} - (m^2 \operatorname{tg}^2 \gamma_1 + n^2) z^{2n} - 2n z^{n-1}}}{C^2 (z - 1)^{2m} - z^2} (z - 1)^n dz \quad (11)$$

Eine elementare Auswertung des Integrals ist nur für $m = 0$ oder 1 möglich; elliptische Integrale treten in den Fällen $m = -1, -1/2, 1/2, 3/2$ und 2 auf (vgl. hierzu Abschnitt V).

Beachten wir im Hinblick auf (3), daß durch die Angabe der Zahl m der Betrag des Winkels γ_1 keineswegs festgelegt ist, so daß wir diesen — wenigstens innerhalb gewisser Grenzen — noch wählen können, so erkennen wir, daß durch (11) sämtliche auf der Drehfläche Φ_1 verlaufenden Loxodromen des Ursprungsbündels dargestellt werden. Es gilt mithin

Satz 2. Sämtliche ∞^2 auf einer Drehfläche $r^2 = C^2 (z - 1)^{2m} - z^2$ verlaufenden Loxodromen des Ursprungsbündels werden durch die Gleichungen (11) beschrieben und haben die merkwürdige Eigenschaft, durch eine bestimmte Zentralelliptizität in andere Loxodromen desselben Bündels verwandelt zu werden. Die Kollinearität muß nur den Ursprung $O_1 (r = z = 0)$ zum Zentrum und die Ebene $z = 1$ zur Verschwindungsebene haben. Zusammengehörige Schnittwinkel γ_1 und γ_2 hängen durch die Beziehung $\cot \gamma_1 : \cot \gamma_2 = m : (m - 1)$ zusammen.

III. Rotationskongruenz der Loxodromentangenten.

Die Annahme der beiden Winkel γ_1 und γ_2 hat uns im vorigen Abschnitt auf ein durch Gleichung (8) dargestelltes Büschel von Drehflächen geführt, welche die ∞^2 Loxodromen l_1 tragen. Greifen wir durch Verfüigung über die Konstante C^2 eine bestimmte dieser Drehflächen heraus und betrachten wir die auf dieser Fläche Φ_1 befindliche Drehschar von ∞^1 Loxodromen l_1 , so erfüllen die ∞^2 Loxodromentangenten t_1 eine gewisse Rotationskongruenz Ω_1 , für welche Φ_1 den einen Mantel der Bremfläche abgibt. Auch der zweite Mantel wird natürlich eine Drehfläche sein, die jetzt bestimmt werden soll.

Wir ermitteln zunächst die Gleichung jenes *Dreihyperboloides* A_1 , das sich durch Zusammenfassung aller Loxodromentangenten längs eines Parallelkreises (r_1, z_1) von Φ_1 ergibt. Zu diesem Zweck ersetzen wir vorerst Φ_1 durch die längs des Parallelkreises berührende Kugel K . Da deren Mittelpunkt auf der Achse um den Betrag $r_1 \dot{r}_1$ über dem Bezugskreis liegt, können wir ihre Gleichung unmittelbar durch

$$x^2 + y^2 + [z - (z_1 + r_1 \dot{r}_1)]^2 = r_1^2 + (r_1 \dot{r}_1)^2 \quad (12)$$

ansetzen; drücken wir hierin r_1^2 vermöge (10) durch R_1 und z_1 aus, so nimmt die Gleichung die Gestalt

$K \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2 R_1 R_2 (z - z_1) - R_1^2 = 0$ (12)
an, wobei $R_1 = C(z_1 - 1)^m$ ist und der Punkt die Ableitung nach z_1 andeutet. — Das berührende Hyperboloid \mathcal{A} läßt sich dann sicherlich darstellen durch

$$\mathcal{A} \equiv K - \lambda (z - z_1)^2 = 0,$$

Nun stellt die linke Seite aber das Quadrat des Bogenelementes $ds_1 = dR_1 \sec \gamma_1$ dar, woraus $\lambda = \dot{R}_1^2 \sec^2 \gamma_1$ folgt. Damit ergibt sich die gewünschte Gleichung des *Hyperboloides* schließlich mit

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \equiv & x^2 + y^2 + z^2 - C^2 (z_1 - 1)^{2m-2} [m^2 \sec^2 \gamma_1 (z - z_1)^2 + \\ & + 2 m (z_1 - 1) (z - z_1) + (z_1 - 1)^2] = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Die beiden Brennflächenmäntel unserer Linienkongruenz \mathfrak{L}_1 sind nun identisch mit dem Hüllgebilde der Hyperboloiden \mathcal{A} für veränderliches z_1 . Zur Berechnung ist die Gleichung (13) nach dem Parameter z_1 partiell zu differenzieren; dies führt nach Kürzung durch $(z_1 - 1)^{2m-3}$ und Abspaltung des Faktors $z - z_1$ — wodurch die 1. Brennfläche Φ_1 ausgeschieden wird — auf die Bedingung

$$z - z_1 = \frac{m - (2m-1) \cos^2 \gamma_1}{m(m-1)} (z_1 - 1), \quad (14)$$

die die 2. Brennfläche kennzeichnet. Diese Beziehung läßt sich mit Benützung von (3) auf die symmetrische Gestalt

$$\frac{z - 1}{z_1 - 1} = \frac{m}{n} \sin^2 \gamma_1 + \frac{n}{m} \cos^2 \gamma_1 = \frac{\sin \gamma_1 \cos \gamma_1}{\sin \gamma_2 \cos \gamma_2} \quad (15)$$

bringen.

Die Gleichung der 2. Brennfläche Ψ_1 finden wir nun durch Elimination des Parameters z_1 aus (13) und (14). Führen wir zu diesem Zwecke in (13) statt $z - z_1$ zunächst die proportionale Größe $z_1 - 1$ mittels (14) ein, so nimmt die eckige Klammer die Gestalt

$$[] = \frac{\operatorname{tg}^2 \gamma_1}{n^2} (m^2 \sin^2 \gamma_1 + n^2 \cos^2 \gamma_1) (z_1 - 1)^2 = \frac{\sin^2 \gamma_1}{\cos^2 \gamma_2} (z_1 - 1)^2$$

an; nummehr läßt sich mittels (15) leicht der Übergang von $z_1 - 1$ zu $z - 1$ vollenziehen, was auf die Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 = D^2 (z - 1)^{2m} \text{ mit } D = \frac{\sin^m \gamma_2 \cos^n \gamma_2}{\sin^n \gamma_1 \cos^m \gamma_1} C \quad (16)$$

führt. Da die Bauart mit jener der Gleichung (8) von Φ_1 übereinstimmt, ergibt sich die überraschende Feststellung, daß beide Brennflächen der Tangentenkongruenz \mathfrak{L}_1 von gleicher Art sind und demselben Büschel (8) angehören.

Die Gleichberechtigung der beiden Flächen Φ_1 und Ψ_1 geht jedoch auf Grund der symmetrischen Bauart der Formeln (15) und (16) noch weiter: Setzen wir nämlich an Stelle der ursprünglichen Winkel γ_1 und γ_2 die Winkel $\delta_1 = 90^\circ - \gamma_2$ und $\delta_2 = 90^\circ - \gamma_1$, so führen diese zunächst gemäß (3) auf dieselben charakteristischen Exponenten m und n ; zeichnen wir hierauf in dem zugehörigen Büschel (8) durch die Konstante D die Fläche Ψ_1 aus und betrachten wir die Tangentenkongruenz der auf ihr verlaufenden Bindelloxodromen mit dem Schnittwinkel δ_1 , so erweist sich dieselbe mit der Kongruenz \mathfrak{L}_1 als identisch, da zufolge (16) Φ_1 als 2. Brennfläche auftritt und zusammengehörige Parallelkreise einander wieder durch (15) zugeordnet sind.

Sind S_1 und T_1 die Berührungspunkte eines Kongruenzstrahls t_1 mit Φ_1 und Ψ_1 (also die beiden „Brennpunkte“), so erscheinen die von S_1 , bzw. T_1 begrenzten Halbstrahlen zufolge der Loxodromeneigenschaft aus dem Ursprung O_1 unter den Gesichtswinkeln γ_1 , bzw. δ_1 . Die Brennstrecke $S_1 T_1$ erscheint daher unter dem konstanten Gesichtswinkel $\omega = \delta_1 - \gamma_1 = 90^\circ - (\gamma_1 + \gamma_2)$!

Zusammenfassend können wir sagen:

Satz 3. Sämtliche Tangenten der ∞^1 Loxodromen, die auf einer Drehfläche Φ_1 mit der Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = C^2 (z - 1)^{2m}$ verlaufen und die Strahlen des Ursprungsbündels unter dem festen Winkel γ_1 schneiden, berühren eine zweite gleichartige Fläche Ψ_1 mit der Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = D^2 (z - 1)^{2m}$ und bilden auch auf dieser die Tangenten einer Drehsschar von Loxodromen, die das Ursprungsbündel unter einem festen Winkel δ_1 durchsetzen. Die Tangentenstrecken werden aus dem Ursprung unter dem konstanten Winkel $\delta_1 - \gamma_1$ gesehen. Die Konstanten sind durch die Relationen $\operatorname{tg} \gamma_1 \operatorname{tg} \delta_1 = n/m$ (mit $n = m - 1$) und $C : D = \sin^n \gamma_1 \cos^m \gamma_1 : \sin^m \delta_1 \cos^m \delta_1$ verknüpft.

Da sich die Winkel γ_1 und δ_1 offenbar so bestimmen lassen, daß der Quotient $C : D$ einen vorgegebenen Wert annimmt, so gilt auch umgekehrt:

Satz 4. Die gemeinsamen Tangenten zweier Drehflächen $(x^2 + y^2 + z^2) (z - 1)^p = \text{const}$ bilden oder enthalten eine zweifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit von Strahlen, deren Berührungsstrecken aus dem Ursprung unter unveränderlichem Geschwindigkeitswinkel erscheinen. Aus ihnen lassen sich Torsen aufbauen, deren Gratlinien Loxodromen des vom Ursprung ausgedehnten Strahlbindels sind.

Lassen wir im besonderen die beiden Flächen Φ_1 und Ψ_1 zusammenrücken, indem wir $\gamma_1 = \delta_1$ machen, so werden aus den gemeinsamen Tangenten die Haupttangentialen der Fläche Φ_1 , und wir erhalten eine Aussage über deren Asymptotenlinien⁶:

Satz 5. Die Asymptotenlinien (Haupttangentialenkurven) der Drehflächen $x^2 + y^2 + z^2 = C^2 (z - 1)^{2m}$ sind Loxodromen des Ursprungsbündels, dessen Strahlen sie unter dem festen Winkel $\gamma_1 = \arctg \sqrt{n/m}$ durchsetzen.

Dieser Satz gestattet übrigens einen gewissen Rückschluß auf die Gestalt der Drehflächen im Falle $0 < m < 1$: In diesem Fall wird der Winkel γ_1 imaginär, die Asymptotenlinien können daher nicht reell sein und die Flächen — soweit sie reell sind — können nur elliptische Punkte haben. Da der reelle Zug ganz im Endlichen verläuft, und singularitätenfrei ist, hat er die Gestalt eines geschlossenen Owls.

IV. Die bikonischen Pseudogeodätischen.

Die Lösung des eingangs aufgeworfenen Problems ergibt sich nun gemäß Abschnitt II unmittelbar durch Ausübung der Polarität \mathfrak{P}_1 an der Kugel $\Omega_1 (x^2 + y^2 + z^2 = 1)$. Hierdurch werden ja die durch (11) beschriebenen Kegelloxodromen l_1 in die Tangentenflächen der gesuchten pseudogeodätischen Linien k zweier Kegel transformiert; die Punkte von k gehen dabei aus den Schmiegebenen von l_1 hervor.

Von der expliziten Durchführung dieser Transformation soll abgesehen werden, da die analytische Darstellung der Ergebnisse recht unübersichtlich ist.

Aus dem Flächenbüschel (8), das die Trägerflächen Φ_1 der Loxodromen l_1 und die Stützflächen Ψ_1 ihrer Tangenten und Schmiegebenen enthält, wird eine Flächenschar, der nunmehr die Trägerflächen $\bar{\Psi}$ der Pseudogeodätischen k und die Stützflächen $\bar{\Phi}$ der Tangenten und

⁶ Daß nicht etwa Doppelkongruenzen entstehen, geht aus Gleichung (15) hervor, deren rechte Seite den Wert 1 annimmt, so daß $z = z_1$ wird, also die Berührungs punkte S_1 und T_1 der ursprünglichen Tangente tatsächlich zusammenrücken.

Schmiegebenen von k angehören. Auch diese Drehflächen werden durch die Gleichung (8) beschrieben, wenn wir die Punktkoordinaten x, y, z durch die Ebenenkoordinaten u, v, w ersetzen, die als Koeffizienten der in der Gestalt $u \cdot x + v \cdot y + w \cdot z = 1$ angeschriebenen Ebenengleichung erklärt sind. Die Gleichung in Punktkoordinaten (Zylinderkoordinaten r, z) läßt sich im allgemeinen nur in Parameterform angeben und lautet dann

$$r = \frac{\pm \sqrt{C^2 (\zeta - 1)^{2m} - \zeta^2}}{C^2 (\zeta - 1)^{2m-1} (n \zeta + 1)}, \quad z = \frac{m C^2 (\zeta - 1)^{2m-1} - \zeta}{C^2 (\zeta - 1)^{2m-1} (n \zeta + 1)}. \quad (17)$$

Die in Abschnitt III betrachtete Tangentenkongruenz \mathfrak{L}_1 mit den Brennflächen Φ_1 und Ψ_1 wird durch die Kugelpolarität \mathfrak{P}_1 in eine andere Strahlenkongruenz $\bar{\mathfrak{L}}$ verwandelt, die die Brennflächen $\bar{\Phi}$ und $\bar{\Psi}$ besitzt. Aus der in Satz 3 festgehaltenen Tatsache, daß die Berührungsstrecke $S_1 T_1$ jedes Strahles aus \mathfrak{L}_1 vom Ursprung aus unter dem konstanten Winkel $\omega = 90^\circ - (\gamma_1 + \gamma_2)$ erscheint, folgt nunmehr für die Strahlen aus $\bar{\mathfrak{L}}$, daß ihre Brennebenen einen konstanten Winkel einschließen, denn diese sind ja mit den Polarebenen von S_1 und T_1 identisch.

Da die 1. Brennebene die Schmiegebene der Kurve k darstellt, die 2. Brennebene hingegen die Trägerfläche $\bar{\Psi}$ von k berührt, so folgt weiter, daß k eine pseudogeodätische Linie der Trägerfläche (mit der Schmiegeebenenneigung ω) ist⁷. Damit ist eine interessante Eigenschaft der bikonischen Pseudogeodätischen aufgedeckt:

Satz 6. Jede Raumkurve, die pseudogeodätische Linie zweier Kegelflächen ist, ist auch pseudogeodätische Linie einer Drehfläche, deren Achse die beiden Kegelseiteln verbindet. Die Summe der drei Schmiegenneigungen γ_1, γ_2 und ω beträgt einen rechten Winkel.

Die drei Flächen schneiden einander längs der Kurve unter durchwegs konstanten Winkeln.

Dual zu Satz 4 haben wir ferner den

Satz 7. Die gemeinsamen Tangenten zweier Drehflächen $(u^2 + v^2 + w^2)(w - 1)^p = \text{const}$ bilden oder enthalten eine zweifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit von Strahlen, deren Brennebenen (Berührungsgebene) einen festen Winkel einschließen. Die Grathlinien der aus ihnen aufgebauten

⁷ Während die Bestimmung der echten Geodätschen einer Drehfläche nach dem Satz von Clairaut auf eine Quadratur hinausläuft, erfordert die Bestimmung der Pseudogeodätschen die Auflösung einer Riccatischen Differentialgleichung.

Torsen sind pseudogeodätische Linien auf den Drehflächen und überdies auf je zwei Kegelflächen, die vom Ursprung bzw. vom Punkt +1 der z-Achse ausstrahlen.

Da die Haupttangenten polarer Flächen einander entsprechen, so folgt aus Satz 5 der

Satz 8. Die Asympotolinen (Haupttangentialkurven) der Drehflächen $v^2 + v^2 + w^2 = C^2 (w - 1)^{2m}$ sind Pseudogeodätische ihrer Verbindungskegel mit dem Ursprung und mit dem Punkt +1 der z-Achse; dieselben schneiden die Flächen unter den festen Winkeln $\gamma_1 = \arctg \sqrt{n/m}$, bzw. $\gamma_2 = 90^\circ - \gamma_1$.

Auch hier ist ein entsprechender Rückschluß auf die Gestalt der Drehflächen wie im Abschluß am Satz 5 möglich.

V. Sonderfälle.

Vor dem Eingehen auf besondere Annahmen soll noch ausdrücklich darauf hingewiesen werden, daß rationale Werte von m (und n) auf algebraische Trägerflächen Φ und $\bar{\Phi}$ führen, wie aus den Gleichungen (8), bzw. (17) zu ersehen ist. Die zugehörigen Loxodromen l , bzw. Pseudogeodätischen k bleiben hiervon jedoch unberührt und sind im allgemeinen transzendent.

Zur Bestimmung von *Ordnung* und *Klasse* der Drehflächen schreiben wir den rationalen Quotienten $m:n$ als gekürzten Bruch $\mu:\nu$ an. Eine nähere Untersuchung der Gleichungen (8) und (17) führt dann zu dem folgenden Ergebnis:

Satz 9. Im algebraischen Falle ($m:n = \mu:\nu$ rational; μ, ν ganz und teilerfremd) haben die Drehflächen Φ , welche die Loxodromen tragen, die Ordnung $M = \max(|\mu|, |\mu - \nu|, |\nu|)$ und die Klasse $N = 2 \max(|\mu|, |\nu|)$, falls die beiden Zahlen μ und ν ungerade sind; andernfalls sind die Werte zu verdoppeln.

Für die Trägerdrehflächen $\bar{\Phi}$ der Pseudogeodätischen vertauschen die Zahlen M und N ihre Bedeutung.

Zu reziproken Werten des Quotienten $m:n$, oder, was dasselbe ist, zu Werten von m , die einander auf +1 ergänzen, gehören (in Übereinstimmung mit Fußnote 5) kollineare Drehflächen Φ , hingegen gleichartige Flächen $\bar{\Phi}$. Die folgende Tabelle der Fälle $M \leq 6$ faßt zusammengehörige Paare jeweils in einer Zeile zusammen:

	m		n		M	N
0 ; 1	$\frac{1}{2}$		-1 ; 0		2	2
			$-\frac{1}{2}$		2	2
	$-\frac{1}{2}$; $\frac{3}{2}$		$-\frac{3}{2}$; $\frac{1}{2}$		3	6
	$\frac{1}{4}$; $\frac{3}{4}$		$-\frac{3}{4}$; $-\frac{1}{4}$		4	6
	-1 ; 2		-2 ; 1		4	8
	$\frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}$		$-\frac{2}{3}$; $-\frac{1}{3}$		6	8
	-2 ; 3		-3 ; 2		6	12

Zu einzelnen Fällen dieser Zusammenstellung sollen nun noch einige Bemerkungen gemacht werden.

1) $m = 0$: Pseudogeodätische Linien des Drehkegels.

Über die Bündelloxodromen l_1 läßt sich zunächst keine unmittelbare Aussage machen, da ihr Schnittwinkel γ_1 aufgabe (3) ein rechter ist und ihre Trägerflächen Φ_1 gemäß (8) *Kugeln* um den Ursprung O_1 sind, so daß sie vorläufig unbestimmt bleiben. Diese Unbestimmtheit ist jedoch bei den perspektiv-kollinearne Loxodromen l'_2 nicht mehr vorhanden; dieselben verlaufen mit beliebig vorgebarem Schnittwinkel γ_2 auf *Drehflächen 2. Grades* Φ'_2 :

$$x^2 + y^2 + z^2 = C^2 (z + 1)^2, \quad (18)$$

die $O'_2 = O_1$ als Brennpunkt und $z = -1$ als gemeinsame Leitebene besitzen. Derartige Loxodromen sind aber wohlbekannt; Es handelt sich um die *Böschungslinien* der Quadranten Φ'_2 , deren Achse lotrecht zu denken ist⁸. Diesen Sachverhalt können wir sofort bestätigen, wenn wir die Stützfläche Ψ'_2 der Loxodromentangentenkongruenz von Φ'_2 aufsuchen: Bei sinngemäßer Anwendung von Satz 3 ($m = 1, \delta_1 = 0$) finden wir $D = \infty$; Ψ'_2 ist also ausgeartet, und zwar in einen gewissen *Fernkreis* l_2 , der von allen Loxodromentangenten getroffen wird. In der Tat besitzen alle Drehhyperbole Λ (13) dieselbe Fernkurve, dargestellt durch den Richtkegel

$$x^2 + y^2 = (C^2 \sec^2 \gamma_2 - 1) z^2. \quad (19)$$

Der Böschungswinkel β (Neigung gegen die *xy*-Ebene) ergibt sich, indem wir den Klammerausdruck mit $\cot^2 \beta$ identifizieren, mittels

$$\sin \beta = \frac{\cos \gamma_2}{C}. \quad (20)$$

⁸ A. E. Enneper, Zur Theorie der Curven doppelter Krümmung. Math. Ann. 19 (1882).

Nachträglich lassen sich nun auch die Loxodromen l_1 kennzeichnen: Ihre Tangenten treffen den zu l_2 kollinearen, in der Verschwindungs Ebene $z = 1$ liegenden, endlichen Kreis f_1 , der ebenfalls durch (19) beschrieben wird; die Berührungs Kreise der aus den Punkten von f_1 an die Trägerkugel Φ_1 legbaren Tangentenkugeln bilden eine Dreischar, die von den Kurven l_1 orthogonal durchsetzt wird; dieselben sind also sphärische Kreistraktrizien.⁹

Die zugehörigen, mit Hilfe der Kugelpolarität \mathfrak{P}_1 aus l_1 (oder mittels \mathfrak{P}_2 aus l_2) abgeleiteten Raumkurven sind einerseits wegen $\gamma_1 = 90^\circ$ echte Geodätische auf ihrem Verbindungskegel mit dem Ursprung O_1 , anderseits Pseudogeodätische mit der Schmiegebene Neigung γ_2 auf dem zu f_1 polaren, von O_2 ausstrahlenden Drehkegel mit der Öffnung 2β .

Diese Drehkegelpseudogeodätischen wurden a. a. O^2 eingehend untersucht, wobei zahlreiche interessante Eigenschaften und Beziehungen zu Tage traten. Erwähnt sei nur, daß bei Verbiegung eines Drehkegels zu einem anderen seine pseudogeodätischen Linien ihre charakteristische Eigenschaft konstanter Schmiegebene Neigung behalten, ferner daß sie sich als Kettenlinien in einem Neutinschen Schwerfeld deutlich lassen: Sie sind mit den Gleichgewichtslinien homogener Ketten identisch, die der Oberfläche eines vom Gravitationszentrum ausstrahlenden Drehkegels reibunglos anliegen.

2) $m = 1/2$: Geodätische Linien auf Drehflächen 2. Grades.

Die Trägerflächen Φ_1 der Bündelloxodromen l_1 haben die Gleichung

$$(21) \quad x^2 + y^2 + z^2 = C^2(z - 1),$$

sind also Kugeln eines hyperbolischen Büschels, dessen Nullkugelzentren im Ursprung O_1 und im Punkt $(0, 0, 2)$ liegen. Diesmal ist auch das Büschel der kollinearen Flächen Φ_2 von gleicher Art.

Die sphärischen Bündelloxodromen können als hinreichend bekannt angesehen werden. Sie wurden zum erstenmal von G. Pirowdini betrachtet¹⁰, der erkannt hatte, daß sie zu den polykonischen Loxodromen gehören; sie durchsetzen nämlich neben dem definierenden Strahlbündel auch noch jenes unter konstantem Winkel, dessen Scheitel zu dem des ersten invers liegt. Zufolge Satz 4 können sie als die Gratlinien jener (nichtkonischen) Torsen erklärt werden, die sich aus den gemeinsamen Tangenten zweier Kugeln aufbauen lassen; von diesem Gesichtspunkt aus wurden sie vom Verfasser betrachtet¹¹.

Durch Ausübung der Polarität an der Einheitskugel um O_1 geht das Kugelbüschel Φ_1 , das den von O_1 ausstrahlenden Minimalkegel enthält, in eine Schar von Drehflächen 2. Klasse $\bar{\Phi}$ über, unter denen sich der absolute Kegelschnitt befindet, die also konfokal sind; die gemeinsamen Brennpunkte sind O_1 und $O_2(0, 0, 1)$. Die zu den sphärischen Bündelloxodromen polaren bikonischen Pseudogeodätischen haben gemäß (3) in bezug auf die Verbindungskegel mit den Brennpunkten entgegengesetzte gleiche Schmiegebene Neigungen γ_1 und $\gamma_2 = -\gamma_1$

⁹ W. Wunderlich, Über die Schleppkurven des Kreises. Sitz.-Ber. Ak. Wiss., Wien 156 (1948).

¹⁰ G. Pirowdini, Sur les trajectoires isogonales des génératrices d'une surface développable. Crelles J. 118 (1897).

¹¹ W. Wunderlich, Über die Torsen, deren Erzeugenden zwei Kugeln berühren. Soc. Sci. Fennica, Comm. phys. math. 14 (1949). Vgl. auch den Vortragssbericht a. a. O.⁴

und sind auf Grund von Satz 6 wegen $\omega = 90^\circ - (\gamma_1 + \gamma_2) = 90^\circ$ (und in Übereinstimmung mit einem bekannten Satz von Chasles) echte Geodätische der Rotationsquadriken $\bar{\Phi}$.

Satz 10. Die geodätischen Linien einer Drehfläche 2. Grades sind Pseudogeodätische ihrer Verbindungskegel mit den Flächenbrennpunkten.

Dieser Sachverhalt, auf den bereits a. a. O.⁴ hingewiesen wurde, hatte ursprünglich den Anstoß zu der vorliegenden Untersuchung gegeben. Eine andere Verallgemeinerung dieser Eigenschaft (für die Geodätischen der allgemeinen Flächen 2. Grades) wird die in Fußnote 4 angekündigte Abhandlung enthalten.

$$3) m = -1/2.$$

Das Büschel der hierzu gehörigen kubischen Drehflächen Φ_1 ist in Abb. 3 dargestellt. Für die Meridianarkurven scheint es trotz der einfachen Definitionsgleichung $(x^2 + z^2)(z - 1) = \text{const}$ keinen eigenen Namen zu geben. Unter ihnen ist die rationale hervorzuheben, die sich für $C^2 = -4/27$ ergibt und die mit der Trisektrix von MacLaurin identisch ist; durch die Kollineation \mathfrak{P} wird sie in die Tschirnhaus-Kubik verwandelt¹². Die zugehörige polare Drehfläche $\bar{\Phi}$ entsteht durch Rotation der Kardioide um ihre Spitzentangente.

Aussagen der folgenden Art, die sich durch Spezialisierung der Sätze 5 und 8 ergeben, erscheinen außerhalb dieses Zusammenhangs recht auffällig:

Satz 11. Die Asymptotenlinien der kubischen Drehflächen, die durch Rotation einer Trisektrix von MacLaurin, bzw. einer Tschirnhaus-Kubik um die Symmetrieachse erzeugt werden, durchsetzen das vom außerordentlichen, bzw. ordinären Brennpunkt der Fläche ausgehende Strahlbündel unter konstanten Winkeln von 60° , bzw. 30° .

Satz 12. Die Asymptotenlinien der Drehfläche 4. Ordnung, die durch Rotation einer Kardioide um ihre Spitzentangente entsteht, sind pseudogeodätische Linien ihrer Verbindungskegel mit dem Mittelpunkt oder der Spitze; die festen Schnittwinkel dieser Kegel mit der Fläche betragen 60° , bzw. 30° .

$$4) m = 1/4.$$

Die Drehflächen Φ_1 , dargestellt durch

$$(22) \quad (x^2 + y^2 + z^2)^2 = C^4(z - 1),$$

sind von 4. Ordnung und besitzen längs des absoluten Kugelkreises eine Rückkehrkante. Die Flächen gehören zu den *Zyliden*, denn sie lassen sich auch durch Rotation von (allerdings imaginären) Kreisen erzeugen, und zwar auf sechs Arten: Jede Minimalebene, die die Fläche noch in einem endlichen Punkt D berührt – also einen der drei ordentlichen Brennpunkte der Fläche enthält – liefert eine Schnittlinie 4. Ordnung, die einen Doppelpunkt in D und eine Selbstoskulation im Berührungs punkt mit der Rückkehrkante aufweist, also in zwei Kegelschnitte zerfällt, die als „parabolische Kreise“ anzusehen sind.

¹² S. etwa H. Wieleitner, Spezielle ebene Kurven (Sammlg. Schubert 56, Leipzig 1908).

Die Trisektrix von MacLaurin ist eine Fußpunkt kurve der Parabel und gehört u. a. zu den Ährenkurven und den Araneiden.

Die Tschirnhaus-Kubik besitzt eine Parabel als Fußpunkt kurve, gehört u. a. zu den Sinus spiralen und tritt als Brennlinie der Parabel bei Parallelbeleuchtung auf.

Der Meridian der Drehfläche ist eine Quartik mit absoluten Spitzen, also ein *Cartesisches Oval*, allerdings ein spezielles, dadurch ausgezeichnet, daß die Spitzentangenten die Berührungspunkte der (einzigsten und natürlich isolierten) Domäntangenten enthalten.

In diesem Zusammenhang ist vielleicht der Hinweis nicht uninteressant, daß die in der Einleitung erwähnten „polykonalen Loxodromen“ auch auf Dreiflächen verlaufen, die durch Drehung eines Cartesischen Ovals um seine Achse entstehen; sie durchsetzen jeweils die drei Strahlbündel, die von den drei ordentlichen Brennpunkten ausgehen, unter festen Winkeln. Im Falle einer unserer Flächen Φ_1 tritt zu diesem ausgezeichneten Loxodromensystem noch das hier zur Untersuchung stehende hinzu, das zu dem vom außerordentlichen Brennpunkt ausstrahlenden Bündel gehört.

$$5) \ m = -1.$$

Die hier auftretenden Drehflächen Φ_1 sind ebenfalls von 4. Ordnung. Ihre Meridiane sind definiert durch die Bedingung $(x^2 + z^2)(z - 1)^2 = \text{const}$ und sind die Orte jener Punkte, deren Abstände von einem festen Punkt O_1 und von einer festen Geraden $z = 1$ ein konstantes Produkt haben; diese Kurven wurden von G. H. R. Koenigs genannt und ausführlich untersucht¹³. Hervorzuheben ist wieder die rationale unter ihnen, die sich für $C^2 = 1/16$ ergibt und eine Newtonsche Kettenlinie ist.

¹³ G. Huber, Die Conchalen, ihre orthogonalen Trajektorien und die Cissoiden 4. Ordnung. Mh. Math. Phys. 6 (1895). Vgl. auch G. Loria, Spezielle algebraische und transzendenten ebene Kurven (Leipzig 1902). Bd. I.